

Journal of Mathematics and Its Applications

J M A

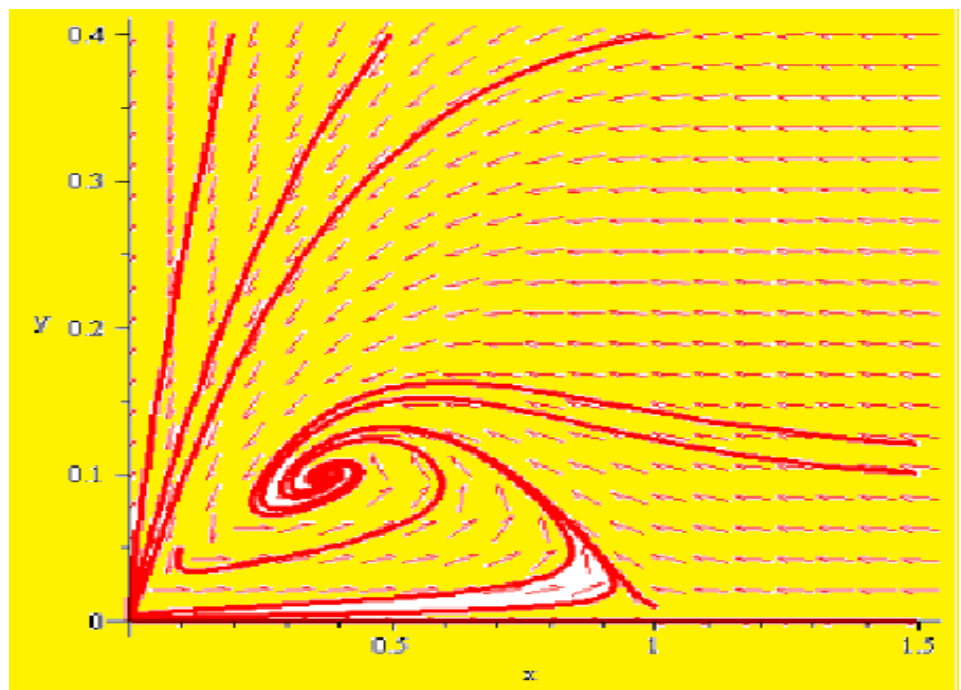
Jurnal Matematika dan Aplikasinya

Volume 10, No. 1
Juli 2011



Alamat Redaksi :
Departemen Matematika
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB
Dramaga - Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276
E-mail: math@ipb.ac.id



- Konstruksi Kode Linear Biner Optimal Kuat Berjarak Minimum Rendah*
Guritman, S., N. Aliatiningtyas, T. Wulandari, M. Ilyas 1
- Pendekatan Matematis pada Pembangkitan Gelombang Internal di Selat Makassar*
Hermansyah, H. dan Jaharuddin 13
- Optimasi Headway dan Kecepatan Bus: Studi Kasus Pengoperasian Transjakarta Koridor 1*
Suryani, L., A. Aman, dan Supriyo, P.T. 21
- Bifurkasi Heteroclinic pada Model Mangsa Pemangsa*
Kusnanto, A. 31
- Pemodelan Nilai Tukar Rupiah Terhadap Dolar Amerika Menggunakan Deret Waktu Hidden Markov Tiga Waktu Sebelumnya*
Setiawaty, B., S.A. Purnomo, dan N.K.K. Ardhana 39

Journal of Mathematics and Its Applications

JMA

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

PIMPINAN REDAKSI

Dr. Jaharuddin, MS.

EDITOR

Dr. Ir. Sri Nurdiati, MSc.

Dr. Ir. Hadi Sumarno, MS.

Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc.

Dr. Ir. Endar H. Nugrahani, MS.

Dr. Paian Sianturi

ALAMAT REDAKSI:

Departemen Matematika

FMIPA – Institut Pertanian Bogor

Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga

Bogor

Phone./Fax: (0251) 8625276

Email:math@ipb.ac.id

JMA merupakan media yang memuat informasi hasil penelitian matematika baik murni maupun terapan, bagi para matematikawan atau para pengguna matematika. *JMA* diterbitkan dua kali (dua nomor) setiap tahun (periode Juli dan Desember).

Harga langganan per volume, termasuk biaya pos, Vol.9, No.1 dan 2:

Institusi/Perpustakaan Rp. 350.000,- (dalam IPB), Rp. 500.000,- (luar IPB)

Staf/Perorangan Rp. 200.000,- (dalam IPB), Rp.250.000,- (luar IPB)

Mahasiswa Rp. 75.000,-

Penulis makalah yang diterima dikenai biaya administrasi Rp.25.000,- per lembar

Semua pembayaran biaya dapat ditransfer melalui:

Retno Budiarti

BNI Cabang Bogor

No. Rek. 000291007-5

TATA CARA PENULISAN MAKALAH

JMA menerima makalah dalam bahasa Indonesia atau bahasa Inggris. Makalah dapat dikirim melalui pos (berupa 2 hard copy beserta disketnya) atau lewat email ke alamat berikut:

Redaksi **JMA**
Departemen Matematika
FMIPA – Institut Pertanian Bogor
Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga
Bogor
Phone/Fax: (0251) 8625276
Email:math@ipb.ac.id

Makalah yang orisinal berupa hasil penelitian matematika murni atau terapan mendapat prioritas utama untuk diterima. Tulisan yang bersifat review juga bisa diterima. Makalah akan diseleksi oleh redaksi, dan hasil seleksi akan diinformasikan.

Makalah ditulis dengan LATEX/TEX/MS-WORD dengan kualitas baik, format A4, tidak boleh bolak balik, spasi satu, font 12, margin kiri 4 cm, margin kanan 3 cm. Margin atas dan bawah 4 cm. Maksimum jumlah halaman 20 yang didalamnya termasuk tabel, ilustrasi, dan gambar.

Judul makalah dibuat singkat, jelas, dan merepresentasikan isi makalah. Nama penulis diletakkan di bawah judul, diikuti nama instansi (bila ada), dan alamat (termasuk email jika ada).

Abstrak diletakkan di bawah nama dan alamat penulis, ditulis tidak melebihi 250 kata, meringkas hasil yang diperoleh dan metode yang digunakan. Di bawah abstrak boleh diletakkan kata kunci. Kata kunci terdiri atas satu kata atau lebih yang merupakan istilah yang paling dominan digunakan dan merupakan istilah yang paling menentukan isi tulisan.

Acknowledgment/Ungkapan Terima Kasih ditulis pada akhir tulisan sebelum referensi.

Referensi/Daftar Pustaka diletakkan pada akhir tulisan setelah Ungkapan Terima Kasih, penulisan mengikuti pola pada contoh berikut ini dengan pengurutan naik didasarkan abjad huruf pertama pada nama belakang penulis pertama.

- [1] S. Guritman, F. Hooweg, and J. Simonis, "The Degree of Functions and Weights in Linear Codes," *Discrete Applied Mathematics*, vol.111, no. 1, pp. 87-102, 2001
- [2] J.H. van Lint, *Introduction to Coding Theory*, 2nd ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1992.

Ilustrasi atau *Gambar* sedapat mungkin ditempatkan pada badan tulisan mengikuti apa yang diilustrasikan atau yang digambarkan. Jika itu tidak mungkin, boleh juga ditempatkan setelah referensi. Tidak ada ilustrasi atau gambar yang ditulis tangan.

PENDEKATAN MATEMATIS PADA PEMBANGKITAN GELOMBANG INTERNAL DI SELAT MAKASSAR

HERMANSYAH, H¹⁾ DAN JAHARUDDIN²⁾

¹⁾ Mahasiswa Pascasarjana
Sekolah Pascasarjana Institut Pertanian Bogor
JI Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

²⁾Departemen Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Institut Pertanian Bogor
JI Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

Abstrak : Selat Makassar merupakan selat yang terletak di antara Pulau Kalimantan dan Pulau Sulawesi. Pembangkitan gelombang internal di Selat Makassar memanfaatkan relasi dispersi yang diturunkan dari persamaan dasar fluida dua lapisan yang masing-masing berupa fluida ideal yang tak berotasi. Relasi dispersi yang diperoleh berupa relasi dispersi Kelvin-Helmholtz. Berdasarkan relasi dispersi Kelvin-Helmholtz digambarkan frekuensi dan kecepatan fase gelombang internal terhadap bilangan gelombang.

Kata kunci: relasi dispersi Kelvin-Helmholtz, frekuensi, kecepatan fase, dan gelombang internal

1. PENDAHULUAN

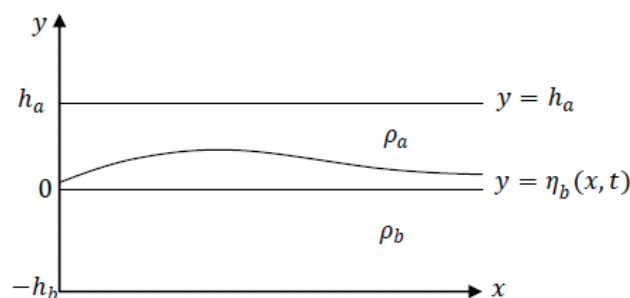
Selat Makassar merupakan selat yang terletak di antara Pulau Kalimantan dan Pulau Sulawesi. Selat ini memiliki peran penting sebagai jalur utama arus lintas Indonesia (Arlindo) yang membawa massa air hangat dari Samudera Pasifik menuju Lautan Hindia [1]. Besaran yang penting untuk menggambarkan sifat-sifat massa air adalah suhu, kadar garam, dan kerapatan. Kerapatan merupakan komponen utama dalam mengenali massa air pada suatu perairan. Pada masa peralihan musim di bulan April/Mei dan November/Desember arus di Selat Makassar bergerak ke selatan dan berbalik ke utara karena pengaruh masuknya gelombang Kelvin dari ekuator Samudera Hindia [4].

Terdapat fenomena menarik di Selat Makassar yang perlu diamati, yaitu munculnya gelombang internal. Gelombang internal adalah gelombang yang terjadi di bawah permukaan laut sehingga tidak teramati secara kasat mata. Keberadaan gelombang internal ini diakibatkan oleh rapat massa air laut yang tidak konstan. Perbedaan rapat massa ini diakibatkan oleh perbedaan suhu dan kadar garam pada setiap lapisan. Gelombang internal hanya dapat dideteksi dengan cara melakukan pengamatan atau pengukuran langsung pada *pycnocline* (lapisan di mana kerapatan air laut berubah secara cepat terhadap ketebalan) atau *thermocline* (lapisan di mana suhu air laut berubah secara cepat terhadap ketebalan) dengan menggunakan sensor-sensor pengukuran suhu dan kadar garam air laut, serta kecepatan arus. Secara umum, gelombang internal dibangkitkan oleh interaksi dari arus pasang surut (sebagai gaya pembangkit), lapisan fluida, dan topografi dasar dari fluida. Pujiana (2005) dalam [3] menjelaskan bahwa gelombang internal di Selat Lombok terbangkitkan pada setiap sisi *sill* (palung), dan selanjutnya bergerak menjauhi palung. Sisi selatan palung yang curam menyebabkan amplitudo gelombang internal di sisi tersebut lebih besar dibandingkan dengan amplitudo pada sisi utara palung yang landai.

Kajian mengenai gelombang internal di Selat Makassar sangat penting dilakukan untuk mendapatkan perkiraan mengenai frekuensi dan kecepatan gelombang internal. Dalam tulisan ini pembangkitan gelombang internal di Selat Makassar akan memanfaatkan relasi dispersi yang diturunkan dari persamaan dasar fluida dua lapisan. Hasil penelitian ini diharapkan bermanfaat untuk memberikan tambahan khasanah pengetahuan tentang teori pembangkitan gelombang internal, khususnya di Selat Makassar.

2. RELASI DISPERSI FLUIDA DUA LAPISAN

Fluida Dua Lapisan: Misalkan (x, y) menyatakan posisi partikel fluida dua lapisan dan pada $y = 0$ merupakan posisi kesetimbangan yang memisahkan kedua lapisan fluida. Misalkan pula lapisan atas pada $0 < y < h_a$ dan lapisan bawah pada $-h_b < y < 0$, seperti ditunjukkan dalam Gambar 1. Kecepatan arus dalam arah horizontal dinotasikan $U_0(z)$. Rapat massa pada lapisan atas dan lapisan bawah masing-masing dinotasikan ρ_a dan ρ_b . Simpangan gelombang di batas kedua lapisan dinotasikan dengan $\eta_b(x, t)$.



Gambar 1. Domain fluida dua lapisan

Analog dengan asumsi fluida *irrotational* pada fluida satu lapisan, pada fluida dua lapisan diperoleh persamaan berikut:

$$\Delta\phi_a = 0, 0 < y < h_a \text{ dan } \Delta\phi_b = 0, -h_b < y < 0. \quad (2.1)$$

Secara spesifik, domain fluida dua lapisan memenuhi $-h_b < y < h_a$. Domain fluida tersebut dibagi menjadi dua bagian, yaitu:

$$S_a(t, \eta_b, \eta_a) = \{(x, y) \mid \eta_b(x, t) < y < h_a + \eta_a(x, t)\}$$

$$S_b(t, \eta_b) = \{(x, y) \mid -h_b(x, t) < y < \eta_b(x, t)\}$$

Kemudian syarat batas kinematik pada $y = \eta_b(x, t)$ adalah:

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial t} = \nabla \phi_b \cdot N \left(1 + \frac{\partial^2 \eta_b}{\partial x^2} \right)^{1/2} \text{ dan } \frac{\partial \eta_b}{\partial t} = \nabla \phi_a \cdot N \left(1 + \frac{\partial^2 \eta_b}{\partial x^2} \right)^{1/2}. \quad (2.2)$$

Kondisi batas di $y = \eta_b(x, t)$ adalah:

$$\frac{\partial \eta_b}{\partial t} + U_a \frac{\partial \eta_b}{\partial x} = \frac{\partial \phi_a}{\partial y} \text{ dan } \frac{\partial \eta_b}{\partial t} + U_b \frac{\partial \eta_b}{\partial x} = \frac{\partial \phi_b}{\partial y}. \quad (2.3)$$

Syarat batas dinamik di $y = \eta_b(x, t)$ diperoleh dari kekontinuan tekanan pada batas kedua lapisan fluida, yaitu:

$$\rho_b \left(U_b \frac{\partial \phi_b}{\partial x} + \frac{\partial \phi_b}{\partial t} + g \eta_b \right) = \rho_a \left(U_a \frac{\partial \phi_a}{\partial x} + \frac{\partial \phi_a}{\partial t} + g \eta_b \right) + \gamma \frac{\partial^2 \eta_b}{\partial x^2} \quad (2.4)$$

dengan U_a dan U_b masing-masing kecepatan arus pada lapisan atas dan lapisan bawah, dan γ koefisien tegangan permukaan. Apabila batas bawah di $y = -h_b$ dan di permukaan $y = h_a$ berupa batas rata, maka

$$\frac{\partial \phi_a}{\partial y} = 0 \text{ pada } y = h_a \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \phi_b}{\partial y} = 0 \text{ pada } y = -h_b \quad (2.6)$$

Relasi Dispersi: Misalkan gelombang internal yang ditinjau berupa gelombang monokromatik berikut:

$$\eta_b(x, t) = A \exp(i(kx - \omega t)) \quad (2.7)$$

dengan ω merupakan frekuensi gelombang dan k menyatakan bilangan gelombang serta A suatu konstanta. Penyelesaian persamaan (2.1a) dengan syarat batas (2.5) dinyatakan dalam bentuk:

$$\phi_a(x, y, t) = A_a \cosh(k(y - h_a)) \exp(i(kx - \omega t)). \quad (2.8)$$

Kemudian penyelesaian persamaan (2.1b) dengan syarat batas (2.6) dinyatakan dalam bentuk:

$$\phi_b(x, y, t) = A_b \cosh(k(y + h_b)) \exp(i(kx - \omega t)). \quad (2.9)$$

Jika persamaan (2.8) dan (2.9) masing-masing disubstitusikan ke dalam kondisi batas kinematik pada persamaan (2.2), maka di $y = 0$ diperoleh:

$$A_a = \frac{iA(kU_a - \omega)}{k \sinh(kh_a)} \quad \text{dan} \quad A_b = \frac{iA(kU_b - \omega)}{k \sinh(kh_b)} \quad (2.10)$$

Jika ϕ_a dan ϕ_b pada persamaan (2.9) disubstitusikan ke dalam kondisi batas dinamik pada persamaan (2.4), maka diperoleh

$$\begin{aligned} & \rho_b(U_b(ikA_b \cosh(kh_b) \exp(i(kx - \omega t))) \\ & \quad - i\omega A_b \cosh(kh_b) \exp(i(kx - \omega t)) + gA \exp(i(kx - \omega t))) \\ = & \rho_a(U_b(-ikA_a \cosh(kh_a) \exp(i(kx - \omega t))) \\ & \quad + i\omega A_a \cosh(kh_a) \exp(i(kx - \omega t))) \\ & \quad + gA \exp(i(kx - \omega t)) + \gamma(ik)^2 A \exp(i(kx - \omega t)). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Jika bentuk A_a dan A_b pada persamaan (2.10) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.11) dan dilakukan penyederhanaan, maka diperoleh:

$$\rho_b \left((U_b k - \omega)^2 \frac{-1}{k \tanh(kh_b)} + g \right) = \rho_a \left((U_a k - \omega)^2 \frac{1}{k \tanh(kh_a)} + g \right) + \gamma(ik)^2 \quad (2.12)$$

Jika persamaan (2.12) dikalikan dengan k , maka diperoleh

$$(S_a + S_b)\omega^2 - 2k(S_a U_a + S_b U_b)\omega + \Omega = 0 \quad (2.13)$$

dengan

$$\Omega = k^2(S_a U_a^2 + S_b U_b^2) - gk(\rho_b - \rho_a) + \gamma k^3$$

$$S_a = \frac{\rho_a}{\tanh(kh_a)}$$

$$S_b = \frac{\rho_b}{\tanh(kh_b)}$$

Persamaan (2.13) merupakan persamaan kuadrat dalam ω dengan penyelesaian dalam bentuk:

$$\omega_{b,a}(k) = \frac{k(S_a U_a + S_b U_b)}{S_a + S_b} \pm \frac{D}{S_a + S_b} \quad (2.14)$$

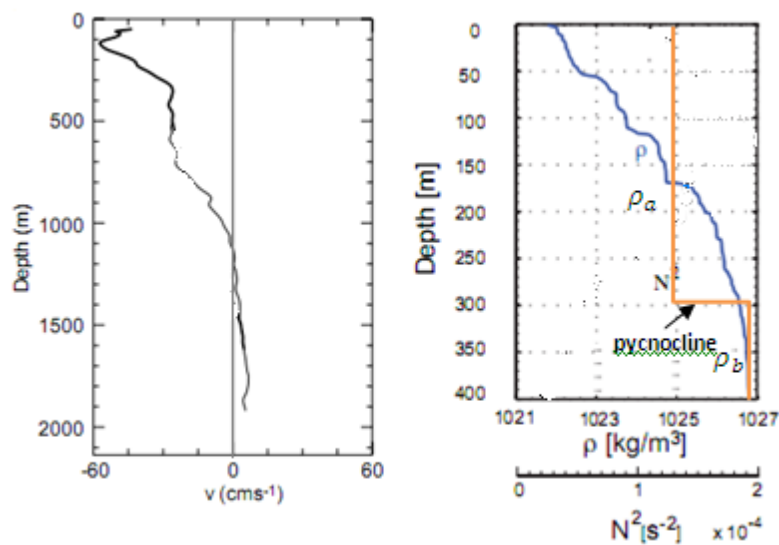
dengan

$$\begin{aligned} D = & k^2(S_a U_a + S_b U_b)^2 - (S_a + S_b)\{k^2(S_a U_a^2 + S_b U_b^2) \\ & - gk(\rho_a - \rho_b)\} + (S_a + S_b)\gamma k^3 \end{aligned}$$

Persamaan (2.14) merupakan relasi dispersi dari fluida dua lapisan yang masing-masing berupa fluida ideal yang tak berotasi. Relasi dispersi ini merupakan relasi dispersi Kelvin-Helmholtz [5].

3. PEMBANGKITAN GELOMBANG INTERNAL

Oseanografi Selat Makassar: Selat Makassar terletak pada ($2^{\circ}52'S$, $118^{\circ}27'E$) dan ($2^{\circ}51'S$, $118^{\circ}38'E$). Selat Makassar memiliki kedalaman sekitar 2000 m dengan lebar 200 km, kecuali di saluran Labani di mana lebarnya berkurang yaitu hanya mencapai 50 km. Pada tulisan ini, data yang berkaitan dengan kecepatan arus di Selat Makassar mengacu pada data pengamatan yang dilakukan oleh Wajsowicz et al [6] pada tahun 1998, yang diukur dengan menggunakan *Lowered Acoustic Doppler Current Profiler* (LADCP). Data profil kerapatan mengacu pada data hasil penelitian yang telah dilakukan oleh Pujiana, dkk [4] pada tahun 2009. Gambar 2 menunjukkan grafik kecepatan arus dan rapat massa pada Selat Makassar.



Gambar 2 Grafik kecepatan arus dan kerapatan pada Selat Makassar

Pada Gambar 2(a) menunjukkan grafik kecepatan arus berupa fungsi linear terhadap kedalaman pada kedalaman antara 500-750 m dan 750-1500 m. Kecepatan arus pada kedalaman di atas 100 m berkisar antara 0.5-1 m/s. Pada kedalaman 300 m, kecepatan arus hanya mencapai 0.2 m/s. Data pengukuran ini juga sesuai dengan data pengukuran yang telah dilakukan oleh Murray & Arief [2] pada tahun 1988. Gambar 2(b) juga memperlihatkan bahwa kecepatan arus mulai menunjukkan penurunan yang signifikan pada kedalaman 800 m. *Pycnocline*, yaitu lapisan di mana kerapatan air berubah secara cepat terhadap ketebalan, terjadi pada kedalaman 300 m. Dengan demikian *interface* dari kondisi Selat Makassar ditetapkan pada kedalaman 300 m. Berdasarkan data oseanografi Selat Makassar, maka berikut ini asumsi-asumsi yang akan digunakan.

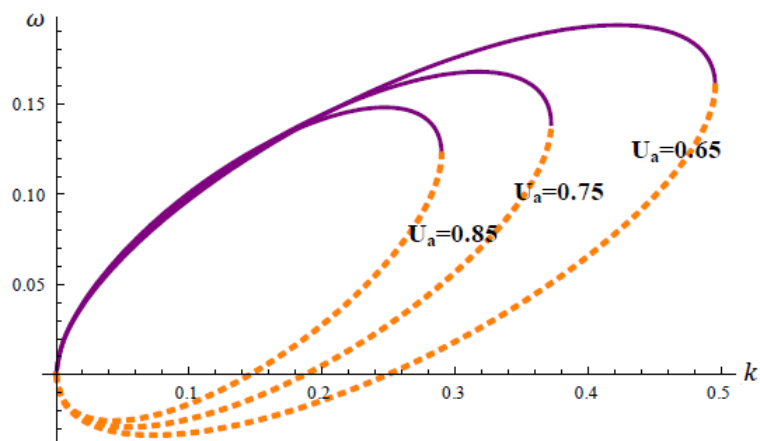
Asumsi 1. Kedalaman pada lapisan atas adalah 300 meter, sehingga $h_a = 300$ m, dan ketebalan lapisan bawah yang ditinjau adalah $h_b = 1500$ meter.

Asumsi 2. Kecepatan arus pada lapisan bawah sangat kecil sehingga diasumsikan $U_b = 0$, sedangkan kecepatan arus pada lapisan atas berubah terhadap kedalaman.

Asumsi 3. Tegangan permukaan diasumsikan sama dengan nol, yaitu $\gamma = 0$.

Asumsi 4. $\rho_b = 1035 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ dan $\rho_a = 1024 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Hasil ini berdasarkan profil kerapatan yang diberikan pada Gambar 2(b).

Parameter Gelombang: Berdasarkan asumsi-asumsi di atas, maka penyelesaian dari relasi dispersi Kelvin Helmholtz pada persamaan (2.14), yaitu $\omega_b(k)$ dan $\omega_a(k)$ untuk nilai U_a yang berbeda-beda diberikan dalam Gambar 3.

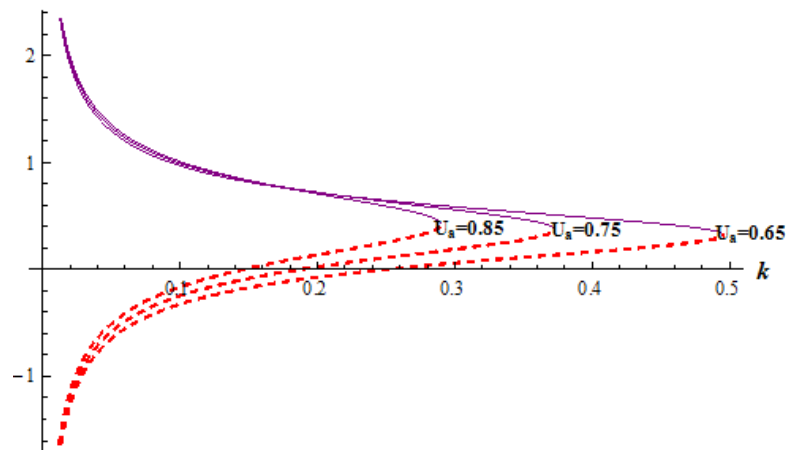


Gambar 3 Grafik frekuensi gelombang $\omega(k)$

Fungsi $\omega(k)$ seperti yang diperlihatkan Gambar 3 menggunakan nilai U_a yang berbeda, yaitu: $U_a = 0.65$, $U_a = 0.75$ dan $U_a = 0.85$. Garis putus-putus memperlihatkan penyelesaian $\omega_a(k)$ pada persamaan (2.14) yang merupakan frekuensi gelombang internal yang terjadi di lapisan atas. Garis kontinu memperlihatkan penyelesaian $\omega_b(k)$ pada persamaan (2.14) yang merupakan frekuensi gelombang internal yang terjadi di lapisan bawah.

Berdasarkan Gambar 3, jika k kecil ($0 < k < 0,1$), maka frekuensi gelombang pada lapisan atas negatif. Ini berarti gelombang yang terjadi bergerak menjauhi gelombang yang lebih besar. Selain itu, jika kecepatan arus pada lapisan atas mengecil, maka k membesar pada lapisan bawah. Ini berarti panjang gelombang internal yang terjadi semakin mengecil, atau dengan kata lain amplitudo semakin besar. Dengan demikian kecepatan fase juga semakin besar, hal ini konsisten dengan kecepatan fase pada Gambar 3.

Karena kecepatan fase didefinisikan sebagai $c(k) = \frac{\omega(k)}{k}$, maka kecepatan fase pada lapisan atas adalah $c_a(k) = \frac{\omega_a(k)}{k}$ dan kecepatan fase pada lapisan bawah adalah $c_b(k) = \frac{\omega_b(k)}{k}$. Kecepatan fase gelombang dapat dilihat pada Gambar 4, dengan $U_a = 0.65$, $U_a = 0.75$ dan $U_a = 0.85$.



Gambar 4 Kecepatan fase gelombang $c(k)$ untuk U_a berbeda-beda

4. KESIMPULAN

Persamaan dasar fluida dua lapisan diturunkan berdasarkan asumsi fluida tak mampat dan tak kental yang tak berotasi. Persamaan dasar yang diperoleh berupa persamaan Laplace dengan kondisi batas dinamik dan kinematik. Penyelesaian persamaan dasar fluida tersebut diasumsikan berupa gelombang monokromatik sehingga diperoleh suatu relasi dispersi Kelvin-Helmholtz. Berdasarkan relasi ini diperoleh suatu kriteria pembangkitan gelombang internal.

Berdasarkan data oseanografi dari Selat Makassar, diperoleh suatu kriteria pembangkitan dan kestabilan gelombang internal di Selat Makassar. Hasil yang diperoleh menyebutkan bahwa jika kecepatan arus pada lapisan atas dibuat mengecil, maka bilangan gelombang membesar, atau dengan kata lain panjang gelombang yang terjadi semakin mengecil. Jadi, kecepatan fase membesar. Sebagai simulasi, untuk membangkitkan gelombang dengan panjang 50 m, maka diperlukan adanya arus dengan kecepatan kurang dari 1.26 m/s. Selain itu, untuk membangkitkan gelombang dengan frekuensi -0.01 Hz, maka diperlukan adanya arus dengan kecepatan kurang dari 2.2 m/s.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] **Gordon, A. L., C. F. Giulivi, and A. G. Ilahude.** 2003. Deep topographic barriers within the Indonesian Seas. *Deep Sea Res., Part II*, 50, 2205 – 2228.

- [2] Murray, S.P., Arief, D. 1988. **Through flow into the Indian Ocean through the Lombok Strait.** *Nature*, 333, p.444 - 447.
- [3] **Pujiana Kandaga.** 2005. *Dinamika Gelombang Internal Di Selat Lombok.* Bandung: ITB Central Library's CD Collection.
- [4] **Pujiana Kandaga, Gordon, Sprintall, Susanto.** 2009. Intraseasonal variability in the Makassar Strait thermocline. *Journal of Marine Research*, 67, 757–777.
- [5] **Visser, W.P.** 2004. *On the generation of internal waves in Lombok Strait through Kelvin-Helmholtz instability.* The Netherlands: Department of Applied Mathematics, University of Twente.
- [6] **Wajsowicz Roxana C, Gordon Arnold L, Field Amy, Susanto R.D.** 2003. Estimating transport in Makassar Strait. *Deep-Sea Research II* 50: 2163 – 2181.