



SIFAT GRAF PEMBAGI NOL $\mathbb{Z}_n$ DENGAN n PERKALIAN DUA BILANGAN PRIMA

SYIFA NOER SYA'ADAH



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa laporan akhir dengan judul “Sifat Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$ dengan n Perkalian Dua Bilangan Prima” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir laporan akhir ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Agustus 2025

Syifa Noer Sya'adah
G5401201049

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

ABSTRAK

SYIFA NOER SYA'ADAH. Sifat Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$ dengan n Perkalian Dua Bilangan Prima. Dibimbing oleh TEDUH WULANDARI MAS''OED dan SUGI GURITMAN.

Graf pembagi nol adalah graf yang verteks-verteksnya merupakan unsur pembagi nol dari ring komutatif dengan unsur kesatuan dan akan adjacent ketika perkalian dua verteksnya menghasilkan nol. Dalam artikel ini, ring komutatif dengan unsur kesatuan yang digunakan adalah ring $\mathbb{Z}_n$. Tujuannya adalah mencari unsur pembagi nol dari ring komutatif $\mathbb{Z}_n$, graf pembagi nol dari ring komutatif $\mathbb{Z}_{p^2}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$ dengan p dan q bilangan prima, serta graf lengkap dan graf Euler dari graf tersebut. Unsur pembagi nol $\mathbb{Z}_n$ ditentukan dengan mencari unsur yang tidak relatif prima terhadap n sehingga dapat mempermudah perhitungan dibandingkan dengan menggunakan definisi. Langkah untuk membuat graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$ yaitu dengan mencari unsur pembagi nol sebagai verteksnya dan verteks-verteks yang adjacent sebagai sisinya. Graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{p^2}$ merupakan graf lengkap dan graf pembagi nol $\mathbb{Z}_{pq}$ merupakan graf Euler hanya ketika p dan q^2 merupakan bilangan ganjil.

Kata kunci: bilangan prima, unsur pembagi nol, graf pembagi nol, graf Euler , graf lengkap.

ABSTRACT

SYIFA NOER SYA'ADAH. Properties of Zero Divisor Graph $\mathbb{Z}_n$ with n is Multiplication of Two Prime Numbers. Supervised by TEDUH WULANDARI MAS''OED and SUGI GURITMAN.

A zero divisor graph is a graph whose vertices are zero divisors of a commutative ring with elements of unity and are adjacent when the multiplication of two vertices yields zero. In this article, the commutative ring with the unitary element used is the ring $\mathbb{Z}_n$. The goal is to find the zero divisor element of the commutative ring $\mathbb{Z}_n$, the zero divisor graph of the commutative rings $\mathbb{Z}_{p^2}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$ with p and q prime numbers, as well as the complete graph and Euler graph of the graph. The zero divisor element $\mathbb{Z}_n$ is determined by looking for an element that is not relatively prime to n so that it can facilitate computation compared to using the definition. The step to make zero divisor graphs $\mathbb{Z}_{p^2}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$ is to look for the zero divisor element as its vertex and the adjacent vertices as its sides. The zero divisor graph $\mathbb{Z}_{p^2}$ is a complete graph and the zero divisor graph $\mathbb{Z}_{pq}$ is an Euler graph only when p and q^2 are odd numbers.

Keywords: prime numbers, zero divisor elements, Euler graphs, complete graphs, zero divisor graphs.



@Hak cipta milik IPB University

IPB University



- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2025¹
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.



@Hak cipta milik IPB University

IPB University

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

SIFAT GRAF PEMBAGI NOL $\mathbb{Z}_n$ DENGAN n PERKALIAN DUA BILANGAN PRIMA

SYIFA NOER SYA'ADAH

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



@Hak cipta milik IPB University

IPB University

IPB University
— Bogor Indonesia —

Perpustakaan IPB University

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Tim Penguji pada Ujian Skripsi:
Drs. Siswandi, M.Si

Judul Skripsi : Sifat Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$ dengan n Perkalian Dua Bilangan
Prima
Nama : Syifa Noer Sya'adah
NIM : G5401201049

Disetujui oleh

Pembimbing 1:
Teduh Wulandari Mas'oed, M.Si.

Pembimbing 2:
Dr. Drs. Sugi Guritman



Diketahui oleh

Ketua Program Studi Matematika
Dr Donny Citra Lesmana, M.Fin.Math.
NIP 19790227 200501 1001



Tanggal Ujian: 24 Desember 2024

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Tema yang dipilih dalam penelitian yang dilaksanakan sejak bulan November 2023 sampai bulan Oktober 2024 ini ialah Struktur Aljabar dan Graf, dengan judul “Sifat Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$ dengan n Perkalian Dua Bilangan Prima”.

Penyusunan karya ilmiah ini dapat diselesaikan tentunya tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terimakasih kepada:

1. Ibu Erie Sanerih dan Bapak Sukirno selaku kedua orang tua penulis yang senantiasa memberikan doa, motivasi, dan dukungannya,
2. Ibu Teduh Wulandari Mas'ood, M.Si selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Dr. Drs. Sugi Guritman selaku dosen pembimbing kedua atas segala ilmu, motivasi, dan bimbingannya selama penulisan karya ilmiah ini,
3. Seluruh dosen Departemen Matematika atas segala ilmu yang telah diberikan,
4. Seluruh staf Departemen Matematika atas segala bantuan yang telah diberikan,
5. Dian Ayu Lestari selaku sahabat yang telah menemani, mendengarkan keluh kesah, serta memberi dukungannya,
6. Tim PKM-PM *Math Mission*, yaitu Dhea Ekaputri, Rio Rizky, dan Muhammad Rifqi Al-Wafi yang telah memberikan dukungannya selama penulisan karya ilmiah ini,

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan..

Bogor, Agustus 2025

Syifa Noer Sya'adah



DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	viii
DAFTAR GAMBAR	viii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	1
II TINJAUAN PUSTAKA	2
2.1 Teori Bilangan	2
2.2 Struktur Aljabar	2
2.3 Teori Graf	5
III HASIL DAN PEMBAHASAN	8
3.1 Unsur Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$	8
3.2 Graf Pembagi Nol $\mathbb{Z}_n$	16
3.3 $\Gamma[\mathbb{Z}_{p^2}]$ merupakan Graf Lengkap	21
3.4 $\Gamma[\mathbb{Z}_{pq}]$ merupakan Graf Euler	22
IV SIMPULAN DAN SARAN	25
4.1 Simpulan	25
4.2 Saran	25
DAFTAR PUSTAKA	26
RIWAYAT HIDUP	27

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



DAFTAR TABEL

1	<i>Greatest Common Divisor</i> dari x dan 8.	2
2	<i>Greatest Common Divisor</i> dari $k \leq 4$ dan 4.	3
3	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 12.	9
4	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 5. $m \neq 0$.	10
5	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 9.	11
6	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 25.	11
7	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 49.	12
8	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 6.	14
9	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 10.	14
10	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 15.	15
11	<i>Greatest Common Divisor</i> dari m dan 21.	16

DAFTAR GAMBAR

1	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_4]$	17
2	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_9]$	17
3	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_{25}]$	17
4	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_{49}]$	18
5	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_6]$	19
6	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_{10}]$	19
7	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_{15}]$	20
8	Graf pembagi nol $\Gamma[\mathbb{Z}_{21}]$	20