

PENGARUH LAJU PENULARAN DAN LAJU PEMULIHAN TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT PERTUSSIS DENGAN MODEL SEIR

IMAM NUR KHOLIK



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Pengaruh Laju Penularan dan Laju Pemulihan terhadap Penyebaran Penyakit Pertussis dengan Model SEIR” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Juli 2025

Imam Nur Kholik
G5401211037

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



ABSTRAK

IMAM NUR KHOLIK. Pengaruh Laju Penularan dan Laju Pemulihan terhadap Penyebaran Penyakit Pertussis dengan Model SEIR. Dibimbing oleh PAIAN SIANTURI dan ALI KUSNANTO.

Pertussis merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh bakteri *Bordetella pertussis* dan dapat menyebabkan gangguan pernapasan serius, terutama pada bayi dan anak-anak. Karya ilmiah ini memodelkan penyebaran Pertussis menggunakan model SEIR yang membagi populasi ke dalam empat subpopulasi yaitu *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, *Recovered*. Tujuannya adalah menganalisis kestabilan titik tetap, menghitung bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$), serta mengamati pengaruh beberapa parameter melalui simulasi numerik. Kestabilan titik tetap bebas penyakit dan endemik dianalisis secara lokal dengan kriteria Routh-Hurwitz dan secara global melalui pendekatan fungsi Lyapunov. Titik tetap bebas penyakit stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik tetap endemik stabil saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulasi dilakukan terhadap empat parameter, yaitu laju kelahiran/kematian, penularan, infeksi, dan pemulihan. Kombinasi variasi laju penularan dan pemulihan memberikan pengaruh paling besar terhadap $\mathcal{R}_0$, sehingga menjadi langkah paling efektif dalam pengendalian Pertussis menuju kondisi bebas penyakit.

Kata kunci: analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar, Pertussis, SEIR, simulasi numerik

ABSTRACT

IMAM NUR KHOLIK. The Effect of Transmission Rate and Recovery Rate on the Spread of Pertussis Using the SEIR Model. Supervised by PAIAN SIANTURI and ALI KUSNANTO.

Pertussis is a contagious disease caused by the *Bordetella pertussis* bacterium and can lead to serious respiratory problems, especially in infants and children. This scientific work models the spread of Pertussis using the SEIR model, which divides the population into four subpopulations, namely *Susceptible*, *Exposed*, *Infected*, and *Recovered*. The aim is to analyze the stability of equilibrium points, calculate the basic reproduction number ($\mathcal{R}_0$), and observe the influence of several parameters through numerical simulations. The stability of both the disease-free and endemic equilibrium points is analyzed locally using the Routh-Hurwitz criterion and globally through the Lyapunov function approach. The disease-free equilibrium is stable when $\mathcal{R}_0 < 1$, while the endemic equilibrium is stable when $\mathcal{R}_0 > 1$. Simulations are conducted on four parameters: birth/death rate, transmission rate, infection rate, and recovery rate. The combination of variations in transmission and recovery rates has the greatest impact on $\mathcal{R}_0$, making it the most effective strategy for controlling Pertussis toward a disease-free state.

Keywords: basic reproduction number, numerical simulation, Pertussis, SEIR, stability analysis



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2025
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.

PENGARUH LAJU PENULARAN DAN LAJU PEMULIHAN TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT PERTUSSIS DENGAN MODEL SEIR

IMAM NUR KHOLIK

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Penguji pada Ujian Skripsi:
Ir. Ngakan Komang Kutha Ardana, M.Sc.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Judul Skripsi : Pengaruh Laju Penularan dan Laju Pemulihan terhadap
Penyebaran Penyakit Pertussis dengan Model SEIR

Nama : Imam Nur Kholik

NIM : G5401211037

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Dr. Drs. Paian Sianturi

Pembimbing 2:

Drs. Ali Kusnanto, M.Si.

Diketahui oleh

Ketua Program Studi:

Dr. Donny Citra Lesmana, S.Si., M.Fin.Math.

NIP 197902272005011001

Tanggal Ujian:
16 Juni 2025

Tanggal Lulus:

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Judul yang dipilih dalam karya ilmiah yang dilaksanakan sejak bulan September 2024 sampai bulan Juni 2025 ini ialah “Pengaruh Laju Penularan dan Laju Pemulihan terhadap Penyebaran Penyakit Pertussis dengan Model SEIR”.

Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang turut membantu dalam penyusunan karya ilmiah ini, diantaranya:

1. Bapak Tarjan dan Ibu Tutik Ningsih, orang tua tercinta, atas doa yang tiada henti, kasih sayang yang tak tergantikan, serta semangat yang senantiasa menguatkan dalam setiap langkah perjalanan ini;
2. Dr. Drs. Paian Sianturi selaku dosen pembimbing I, Drs. Ali Kusnanto, M.Si. selaku dosen pembimbing II, dan Ir. Ngakan Komang Kutha Ardana, M.Sc. selaku dosen penguji, atas bimbingan, arahan, serta ilmu yang diberikan dengan penuh kesabaran dan ketulusan selama proses penyusunan karya ini;
3. Dra. Farida Hanum, M.Si. selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing dan memberikan nasihat berharga selama penulis menjalani masa perkuliahan;
4. Seluruh dosen Program Studi Matematika yang telah mendidik dan membagikan ilmu yang bermakna selama masa studi penulis;
5. Seluruh staf Program Studi Matematika yang telah membantu dalam berbagai proses akademik maupun administratif;
6. Siti Yuditha Cahaya Anugerah selaku sahabat seperjuangan penulis yang telah menemani serta memberikan dukungan selama perkuliahan dan proses penulisan karya ilmiah ini;
7. Grup muried, ghaib, bsk coolyeah, dan prim-a mineral selaku teman bermain yang senantiasa menghadirkan tawa di sela-sela kesibukan;
8. Teman-teman bimbingan, keluarga besar Matematika Angkatan 58, ST20, dan GUMATIKA, atas kebersamaan, dukungan, serta kenangan tak terlupakan selama masa kuliah;
9. Seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu, namun telah memberikan dukungan dan doa yang berarti bagi penulis;
10. Imam Nur Kholik, yang telah berjuang dengan sabar dan penuh tekad hingga karya ilmiah ini dapat terselesaikan dengan baik.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Juli 2025

Imam Nur Kholik

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	x
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	3
2.2 Titik Tetap	3
2.3 Nilai eigen dan Vektor Eigen	4
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar	4
2.5 Kriteria Routh-Hurwitz	5
2.6 Fungsi Lyapunov	5
2.7 Kestabilan Titik Tetap Lokal dan Titik Tetap Global	5
2.8 Indeks Sensitivitas	7
III METODE PENELITIAN	8
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	9
4.1 Model Matematika	9
4.2 Analisis Sifat Dasar Model	11
4.3 Penentuan Titik Tetap	13
4.4 Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar	13
4.5 Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap Bebas Penyakit	14
4.6 Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap Endemik	17
4.7 Analisis Kestabilan Global Titik Tetap Bebas Penyakit	19
4.8 Analisis Kestabilan Global Titik Tetap Endemik	21
4.9 Indeks Sensitivitas	22
4.10 Simulasi Numerik	23
V SIMPULAN DAN SARAN	33
5.1 Simpulan	33
5.2 Saran	33
DAFTAR PUSTAKA	34
LAMPIRAN	36
RIWAYAT HIDUP	63



DAFTAR TABEL

1	Deskripsi parameter pada diagram kompartemen penyebaran penyakit Pertussis	10
2	Nilai indeks sensitivitas	23
3	Nilai parameter penyebaran penyakit Pertussis	23
4	Hasil simulasi pengaruh laju penularan individu rentan menjadi terpapar (β') terhadap penyebaran penyakit Pertussis.	24
5	Hasil simulasi perbandingan parameter β' dan γ pada penyebaran penyakit Pertussis	26
6	Hasil simulasi pengaruh laju pemulihan individu terinfeksi menjadi sembuh (α) terhadap penyebaran penyakit Pertussis	27
7	Hasil simulasi perbandingan parameter α dan μ pada penyebaran penyakit Pertussis	29
8	Pengaruh gabungan variasi parameter laju penularan (β') dan laju pemulihan (α) terhadap penyebaran penyakit Pertussis	30

DAFTAR GAMBAR

1	Diagram kompartemen penyebaran penyakit Pertussis (digambar ulang dari Alqarni <i>et al.</i> 2022)	9
2	Dinamika populasi akibat pengaruh laju penularan individu rentan menjadi ke terpapar (β') pada penyebaran penyakit Pertussis	25
3	Perbandingan proporsi subpopulasi I_h akibat variasi nilai β' dan γ	26
4	Dinamika proporsi populasi akibat pengaruh laju pemulihan individu terinfeksi menjadi sembuh (α) pada penyebaran penyakit Pertussis	28
5	Perbandingan proporsi subpopulasi I_h akibat variasi nilai α dan μ	29
6	Dinamika proporsi subpopulasi individu terinfeksi (I_h) terhadap penyebaran penyakit Pertussis	31

DAFTAR LAMPIRAN

1	Formulasi persamaan <i>non-dimensionalisasi</i>	37
2	Analisis kepositifan	38
3	Penentuan titik tetap	40
4	Penentuan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$)	41
5	Kestabilan Lokal Titik Tetap Bebas Penyakit ($C1$)	42
6	Kestabilan Lokal Titik Tetap Endemik ($C2$)	44
7	Menentukan nilai indek sensitivitas	46
8	Penentuan titik tetap, $\mathcal{R}_0$ dan visualisasi grafik akibat variasi parameter β'	47
9	Penentuan titik tetap, $\mathcal{R}_0$ dan visualisasi grafik dalam perbandingan parameter β' dan γ	49



10	Penentuan titik tetap, $\mathcal{R}_0$ dan visualisasi grafik akibat variasi parameter α	52
11	Penentuan titik tetap, $\mathcal{R}_0$ dan visualisasi grafik dalam perbandingan parameter α dan μ	57
12	Penentuan titik tetap, $\mathcal{R}_0$ dan visualisasi grafik gabungan variasi parameter β' dan α	60



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.