

# Journal of Mathematics and Its Applications

# J M A

## Jurnal Matematika dan Aplikasinya

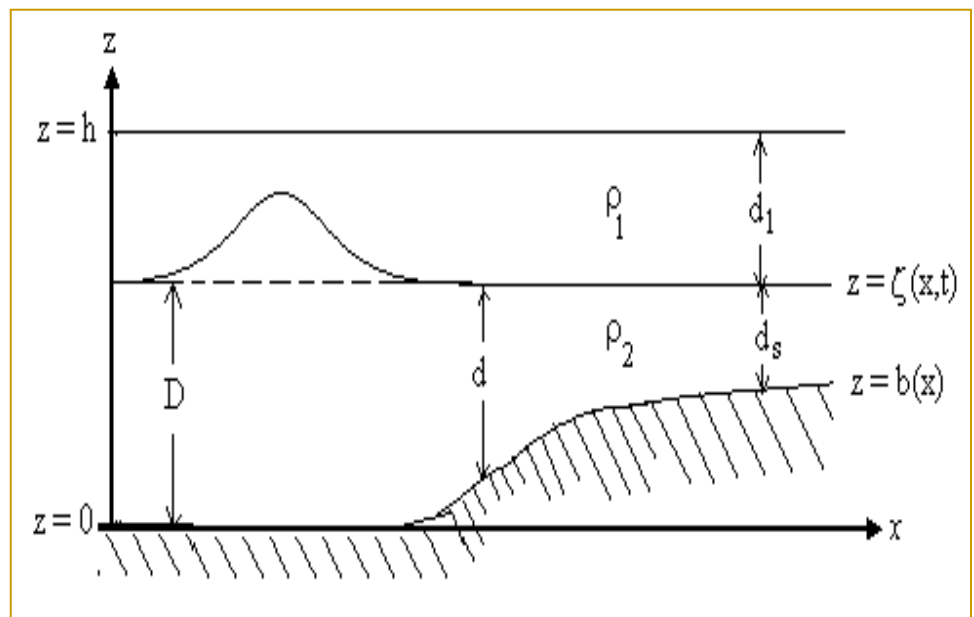
Volume 8, No. 1  
Juli 2009



Alamat Redaksi :

Departemen Matematika  
FMIPA – Institut Pertanian Bogor  
Jln. Meranti, Kampus IPB  
Dramaga - Bogor

Phone/Fax: (0251) 8625276  
E-mail: math@ipb.ac.id



*Strong Convergence of a Uniform Kernel Estimator for Intensity of a Periodic Poisson Process with Unknow Period*  
I Wayan Mangku

1

*Analisis Ketahanan dan Aplikasinya untuk Pemodelan Interval Kelahiran Anak Pertama*  
Harnanto, H. Sumarno, dan R. Budiarti

11

*Pemantauan Persamaan Model Struktural dalam Data Ordinal*  
B. Suharjo, La Mbau, dan N.K. Kutha Ardana

21

*Proses Fisi Gelombang Soliter Interfacial*  
Jaharuddin

37

*Analisis Model Penyakit Menular dengan Periode Latent dan Relapse*  
A. Kusnanto, P. Sianturi, dan A. Sukanto

45

*Pendugaan Parameter Deret Waktu Hidden Markov Dua Waktu Sebelumnya*  
B. Setiawaty dan S. F. Nikmah

57

*Model Pertumbuhan Ekonomi Antar Kelompok dan Simulasinya*  
A. L. Herliani, E. H. Nugrahani, dan D. C. Lesmana

67

---

Journal of Mathematics and Its Applications

**JMA**

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

---

**PIMPINAN REDAKSI**

Dr. Jaharuddin, MS.

**EDITOR**

Dr. Ir. Sri Nurdianti, MSc.

Dr. Ir. Hadi Sumarno, MS.

Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc.

Dr. Ir. Endar H. Nugrahani, MS.

Dr. Paian Sianturi

**ALAMAT REDAKSI:**

Departemen Matematika

FMIPA – Institut Pertanian Bogor

Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga

Bogor

Phone./Fax: (0251) 625276

Email:math@ipb.ac.id

**JMA** merupakan media yang memuat informasi hasil penelitian matematika baik murni maupun terapan, bagi para matematikawan atau para pengguna matematika. **JMA** diterbitkan dua kali (dua nomor) setiap tahun (periode Juli dan Desember).

Harga langganan per volume, termasuk biaya pos, Vol.8, No.1 dan 2:

Institusi/Perpustakaan Rp. 200.000,- (dalam IPB), Rp. 300.000,- (luar IPB)

Staf/Perorangan Rp. 100.000,- (dalam IPB), Rp.150.000,- (luar IPB)

Mahasiswa Rp. 50.000,-

Penulis makalah yang diterima dikenai biaya administrasi Rp.10.000,- per lembar

Semua pembayaran biaya dapat ditransfer melalui:

**Retno Budiarti**

**BNI Cabang Bogor**

**No. Rek. 000291007-5**

## **TATA CARA PENULISAN MAKALAH**

**JMA** menerima makalah dalam bahasa Indonesia atau bahasa Inggris. Makalah dapat dikirim melalui pos (berupa 2 hard copy beserta disketnya) atau lewat email ke alamat berikut:

**Redaksi JMA**  
**Departemen Matematika**  
**FMIPA – Institut Pertanian Bogor**  
**Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga**  
**Bogor**  
**Phone/Fax: (0251) 625276**  
**Email:math@ipb.ac.id**

Makalah yang orisinal berupa hasil penelitian matematika murni atau terapan mendapat prioritas utama untuk diterima. Tulisan yang bersifat review juga bisa diterima. Makalah akan diseleksi oleh redaksi, dan hasil seleksi akan diinformasikan.

Makalah ditulis dengan LATEX/TEX/MS-WORD dengan kualitas baik, format A4, tidak boleh bolak balik, spasi satu, font 12, margin kiri 4 cm, margin kanan 3 cm. Margin atas dan bawah 4 cm. Maksimum jumlah halaman 20 yang didalamnya termasuk tabel, ilustrasi, dan gambar.

*Judul* makalah dibuat singkat, jelas, dan merepresentasikan isi makalah. Nama penulis diletakkan di bawah judul, diikuti nama instansi (bila ada), dan alamat (termasuk email jika ada).

*Abstrak* diletakkan di bawah nama dan alamat penulis, ditulis tidak melebihi 250 kata, meringkas hasil yang diperoleh dan metode yang digunakan. Di bawah abstrak boleh diletakkan kata kunci. Kata kunci terdiri atas satu kata atau lebih yang merupakan istilah yang paling dominan digunakan dan merupakan istilah yang paling menentukan isi tulisan.

*Acknowledgment/Ungkapan Terima Kasih* ditulis pada akhir tulisan sebelum referensi.

*Referensi/Daftar Pustaka* diletakkan pada akhir tulisan setelah Ungkapan Terima Kasih, penulisan mengikuti pola pada contoh berikut ini dengan pengurutan naik didasarkan abjad huruf pertama pada nama belakang penulis pertama.

- [1] S. Guritman, F. Hooweg, and J. Simonis, "The Degree of Functions and Weights in Linear Codes," *Discrete Applied Mathematics*, vol.111, no. 1, pp. 87-102, 2001
- [2] J.H. van Lint, *Introduction to Coding Theory*, 2<sup>nd</sup> ed. Berlin, Germany, Springer-Verlag, 1992.

*Ilustrasi* atau *Gambar* sedapat mungkin ditempatkan pada badan tulisan mengikuti apa yang diilustrasikan atau yang digambarkan. Jika itu tidak mungkin, boleh juga ditempatkan setelah referensi. Tidak ada ilustrasi atau gambar yang ditulis tangan.

# PROSES FISI GELOMBANG SOLITER INTERFACIAL

JAHARUDDIN

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, IPB  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680 Indonesia

**Abstrak :** Penurunan persamaan gerak bagi gelombang interfacial dilakukan dengan metode asimtotik. Domain fluida yang ditinjau berupa dasar yang tidak rata. Dalam penurunan persamaan gerak diasumsikan bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga. Persamaan gerak yang diperoleh berupa persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Kajian bagi proses fisis gelombang soliter interfacial dilakukan dengan menggunakan persamaan KdV. Grafik yang menyatakan hubungan antara kedalaman fluida dengan perambatan beberapa soliter diberikan.

**Kata kunci:** Persamaan Dasar, Persamaan KdV, dan Gelombang soliter Interfacial.

## 1. PENDAHULUAN

Fluida dua lapisan adalah fluida yang terdiri atas dua lapisan, dan masing-masing lapisan mempunyai rapat massa yang konstan. Persamaan gerak gelombang pada fluida dua lapisan dinyatakan dalam perubahan simpangan gelombang interfacial, yaitu gelombang internal di batas kedua lapisan fluida. Formulasinya yang eksplisit dan sederhana memungkinkan diperolehnya pemahaman masalah gelombang internal. Beberapa penelitian yang dilakukan di laut memberikan suatu data bahwa beberapa perairan dapat didekati dengan fluida dua lapisan, lihat [3].

Salah satu gelombang interfacial yang banyak dipelajari adalah gelombang soliter interfacial, yaitu suatu gelombang interfacial yang merambat dengan bentuk dan kecepatan yang tidak berubah. Di laut, gelombang ini terdeteksi melalui SAR (*Synthetic Aperture Radar*) sebagai pola gelap terang yang tampak teratur (seperti sebuah paket gelombang yang bergerak teratur) di permukaan air laut. Pola ini dipercaya sebagai manifestasi dari gelombang interfacial. Hal ini sesuai dengan hasil pengukuran yang dilakukan oleh Holloway dan Pelinovsky (2001) dalam [4]. Gelombang ini teramati muncul di beberapa tempat, seperti di Laut Andaman (Thailand)[6], dan di laut Sulu (Filipina)[1]. Paket gelombang yang muncul ini merupakan hasil dari proses fisis gelombang soliter interfacial selama terjadinya perambatan gelombang pada dasar yang tidak rata.

Dalam tulisan ini akan dikaji secara matematika proses fisi gelombang soliter interfacial. Untuk itu akan ditinjau fluida yang takmampat (*incompressible*) dan tak kental (*inviscid*) dengan domain fluida dibatasi oleh batas bawah berupa dasar yang tidak rata dan batas atas berupa permukaan yang rata. Penurunan persamaan gerak gelombang dilakukan dengan metode asimtotik [5]. Selain itu, digunakan juga asumsi fluida dangkal, yaitu panjang gelombang internal yang ditinjau jauh lebih besar dari kedalaman fluida. Penurunan persamaan gerak gelombang internal pada dasar yang tidak rata dan kajian proses fisi gelombang internal dengan kerapatan fluida dalam bentuk fungsi eksponensial telah dilakukan oleh Djordjevic dan Redekopp dalam [2]. Selain menurunkan persamaan gerak gelombang interfacial pada fluida dua lapisan, tulisan ini juga akan mengkaji proses fisi gelombang soliter interfacial. Selanjutnya dibahas pula hubungan antara banyaknya gelombang soliter (soliton) yang merambat pada fluida dua lapisan dan parameter perbandingan ketebalan kedua lapisan pada fluida dua lapisan. Grafik hubungan kedua besaran tersebut digambarkan dengan bantuan software MAPLE 12.

## 2. PERSAMAAN GERAK

Untuk memformulasikan model persamaan gerak untuk gelombang interfacial, maka dimulai dengan meninjau suatu fluida takmampat dan takkental dengan permukaan bebas yang rata, dan diukur pada keadaan setimbang di  $z = h$ , dan terbatas di bawah oleh batas kaku yang tidak rata di  $z = b(x)$ . Dimisalkan pula aliran fluida bergerak dalam dua dimensi, yaitu pada arah horizontal  $x$ , dan pada arah vertikal  $z$ . Selain itu, dimisalkan pula  $u$  dan  $w$  masing-masing menyatakan kecepatan partikel fluida dalam arah sumbu  $x$  dan dalam arah sumbu  $z$ . Rapat massa dan tekanan masing-masing dinyatakan oleh  $\rho$  dan  $p$ , sedangkan  $g$  percepatan gravitasi. Persamaan dasar fluida diberikan oleh masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} u_x + w_z &= 0 \\ \rho_t + u\rho_x + w\rho_z &= 0 \\ \rho(u_t + uu_x + wu_z) + p_x &= 0 \\ \rho(w_t + uw_x + ww_z) + p_z + g\rho &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

dengan syarat batas:

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{di } z &= h \\ w &= ub_x & \text{di } z &= b(x) \\ p &= 0 & \text{di } z &= h. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Berikut ini akan diturunkan persamaan gerak gelombang internal dengan metode asimtotik. Oleh karena itu diasumsikan bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga, dimana pengertian panjang dan waktu yang hingga didasarkan pada pemilihan suatu parameter positif  $\varepsilon$  sehingga peubah fisis  $x$  dan  $t$  dapat dituliskan dalam peubah baru berikut:

$$\begin{aligned}\xi &= \varepsilon^{3/2} x \\ \tau &= \varepsilon^{1/2} \left( \int \frac{1}{c(\xi)} d\xi - t \right)\end{aligned}\quad (2.3)$$

dengan  $c$  kecepatan phase gelombang linear. Selanjutnya peubah takbebas dari persamaan dasar (2.1) dan syarat batas (2.2) dinyatakan dalam uraian asimtotik berikut:

$$\begin{aligned}u &= \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \varepsilon^3 U^{(3)} + \dots \\ w &= \varepsilon^{3/2} W^{(1)} + \varepsilon^{5/2} W^{(2)} + \varepsilon^{7/2} W^{(3)} + \dots \\ p &= \varepsilon P^{(1)} + \varepsilon^2 P^{(2)} + \varepsilon^3 P^{(3)} + \dots \\ \rho &= \rho_o + \varepsilon \rho^{(1)} + \varepsilon^2 \rho^{(2)} + \varepsilon^3 \rho^{(3)} + \dots\end{aligned}\quad (2.4)$$

yang masing-masing bergantung pada peubah  $\xi$ ,  $z$ , dan  $\tau$ , sedangkan  $\rho_o(z)$  menyatakan rapat massa fluida dalam keadaan setimbang. Jika persamaan (2.4) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.1) dan syarat batas (2.2), maka koefisien  $\varepsilon$  dan  $\varepsilon^{3/2}$  memberikan masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} U_\tau^{(1)} + W_z^{(1)} &= 0 \\ -\rho_\tau^{(1)} + \rho_{oz} W^{(1)} &= 0 \\ -\rho_o U_\tau^{(1)} + \frac{1}{c} P_\tau^{(1)} &= 0 \\ P_z^{(1)} + \rho^{(1)} &= 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

dengan syarat batas:

$$W^{(1)} = 0, \quad \text{di } z = h \text{ dan } z = b(\xi). \quad (2.6)$$

Koefisien  $\varepsilon^2$  dan  $\varepsilon^{5/2}$  memberikan masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c} U_\tau^{(2)} + W_z^{(2)} &= -N_1 \\ -\rho_\tau^{(2)} + \rho_{oz} W^{(2)} &= -N_2 \\ -\rho_o U_\tau^{(2)} + \frac{1}{c} P_\tau^{(2)} &= -N_3 \\ P_z^{(2)} + \rho^{(2)} &= N_4,\end{aligned}\quad (2.7)$$

dengan syarat batas:

$$\begin{aligned}W^{(2)} &= 0, & \text{di } z = h \\ W^{(2)} &= U^{(1)} b_\xi, & \text{di } z = b(\xi).\end{aligned}\quad (2.8)$$

dimana

$$\begin{aligned}N_1 &= U_\xi^{(1)} \\ N_2 &= \frac{1}{c} U^{(1)} \rho_\tau^{(1)} + W^{(1)} \rho_z^{(1)} \\ N_3 &= \left( \frac{1}{c} \rho_o U^{(1)} - \rho^{(1)} \right) U_\tau^{(1)} + \rho_o W^{(1)} U_z^{(1)} + P_\xi^{(1)} \\ N_4 &= \rho_o W_\tau^{(1)}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Berdasarkan persamaan (2.5) dan (2.6), diperoleh masalah nilai batas untuk  $W^{(1)}$  berikut:

$$\begin{aligned} (c^2 \rho_o W^{(1)}_z)_z - \rho_{oz} W^{(1)} &= 0, \\ W^{(1)} &= 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Dengan metode pemisahan variabel, penyelesaian masalah nilai batas (2.10) dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$W^{(1)} = A_\tau(\xi, \tau) \phi(z) \quad (2.11)$$

dengan  $A(\xi, \tau)$  adalah fungsi sembarang yang akan ditentukan, sedangkan  $\phi(z)$  memenuhi masalah nilai batas berikut:

$$\begin{aligned} [c^2 \rho_o \phi_z]_z - \rho_{oz} \phi &= 0 \\ \phi &= 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Masalah nilai batas untuk  $W^{(2)}$  diperoleh dari persamaan (2.7) dan (2.8), yaitu

$$\begin{aligned} [c^2 \rho_o W^{(2)}_z]_z - \rho_{oz} W^{(2)} &= N \\ W^{(2)} &= 0 \quad \text{di } z = h \quad \text{dan di } z = b(\xi), \end{aligned} \quad (4.13)$$

dengan

$$\begin{aligned} N &= -\left(\frac{1}{c} N_3 + \rho_o N_1\right)_z + \left(\frac{1}{c^2} (N_2 - N_{4\tau})\right) \\ R &= U^{(1)} b_\xi. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Dengan demikian diperoleh dua masalah nilai batas untuk  $\phi(z)$  dan  $W^{(2)}$  yang masing-masing diberikan pada persamaan (2.12) dan (2.13). Masalah nilai batas (2.13) memiliki penyelesaian, jika memenuhi kondisi terselesaikan berikut:

$$\int_b^h (\phi L W^{(2)}) dz = c^2 \rho_o (\phi W^{(2)}_z - W^{(2)} \phi_z) \Big|_{z=b}^{z=h} \quad (2.15)$$

dengan operator L berikut:

$$L = \frac{\partial}{\partial z} \left[ (c^2 \rho_o) \frac{\partial}{\partial z} \right] - \rho_{oz}$$

Berdasarkan persamaan (2.15) dapat ditentukan persamaan untuk  $A(\xi, \tau)$  yang merupakan persamaan gerak gelombang internal. Selanjutnya, dimisalkan simpangan gelombang internal pada kedalaman  $z$  dinyatakan oleh  $\varsigma(\xi, z, \tau)$ . Karena  $W^{(1)}$  menyatakan kecepatan partikel fluida dalam arah horizontal dan dirumuskan dalam persamaan (2.11), yaitu  $W^{(1)} = A_\tau(\xi, \tau) \phi(z)$ , maka

$$\varsigma = \varepsilon A(\xi, \tau) \phi(z) + \varepsilon^2 \varsigma^{(2)} + \varepsilon^3 \varsigma^{(3)} + \dots$$

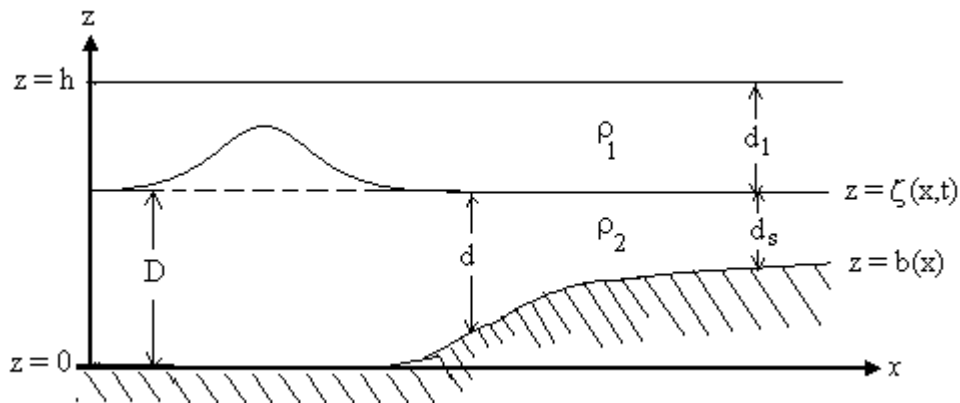
Pada fluida dua lapisan di interface (batas kedua lapisan fluida) diasumsikan  $\phi = 1$  sehingga simpangan gelombang interfacial pada orde pertama adalah fungsi  $A(\xi, \tau)$ . Pada bagian berikut akan dibahas persamaan untuk  $A(\xi, \tau)$  pada fluida dua lapisan. Kemudian berdasarkan persamaan untuk  $A(\xi, \tau)$  tersebut akan dikaji proses fisis gelombang soliter interfacial.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini akan dibahas proses fisis gelombang interfacial. Gelombang soliter interfacial adalah gelombang soliter yang terjadi di batas antara kedua lapisan fluida pada fluida dua lapisan. Penurunan persamaan gerak gelombang interfacial dilakukan dengan memisalkan rapat massa fluida dua lapisan yang ditinjau berbentuk:

$$\rho_o(z) = \begin{cases} \rho_2 & , b(x) \leq z \leq 0 \\ \rho_1 & , 0 < z \leq h. \end{cases} \quad (3.1)$$

Misalkan  $h$  total kedalaman fluida, dan ketebalan lapisan atas adalah  $d_1$ . Pada lapisan bawah dibatasi oleh kurva  $z = b(x)$  dengan ketebalan yang bervariasi, yakni mulai dari perairan dangkal dengan ketebalan konstan  $d_s$  kemudian bervariasi dengan ketebalan  $d(x)$  lalu ke perairan yang dalam dengan ketebalan konstan  $D$ . Domain fluida dua lapisan tersebut diberikan dalam Gambar 1.



Gambar 1. Domain fluida dua lapisan

Jika kondisi fisis fluida dua lapisan  $\rho_o$  pada persamaan (3.1) disubstitusikan ke dalam persamaan (2.15), maka diperoleh persamaan untuk  $A(\xi, \tau)$  berikut:

$$\frac{1}{4} \frac{d'}{d} \frac{\rho_2 d_1}{\rho_1 d + \rho_2 d_1} A + A_{\xi\xi} + \frac{3c(\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d^2)}{2(d_1 d)^2} A A_{\tau} + \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d}{6c} A_{\tau\tau\tau} = 0 \quad (3.2)$$

dengan kecepatan phase  $c$  memenuhi persamaan berikut:

$$c^2 = \frac{d_1 d}{\rho_1 d + \rho_2 d_1}.$$

Selanjutnya diperkenalkan transformasi berikut:

$$A(\xi, \tau) = f(\xi) \eta(\xi, \tau),$$

dengan

$$f(\xi) = \sqrt[4]{\frac{\rho_1 d(\xi) + \rho_2 d_1}{d(\xi)}},$$

maka persamaan (3.2) menjadi:



$$\eta_{\xi} + \mu\eta\eta_{\tau} + \lambda\eta_{\tau\tau} = 0 \quad (3.3)$$

dengan koefisien variabel berbentuk:

$$\mu = \frac{3}{2} \frac{f}{cd_1d} \frac{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d^2}{\rho_2 d_1 + \rho_1 d^2}, \quad \lambda = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 d}{6c}$$

Persamaan (3.3) merupakan persamaan Korteweg-de Vries (KdV) dengan koefisien bergantung pada variabel  $\xi$ . Penyelesaian gelombang soliter interfacial dari persamaan KdV (3.3) berbentuk:

$$\eta(\xi, \tau) = a \operatorname{sech}^2 \beta(\tau - \xi / c_1)$$

dengan

$$c_1 = \frac{\mu a}{3} \quad \text{dan} \quad \beta^2 =$$

Gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilamana  $\mu > 0$  dan berupa depresi bilamana  $\mu < 0$ . Untuk kasus  $d$  konstan, gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilamana  $\rho_2 d_1^2 > \rho_1 d^2$ , dan berupa depresi bilamana  $\rho_2 d_1^2 < \rho_1 d^2$ . Dengan demikian gelombang soliter interfacial berupa elevasi bilamana perbedaan rapat massa kedua lapisan cukup kecil. Persamaan (3.3) tersebut akan digunakan untuk mengkaji proses fisis gelombang soliter interfacial. Selanjutnya gelombang interfacial yang memiliki sejumlah  $N$  gelombang soliter (soliton) dinyatakan dalam bentuk:

$$\eta(\xi, \tau) = N(N+1) \operatorname{sech}^2 \beta(\tau - \xi / c_1).$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3), maka hubungan antara banyaknya soliton dan ketebalan dari setiap lapisan fluida dapat dinyatakan dalam bentuk berikut:

$$\frac{N(N+1)}{2} = \frac{\rho_1 d_1 + \rho_2 D}{\rho_1 d_1 + \rho_2 d_s} \frac{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 d_s^2}{\rho_2 d_1^2 - \rho_1 D^2} \left( \frac{D}{d_s} \right)^{5/4} \left( \frac{\rho_1 D + \rho_2 d_1}{\rho_1 d_s + \rho_2 d_1} \right)^{3/4} \quad (3.4)$$

Selanjutnya didefinisikan besaran berikut:

$$\delta = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}, \quad D_{\infty} = \frac{d_1}{D}, \quad H = \frac{d_s}{D}$$

maka persamaan (3.4) menjadi

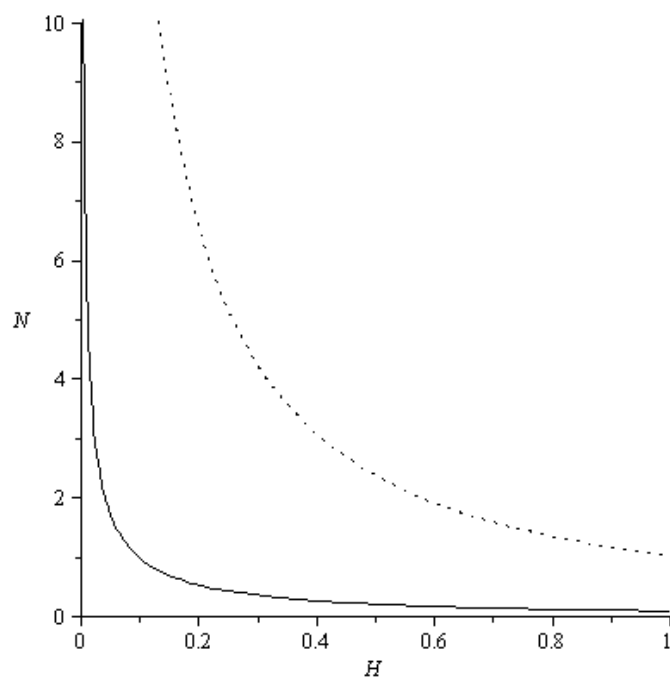
$$\frac{N(N+1)}{2} = H^{-5/4} \frac{(1+\delta) + D_{\infty}}{(1+\delta)H + D_{\infty}} \cdot \frac{D_{\infty}^2(1+\delta) - H^2}{D_{\infty}^2(1+\delta) - 1} \left( \frac{D_{\infty}(1+\delta) + 1}{D_{\infty}(1+\delta) + H} \right)^{3/4} \quad (3.5)$$

Jika diasumsikan bahwa rapat massa lapisan bawah  $\rho_2$  mendekati rapat massa lapisan atas  $\rho_1$ , maka  $\delta \ll 1$  sehingga orde pertama uraian deret Taylor dari ruas kanan persamaan (3.5) terhadap  $\delta$  di sekitar  $\delta = 0$  memberikan persamaan berikut:

$$\frac{N(N+1)}{2} = H^{-5/4} \frac{H - D_{\infty}}{1 - D_{\infty}} \left( \frac{D_{\infty} + 1}{D_{\infty} + H} \right)^{3/4} \quad (3.6)$$

Persamaan (3.5) merupakan persamaan yang akan digunakan untuk mengkaji fisis gelombang soliter. Besaran  $D_\infty$  menyatakan perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dalam dan ketebalan lapisan atas, sedangkan besaran  $H$  menyatakan perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Untuk kasus  $D_\infty \gg 1$  diperoleh bahwa fungsi  $N(N+1)/2$  mendekati fungsi  $H^{-5/4}$ , sedangkan untuk kasus  $D_\infty \ll 1$ , fungsi  $N(N+1)/2$  mendekati fungsi  $H^{-1}$ .

Gambar 3 berikut ini menunjukkan pengaruh besaran  $H$  terhadap banyaknya gelombang soliter untuk kasus  $D_\infty \gg 1$  dan  $D_\infty \ll 1$ .



Gambar 3 Hubungan antara banyaknya soliton dan  $H$  untuk kasus  $D_\infty \ll 1$  (garis putus-putus), dan  $D_\infty \gg 1$  (garis utuh)

Untuk kasus  $D_\infty \gg 1$ , proses fisis terjadi bilamana besaran  $H$  sangat kecil. Untuk kasus  $D_\infty \ll 1$ , suatu gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi dua gelombang soliter ( $N=2$ ) bilamana besaran  $H=0,57$  yang dihitung berdasarkan persamaan (3.6), atau dapat dilihat dalam Gambar 3. Selain itu, pada kasus ini untuk  $H=0,31$  dan  $H=0,16$  berturut-turut diperoleh bahwa gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi empat dan delapan gelombang soliter. Dengan demikian apabila lapisan atas lebih tipis dibandingkan dengan lapisan di bawahnya, maka peningkatan fisis gelombang soliter interfacial bergantung pada  $H$ , yaitu perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Semakin kecil nilai  $H$ , semakin banyak gelombang soliter yang terjadi.

#### 4. KESIMPULAN

Penurunan persamaan gerak gelombang pada fluida dua lapisan dengan batas bawah berupa dasar tidak rata-rata dilakukan dengan metode asimtotik. Dalam metode asimtotik ini, digunakan parameter yang didefinisikan berdasarkan asumsi bahwa gelombang yang ditinjau mempunyai panjang gelombang yang cukup panjang dan pengamatan dilakukan dalam waktu yang hingga. Persamaan gerak gelombang interfacial yang diperoleh berupa persamaan KdV dengan koefisien bergantung pada variabel. Persamaan KdV yang dihasilkan sesuai untuk mengkaji proses fisis gelombang soliter interfacial. Hubungan antara banyaknya gelombang soliter (soliton) yang merambat pada fluida dua lapisan dan parameter perbandingan ketebalan kedua lapisan pada fluida dua lapisan diperoleh dengan bantuan software MAPLE 12.

Jika kasus ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dalam lebih besar dari ketebalan lapisan atas, maka fungsi  $N(N+1)/2$  dengan  $N$  banyaknya gelombang soliter mendekati fungsi  $H^{-5/4}$  dimana  $H$  menyatakan perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Sebaliknya, jika kasus ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dalam lebih tipis dari ketebalan lapisan atas, maka fungsi  $N(N+1)/2$  mendekati fungsi  $H^{-1}$ . Pada kasus pertama, proses fisis terjadi bilamana besaran  $H$  sangat kecil. Sedangkan pada kasus kedua, suatu gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi dua gelombang soliter, bilamana besaran  $H = 0,57$ . Selain itu, pada kasus ini untuk  $H = 0,31$  dan  $H = 0,16$  berturut-turut diperoleh bahwa gelombang soliter interfacial akan mengalami fisis menjadi empat dan delapan gelombang soliter. Jadi, apabila lapisan atas lebih tipis dibandingkan dengan lapisan di bawahnya, maka peningkatan fisis gelombang soliter interfacial bergantung pada  $H$ , yaitu perbandingan antara ketebalan lapisan bawah yang menuju perairan dangkal dan perairan dalam. Semakin kecil nilai  $H$ , semakin banyak gelombang soliter yang terjadi.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1]. **Apel, J.R., J.Holbrook, A.K. Liu, J.J.Tsai.** 1985. The Sulu Sea Internal Soliton Experiment. *J. Phys. Oceanography*, **15**: 1625-1651.
- [2]. **Djordjevic, V.D., L.G. Redekopp.** 1978. The Fission and Disintegration of Internal Solitary Waves Moving over Two-Dimensional Topography. *J. Phys. Oceanography*, **8**: 1016-1024..
- [3]. **Gerkema, T.** 1994. *Nonlinear Dispersive Internal Tides: Generation Model For a Rotating Ocean*. Ph.D-Thesis, Univ. of Utrecht, The Netherlands.
- [4]. **Holloway, P., E. Pelinovsky.** 2001. Internal Tides Transformation and Oceanic Internal Solitary Waves, dalam *Stratified Flows*, Bab 2, Grimshaw, R. Editor, Kluwer. Dordrecht, 29-59.
- [5]. **Hinch, E.J.** 1992. *Perturbation Methods*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [6]. **Osborne, A.R., T.L. Burch.** 1980. Internal Solitons in the Andaman Sea, *Science*, **208**: 451-460.