

PENGARUH LAJU PENULARAN VERTIKAL TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT RUBELLA

SITI YUDITHA CAHAYA ANUGERAH



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Pengaruh Laju Penularan Vertikal terhadap Penyebaran Penyakit Rubella” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Juli 2025

Siti Yuditha Cahaya Anugerah
G5401211006



ABSTRAK

SITI YUDITHA CAHAYA ANUGERAH. Pengaruh Laju Penularan Vertikal terhadap Penyebaran Penyakit Rubella. Dibimbing oleh PAIAN SIANTURI dan ALI KUSNANTO.

Rubella merupakan penyakit menular yang disebabkan oleh infeksi virus *Rubella* dan berisiko tinggi apabila menginfeksi ibu hamil karena dapat menimbulkan gangguan serius pada janin. Dalam penelitian ini dimodelkan penyebaran penyakit Rubella melalui pendekatan matematika dengan memasukan aspek penularan vertikal dari ibu hamil ke janin. Populasi dibagi ke dalam enam subpopulasi menggunakan model SVPEIR (*Susceptible, Vaccinated, Protect, Exposed, Infected, Recovered*). Tujuan penelitian ini adalah menganalisis kestabilan titik tetap, menghitung bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$), serta mengevaluasi pengaruh parameter θ (laju penularan vertikal), α (laju vaksinasi dosis pertama) dan δ (laju vaksinasi dosis kedua) melalui simulasi numerik. Analisis kestabilan menunjukkan bahwa titik tetap bebas penyakit stabil saat $\mathcal{R}_0 < 1$, sedangkan titik tetap endemik stabil saat $\mathcal{R}_0 > 1$. Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa penurunan nilai θ sebesar 50% mampu membuat penyebaran penyakit Rubella mencapai kondisi bebas penyakit.

Kata kunci: analisis kestabilan, bilangan reproduksi dasar, penularan vertikal, Rubella, vaksinasi

ABSTRACT

SITI YUDITHA CAHAYA ANUGERAH. The Effect of Vertical Transmission Rate on the Spread of Rubella Disease. Supervised by PAIAN SIANTURI and ALI KUSNANTO.

Rubella is a contagious disease caused by the *Rubella* virus and poses a high risk when infecting pregnant women, as it can lead to severe complications for the fetus. This study models the transmission of Rubella using a mathematical approach by incorporating vertical transmission from pregnant women to their fetuses. The population is divided into six subpopulations using the SVPEIR model (*Susceptible, Vaccinated, Protect, Exposed, Infected, Recovered*). The aim of this study is to analyze the stability of equilibrium points, calculate the basic reproduction number ($\mathcal{R}_0$), and evaluate the influence of the parameters θ (vertical transmission rate), α (first-dose vaccination rate), and δ (second-dose vaccination rate) through numerical simulations. Stability analysis shows that the disease-free equilibrium is stable when $\mathcal{R}_0 < 1$, while the endemic equilibrium is stable when $\mathcal{R}_0 > 1$. Numerical simulation results indicate that a reduction of θ by 50% can drive the spread of Rubella toward a disease-free condition.

Keywords: basic reproduction number, Rubella, stability analysis, vaccination, vertical transmission



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2025
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.

PENGARUH LAJU PENULARAN VERTIKAL TERHADAP PENYEBARAN PENYAKIT RUBELLA

SITI YUDITHA CAHAYA ANUGERAH

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Penguji pada Ujian Skripsi:
Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S.





Judul Skripsi : Pengaruh Laju Penularan Vertikal terhadap Penyebaran Penyakit
Rubella
Nama : Siti Yuditha Cahaya Anugerah
NIM : G5401211006

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Dr. Drs. Paian Sianturi

Pembimbing 2:

Drs. Ali Kusnanto, M.Si.

Diketahui oleh

Ketua Program Studi:

Dr. Donny Citra Lesmana, S.Si., M.Fin.Math.

NIP 197902272005011001

Tanggal Ujian: 02 Juni 2025

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah dengan judul “Pengaruh Laju Penularan Vertikal terhadap Penyebaran Penyakit Rubella” yang disusun sejak September 2024 hingga Juli 2025 ini dapat diselesaikan dengan baik. Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang turut membantu dalam penyusunan karya ilmiah ini, diantaranya:

1. Orang tua tercinta, Bapak Wiyogo Nugroho dan Ibu Rismauli Hutabarat. Terimakasih atas cinta yang tak pernah usai, kasih sayang, doa, serta dukungan tanpa henti yang telah menjadi sumber kekuatan dalam setiap langkah dan proses yang penulis jalani;
2. Yuris Wiyanti, S.E. dan Yohanes Wianto Saputra, S.T., kakak tersayang, yang senantiasa hadir melalui doa, dukungan dan perhatian yang tak ternilai. Terimakasih karena telah menjadi penyemangat besar dalam perjalanan ini;
3. Dr. Drs. Paian Sianturi selaku pembimbing I dan Drs. Ali Kusnanto, M.Si. selaku pembimbing II yang telah membimbing dan memberikan ilmu dengan penuh kesabaran, serta Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S. selaku penguji yang telah memberikan saran sehingga karya ini lebih bermakna;
4. Prof. Dr. Ir. Bib Paruhum S., M.Kom. selaku dosen pembimbing akademik, serta seluruh dosen dan staf Prodi Matematika yang telah memberikan ilmu, nasihat dan bantuan kepada penulis selama masa perkuliahan;
5. Imam Nur Kholik, sahabat seperjuangan yang senantiasa menemani, menjadi tempat berbagi cerita, bertukar semangat, serta selalu mendukung sepanjang masa perkuliahan;
6. Ega Dwi Khatami, Syakila Banestina dan Rifa Khaira Fazila, sahabat baik penulis yang senantiasa memberi ruang untuk tumbuh, bertukar pikiran dan saling menguatkan;
7. Teman se-permainan di kampus, Muried dan Ghaib yang telah menghadirkan tawa dan kehangatan selama menjalani hari-hari di perkuliahan. Terkhusus Vera Tifani E. dan Salsabila S., terimakasih atas kebersamaan yang berarti;
8. Matematika Angkatan 58, Tutor Sebaya, GUMATIKA, serta teman-teman bimbingan, atas kebersamaan, tawa, pengalaman berorganisasi dan ruang belajar yang telah memperkaya hari-hari penulis selama perkuliahan;
9. Seluruh pihak yang telah memberikan doa, dukungan dan semangat kepada penulis yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu. Setiap kebaikan yang diberikan begitu berarti;
10. Dan untuk Siti Yuditha Cahaya Anugerah, yang tidak menyerah saat lelah, tetap berusaha saat ragu serta terus melangkah walau tak selalu mudah. Terimakasih telah menyelesaikan karya ini dan menutup perjalanan panjang selama masa perkuliahan ini dengan sepenuh hati.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Juli 2025

Siti Yuditha Cahaya Anugerah

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	x
DAFTAR GAMBAR	x
DAFTAR LAMPIRAN	x
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	3
2.2 Titik Tetap	3
2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	3
2.4 Bilangan Reproduksi Dasar	4
2.5 Kriteria Routh-Hurwitz	4
2.6 Fungsi Lyapunov	5
2.7 <i>LaSalle's Invariance Principle</i>	5
2.8 Kestabilan Titik Tetap Lokal dan Titik Tetap Global	6
2.9 Analisis Sensitivitas	6
III METODE PENELITIAN	8
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	9
4.1 Formulasi Model	9
4.2 Analisis Kepositifan Solusi Model	11
4.3 Analisis Keterbatasan Solusi Model	12
4.4 Penentuan Titik Tetap Model Penyebaran Penyakit Rubella	13
4.5 Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar	14
4.6 Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap Bebas Penyakit	16
4.7 Analisis Kestabilan Lokal Titik Tetap Endemik	19
4.8 Analisis Kestabilan Global Titik Tetap Bebas Penyakit	21
4.9 Analisis Kestabilan Global Titik Tetap Endemik	23
4.10 Analisis Sensitivitas	25
4.11 Simulasi Numerik	26
V SIMPULAN DAN SARAN	34
5.1 Simpulan	34
5.2 Saran	34
DAFTAR PUSTAKA	35
LAMPIRAN	37
RIWAYAT HIDUP	66



DAFTAR TABEL

1	Deskripsi Parameter pada diagram kompartemen penyebaran penyakit Rubella	11
2	Nilai indeks sensitivitas	25
3	Nilai parameter	26
4	Hasil simulasi pengaruh laju penularan vertikal (θ) terhadap $\mathcal{R}_0$	27
5	Hasil simulasi pengaruh laju vaksinasi dosis pertama (α) terhadap $\mathcal{R}_0$	29
6	Hasil simulasi laju vaksinasi dosis kedua (δ) terhadap $\mathcal{R}_0$	31

DAFTAR GAMBAR

1	Diagram kompartemen penyebaran penyakit Rubella (digambar ulang dari (Tilahun et al. 2022))	9
2	Dinamika populasi akibat pengaruh laju penularan vertikal (θ)	28
3	Dinamika populasi akibat pengaruh laju vaksinasi dosis pertama (α)	31
4	Dinamika populasi akibat pengaruh laju vaksinasi dosis kedua (δ)	33

DAFTAR LAMPIRAN

1	Analisis kepositifan solusi	38
2	Analisis keterbatasan solusi model	41
3	Penentuan titik tetap	43
4	Penentuan bilangan reproduksi dasar ($\mathcal{R}_0$)	44
5	Analisis kestabilan lokal titik tetap bebas penyakit	45
6	Analisis kestabilan lokal titik tetap endemik	46
7	Menentukan nilai indeks sensitivitas	47
8	Pengaruh laju penularan vertikal (θ) terhadap dinamika populasi	48
9	Pengaruh Laju Vaksinasi Dosis Pertama (α) terhadap Dinamika Populasi	54
10	Pengaruh Laju Vaksinasi Dosis Kedua (δ) terhadap Dinamika Populasi	60