

## MASALAH GALAT PENJEJAKAN MINIMUM PADA SISTEM PENDULUM TERBALIK

TONI BAKHTIAR

Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
JI Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

**Abstract:** *This paper studies the optimal tracking error control problem on an inverted pendulum model. We characterize the optimal tracking error in term of pendulum's parameters. Particularly, we derive the closed form expression for the pendulum length which gives minimum error. It is shown that the minimum error can always be accomplished as long as the ratio between the mass of the pendulum and that of the cart satisfies a certain constancy, regardless the type of material we use for the pendulum.*

**Key words:** *Inverted pendulum system, tracking error, optimal pendulum length.*

### 1. PENDAHULUAN

Ingatkah ketika masih kanak-kanak kita mencoba menegakkan dan menyeimbangkan sebuah gagang sapu, penggaris kayu, atau raket bulutangkis di ujung jari? Kita berusaha terus-menerus menyesuaikan posisi tangan agar benda tersebut tetap tegak. Pendulum terbalik pada dasarnya memiliki konsep yang sama dengan percobaan sederhana tersebut. Hanya saja pendulum terbalik bergerak dalam satu dimensi sementara tangan kita dapat bergerak bebas ke segala arah.

Dewasa ini pendulum biasa (*direct pendulum*) maupun pendulum terbalik (*inverted pendulum*) merupakan alat yang sangat penting dalam pendidikan dan penelitian di bidang teknik pengendalian (*control engineering*). Sistem pendulum memiliki karakteristik berikut: taklinear dan takstabil, dapat dilinearkan di sekitar titik kesetimbangan, kompleksitasnya dapat ditingkatkan melalui penambahan pendulum atau modifikasi lainnya, dan mudah diterapkan dalam sistem aktual. Karena kelebihan di atas berbagai teori pengendalian (*control theory*) banyak dievaluasi dan dibandingkan melalui pengujian sistem pendulum. Banyak hasil penelitian dicapai melalui studi terhadap sistem pendulum. Di bidang teknik, pendulum biasa dan terbalik dipakai untuk memantau pergerakan fondasi bendungan, jembatan, dermaga, dan struktur bangunan lainnya. Alat pengangkat peti kemas (*cranes*) bekerja atas dasar pendulum biasa. Selain itu, pendulum terbalik dapat dimanfaatkan untuk mendeteksi usikan gelombang seismik dalam tanah yang diakibatkan oleh aktivitas seismik-

makro, oseanik, dan atmosferik [7]. Di bidang psikologi dan ilmu olahraga, prinsip kerja pendulum terbalik banyak digunakan untuk mengkaji keseimbangan gerak manusia [4,5,6].

Kajian terhadap aspek teoretis sistem pendulum pun banyak dilakukan. Sebagai contoh, di [1] dipelajari masalah kestabilan asimtotik sistem pendulum dengan menggunakan umpanbalik posisi (*position feedback*), sedangkan di [9] dikaji kendala-kendala fundamental dalam pengendalian sistem pendulum terbalik dengan dua-input dan dua-output (*two-input two-output/TITO*).

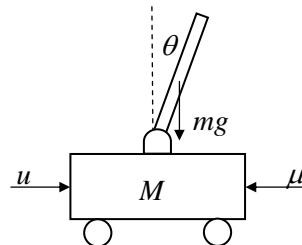
Tulisan ini bertujuan mengidentifikasi beberapa parameter yang mempengaruhi kestabilan sistem pendulum terbalik pada masalah galat penjejak (*tracking error*). Lebih khusus lagi, dalam tulisan ini akan dibahas penentuan panjang pendulum yang memberikan galat penjejak terkecil (*minimum tracking error*).

Organisasi penulisan artikel ini adalah sebagai berikut. Di Bab 2 disampaikan model pendulum terbalik yang menjadi pusat perhatian dan persamaan gerak yang mendasarinya. Di Bab 3 diketengahkan sistem umpanbalik dan masalah galat penjejak yang dikaji. Pembahasan masalah galat penjejak pada sistem pendulum terbalik diberikan di Bab 4. Di bab ini disajikan juga beberapa hasil simulasi. Kesimpulan diberikan di Bab 5.

## 2. SISTEM PENDULUM TERBALIK

Dalam penelitian ini diperhatikan sistem pendulum terbalik seperti pada Gambar 1 di mana sebuah pendulum terbalik dimuat dalam motor yang bisa digerakkan. Diasumsikan motor bergerak dalam satu dimensi, yaitu maju atau mundur dalam satu garis lurus, sedangkan pendulum diasumsikan hanya bergerak dalam bidang vertikal yang datar.

Berat kereta dinotasikan dengan  $M$  dan berat pendulum dengan  $m$ , semuanya dalam kilogram. Panjang pendulum dilambangkan dengan  $2p$  (meter). Pada saat  $t$ , sebuah gaya  $u(t)$  dikenakan pada kereta melalui sebuah motor yang tertempel padanya. Berturut-turut  $x(t)$  dan  $\theta(t)$  menyatakan posisi kereta terhadap titik awal dan sudut yang dibentuk oleh pendulum pada saat  $t$ . Kedua parameter ini diukur oleh potensiometer yang diletakkan di titik pivot dan di roda kereta.



**Gambar 1.** Sistem pendulum terbalik

Masalah pengendalian yang umumnya ditinjau dalam sistem pendulum terbalik adalah menentukan gaya  $u$  melalui sebuah pengendali (*controller*) sedemikian sehingga pendulum tetap tegak sekaligus mengarahkan kereta ke posisi tertentu atau menjaga sudut pendulum tetap kecil. Masalah pertama disebut pengendalian posisi (*position control*) dan masalah kedua disebut pengendalian sudut (*angle control*). Ini adalah masalah yang menarik karena pada dasarnya pendulum adalah sebuah sistem yang takstabil. Dalam konteks ini, gaya  $u$  disebut sebagai input sistem, posisi  $x$  dan sudut  $\theta$  disebut sebagai output-output sistem sehingga dapat membentuk sistem satu-input dua-output (*single-input two-output/SITO*).

Pendulum diasumsikan seragam (*uniform*) sehingga inersianya diberikan oleh  $J = mp^2/3$ . Diasumsikan friksi antara pendulum dengan kereta sebesar  $\eta$  dan friksi antara kereta dan lintasan sebesar  $\mu$ . Jika diasumsikan bahwa sudut yang dibentuk oleh pendulum adalah cukup kecil maka persamaan gerak linear sistem pendulum terbalik diberikan oleh persamaan-persamaan berikut:

$$\begin{aligned}(M + m)\ddot{x} + mp\ddot{\theta} + \mu\dot{x} &= u, \\ \frac{4}{3}mp^2\ddot{\theta} + mp\ddot{x} + \eta\dot{\theta} &= mgp\theta,\end{aligned}\quad (1)$$

dengan  $\dot{x}$  dan  $\ddot{x}$  berturut-turut merupakan turunan pertama dan kedua dari  $x$  terhadap peubah waktu  $t$ , yaitu kecepatan dan percepatan kereta,  $\dot{\theta}$  dan  $\ddot{\theta}$  merupakan kecepatan dan percepatan angular, sedangkan  $g$  adalah konstanta gravitasi.

Sistem persamaan (1) dapat dituliskan dalam bentuk persamaan linear ruang keadaan (*linear state space equation*) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= Az(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cz(t) + Du(t),\end{aligned}$$

dengan  $A, B, C, D$  adalah matriks-matriks bernilai real yang memiliki dimensi yang bersesuaian,  $z$  adalah vektor peubah keadaan (*variable state*),  $y$  adalah output sistem, dan  $u$  adalah input kendali. Hasil transformasi Laplace dari persamaan ruang keadaan di atas adalah

$$\begin{aligned}sZ(s) &= AZ(s) + BU(s), \\ Y(s) &= CZ(s) + DU(s).\end{aligned}$$

Dengan demikian diperoleh fungsi transfer  $P(s)$  yang menghubungkan output sistem  $y$  dengan input kendali  $u$ :

$$P(s) := \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Misalkan  $P(s)$  dapat ditulis menjadi

$$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_ms^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_2s^2 + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$

dengan pembilang  $N(s)$  dan penyebut  $D(s)$  adalah koprime (tidak memiliki faktor persekutuan). Pole  $\rho$  dari sistem  $P$  didefinisikan sebagai akar dari persamaan  $D(s) = 0$ , yaitu  $D(\rho) = 0$ . Zero  $z$  dari sistem  $P$  didefinisikan sebagai akar dari persamaan  $N(s) = 0$ , yaitu  $D(z) = 0$ . Jika  $n > m$  maka sistem  $P$  memiliki sejumlah zero di takhingga.

Seperti diketahui, kestabilan sebuah sistem ditentukan oleh pole-nya. Pole  $\rho$  disebut stabil jika  $\text{Re}(\rho) < 0$  dan disebut takstabil jika  $\text{Re}(\rho) > 0$ . Suatu sistem dikatakan stabil jika ia tidak memiliki pole takstabil. Sementara itu, zero  $z$  disebut stabil jika  $\text{Re}(z) < 0$  dan disebut takstabil jika  $\text{Re}(z) > 0$ . Zero takstabil tidak memiliki keterkaitan dengan kestabilan sistem.

Asumsikan bahwa kereta berawal dari keadaan diam, yaitu  $\dot{x}(0) = 0$  dan  $\ddot{x}(0) = 0$ , sedangkan pendulum berawal dari keadaan diam dan tegak, yaitu berlaku  $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = 0$ , dan  $\ddot{\theta}(0) = 0$ . Dengan menggunakan transformasi Laplace, sistem (1) dapat dinyatakan dalam fungsi-fungsi transfer berikut:

$$P_x(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{4mp^2s^2 + 3\mu s - 3mgp}{s(a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0)},$$

$$P_\theta(s) = \frac{\Theta(s)}{U(s)} = \frac{-3mps}{a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0},$$
(2)

dengan  $a_3 = mp^2(4M + m)$ ,  $a_2 = 3\eta(M + m) + 4\mu mp^2$ ,  $a_1 = 3\eta\mu - 3mgp(M + m)$ , dan  $a_0 = -3\mu mgp$ . Pada persamaan di atas,  $U(s)$ ,  $X(s)$ , dan  $\Theta(s)$  berturut-turut merupakan transformasi Laplace dari  $u(t)$ ,  $x(t)$ , dan  $\theta(t)$ . Dalam hal ini,  $P_x(s)$  merupakan fungsi transfer yang menghubungkan antara gaya  $u$  dan posisi  $x$  sedangkan  $P_\theta(s)$  menghubungkan antara gaya  $u$  dan sudut  $\theta$ . Tulisan ini hanya akan membahas sistem dengan satu-input dan satu-output (*single-input single-output/SISO*) dengan tekanan pada pengendalian posisi.

### 3. SISTEM UMPANBALIK DAN MASALAH GALAT PENJEJAKAN

Istilah umpanbalik (*feedback*) digunakan untuk menjelaskan sebuah situasi di mana dua atau lebih sistem dinamik saling terhubung sedemikian sehingga setiap sistem mempengaruhi sistem lainnya. Sistem umpanbalik memiliki banyak sifat menarik. Salah satunya adalah mampu membuat sistem taksensitif terhadap usikan dari luar.

Sistem umpanbalik paling sederhana melibatkan tiga komponen, yaitu *plant* atau sistem  $P$  yang akan dikendalikan, *controller* atau pengendali  $K$  yang harus didesain sehingga menghasilkan input kendali tertentu, dan sensor  $F$  yang mencatat output sistem  $y$  sebagai umpanbalik (lihat Gambar 2). Pada gambar tersebut,  $r$  merupakan referensi bagi peubah yang akan dikendalikan,  $e$  merupakan galat penjejukan (*tracking error*) antara input referensi dan output sensor, yaitu  $e = r - Fy$ , dan  $d$  merupakan usikan (*disturbance*) yang bersifat eksogen. Dengan demikian,

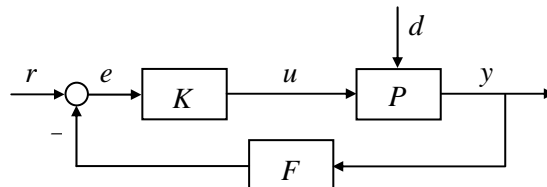
$$u = K(r - Fy). \quad (3)$$

Masalah utama dalam sistem umpanbalik adalah memanipulasi gaya input  $u$  atau dengan kata lain mendesain pengendali  $K$  sedemikian sehingga sistem menjadi stabil. Jika masalah penstabilan dibarengi dengan keinginan untuk menjaga galat penjejukan (*tracking error*) sekecil mungkin maka masalah pengendalian tersebut dikenal sebagai masalah galat penjejukan optimum.

Dalam tulisan ini, ditinjau sistem umpan balik sederhana seperti pada Gambar 2 tetapi dengan  $F(s) = 1$  (umpanbalik satuan),  $d = 0$  (tidak ada usikan dari luar), dan  $r$  merupakan fungsi tangga satuan, yaitu

$$r(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t \geq 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}, \quad R(s) = \frac{1}{s},$$

dengan  $R(s)$  merupakan transformasi Laplace dari  $r(t)$ . Input referensi berupa fungsi tangga satuan menyatakan pada kondisi kesetimbangan, kereta berada pada posisi 1 dari titik awal.



**Gambar 2.** Sistem umpanbalik.

Selanjutnya, masalah galat penjejak optimum didefinisikan sebagai berikut: mendesain pengendali  $K$  yang menstabilkan sistem dan sekaligus meminimumkan fungsi

$$E = \int_0^{\infty} [e(t)]^2 dt = \int_0^{\infty} [r(t) - y(t)]^2 dt. \quad (4)$$

Dengan demikian tingkat kesalahan minimum  $E^*$  dinyatakan sebagai

$$E^* = \inf_{K \in K_s} E, \quad (5)$$

dengan  $K_s$  adalah himpunan semua pengendali yang menstabilkan sistem, dan lazimnya diberikan oleh parameterisasi Youla [8].

Fokus tulisan ini bukanlah pada bentuk pengendali yang optimum  $K^*$  tetapi lebih pada ekspresi analitik dari  $E^*$  yang diberikan dalam bentuk teorema berikut [2].

**Teorema 1.** Misalkan sistem  $P(s)$  memiliki pole takstabil  $\rho_k$  ( $k = 1, \dots, n_\rho$ ) dan zero takstabil  $z_i$  ( $i = 1, \dots, n_z$ ). Ekspresi analitik bagi  $E^*$  pada (5) diberikan oleh

$$E^* = \sum_{i=1}^{n_z} \frac{2 \operatorname{Re}(z_i)}{|z_i|^2} + \sum_{j,k=1}^{n_\rho} \frac{4 \operatorname{Re}(\rho_j) \operatorname{Re}(\rho_k) \bar{\beta}_j \beta_k}{(\bar{\rho}_j + \rho_k) \bar{\rho}_j \rho_k \bar{b}_j b_k}, \quad (6)$$

dengan

$$b_k := \begin{cases} 1 & , \quad n_\rho = 1 \\ \prod_{j \neq k} \frac{\rho_j - \rho_k}{\bar{\rho}_j + \rho_k} & , \quad n_\rho \geq 2 \end{cases}$$

$$\beta_k := 1 - \prod_{i=1}^{n_z} \frac{z_i + \bar{\rho}_k}{z_i - \rho_k}.$$

Teorema 1 memperlihatkan bahwa galat penjejak minimum secara seutuhnya ditentukan oleh keberadaan pole dan zero takstabil. Suku pertama dari ruas kanan (6) merupakan efek dari zero takstabil terhadap galat penjejak sedangkan suku kedua merupakan efek dari interaksi antara zero dan pole takstabil. Secara sepintas dapat dikatakan bahwa zero takstabil yang berlokasi dekat dengan titik 0 memberikan efek yang sangat besar pada galat penjejak.

#### 4. PEMBAHASAN

Untuk menyederhanakan ekspresi matematika, diasumsikan tidak ada friksi-friksi antara kereta dan lintasan dan antara kereta dan pendulum, yaitu  $\eta = \mu = 0$ . Dengan demikian fungsi transfer  $P_x(s)$  di (2) berubah menjadi

$$P_x(s) = \frac{4mp^2s^2 - 3mgs}{s^2(mp^2(4M + m)s^2 - 3mgs(M + m))}.$$

Fungsi transfer di atas memiliki sebuah pole takstabil  $\rho$  dan sebuah zero takstabil  $z$  yang kedua-duanya bernilai real, yaitu

$$\rho = \sqrt{\frac{3g(M + m)}{p(4M + m)}}, \quad z = \sqrt{\frac{3g}{4p}}. \quad (7)$$

Dengan hanya terdapat satu pole takstabil dan satu zero takstabil, ekspresi analitik bagi  $E^*$  pada (6) tereduksi menjadi

$$E^* = \frac{1}{z} + \frac{2}{\rho} \left( 1 - \frac{z + \rho}{z - \rho} \right)^2.$$

Selanjutnya nilai  $\rho$  dan  $z$  pada (7) disubstitusikan ke dalam ekspresi di atas sehingga diperoleh

$$E^* = 4 \sqrt{\frac{p}{3g}} \left[ \frac{2\sqrt{M+m} + \sqrt{4M+m}}{2\sqrt{M+m} - \sqrt{4M+m}} \right]^2. \quad (8)$$

Jika diasumsikan bahwa rasio antara massa dan panjang pendulum adalah konstan, yaitu berlaku  $m = \phi p$  dengan  $\phi$  konstan, maka  $\phi$  dapat dipandang sebagai koefisien ‘panjang jenis’ bahan pembuat pendulum, sehingga  $E^*$  merupakan fungsi dari  $m$ , yaitu

$$E^*(m) = 4 \sqrt{\frac{m}{3g\phi}} \left[ \frac{2\sqrt{M+m} + \sqrt{4M+m}}{2\sqrt{M+m} - \sqrt{4M+m}} \right]^2.$$

Dengan menganggap massa kereta  $M$  adalah konstan dan massa pendulum  $m$  adalah variabel maka  $E^*$  minimum akan diperoleh dengan menyelesaikan  $dE^*(m)/dm = 0$ , yaitu

$$\frac{6\sqrt{m}}{\sqrt{3g\phi}} \frac{(2\sqrt{M+m} + \sqrt{4M+m})(\sqrt{(M+m)(4M+m)} - 8M)}{(2\sqrt{M+m} + \sqrt{4M+m})^3 \sqrt{(M+m)(4M+m)}} = 0.$$

Karena semua parameter yang terlibat bernilai positif maka persamaan di atas terpenuhi jika dan hanya jika

$$\sqrt{(M+m)(4M+m)} - 8M = 0,$$

yang ekuivalen dengan persamaan kuadrat berikut:

$$m^2 + 5Mm - 60M^2 = 0.$$

Dengan menyelesaikan persamaan kuadrat di atas diperoleh penyelesaian bagi  $m$ , yaitu

$$m^* = \frac{(\sqrt{265} - 5)M}{2} \Leftrightarrow p^* = \frac{(\sqrt{265} - 5)M}{2\phi}. \quad (9)$$

Dari persamaan (9) dapat dilihat bahwa panjang pendulum optimum  $p^*$  dapat diperpendek dengan cara mengurangi massa kereta atau dengan memilih pendulum yang terbuat dari bahan dengan ‘panjang jenis’ lebih besar. Lebih lanjut perhatikan bahwa persamaan di atas dapat dituliskan menjadi

$$\frac{m^*}{M} = \frac{\sqrt{265} - 5}{2} \approx 5.6394, \quad (10)$$

yang menyatakan bahwa galat penjejakan minimum selalu dapat dicapai asalkan rasio antara massa pendulum dan massa kereta berada di sekitar 5.6394.

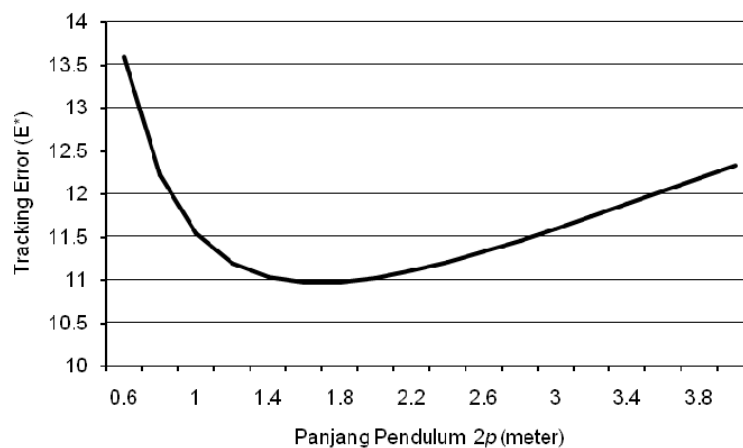
Selanjutnya akan disampaikan sebuah contoh ilustratif sederhana. Tinjau sebuah pendulum berbentuk silinder dengan panjang  $2p$  dan terbuat dari bahan tertentu. Alas silinder memiliki diameter 1 cm. Diketahui bahwa bahan pendulum memiliki massa jenis (*density*) sebesar  $42900 \text{ kg/m}^3$ . Dengan mengingat bahwa massa jenis adalah rasio antara massa dan volume, maka diperoleh ‘panjang jenis’ bahan sebesar  $\phi = 2.145\pi \text{ kg/m}$ . Gambar di bawah menunjukkan hubungan antara galat penjejakan minimum dan panjang pendulum ketika massa kereta  $M$  ditetapkan 1 kg.

Gambar 3 memperlihatkan besarnya galat penjejak  $E^*$  dengan berbagai variasi panjang pendulum yang dihitung dengan menggunakan rumus (8). Terlihat bahwa  $E^*$  minimum dicapai pada saat panjang pendulum 1.67 meter. Pendulum yang lebih pendek atau lebih panjang memberikan galat penjejak yang lebih besar.

## 5. KESIMPULAN

Dalam tulisan ini sudah dikaji penerapan masalah galat penjejak pada sistem pendulum terbalik. Sudah ditunjukkan bahwa galat penjejak minimum selalu dapat dicapai asalkan rasio antara massa pendulum dan massa kereta memenuhi suatu konstanta tertentu, lepas dari bahan apa pendulum dibuat. Dari hasil ini dapat ditentukan panjang pendulum yang memberikan galat penjejak paling kecil.

Hasil ini dapat dikembangkan pada sistem pendulum lain seperti pendulum ganda, pendulum dual, pendulum dengan lintasan miring, atau sistem mekanik lainnya. Pengembangan dapat juga diarahkan ke masalah galat penjejak dengan input kendali terbatas.



**Gambar 3.** Hubungan antara panjang pendulum dan galat penjejak.

## DAFTAR PUSTAKA

- [1] **Atay FM.** 1999. Balancing the inverted pendulum using position feedback. *App. Math. Lett.*, vol. 12, 51–56.
- [2] **Chen J, Hara S, & Chen G.** 2003. Best tracking and regulation performance under control energy constraint. *IEEE T. Automat. Contr.*, vol. 48, no. 8, 1320–1336.
- [3] **Hara S & Kogure C.** 2003. Relationship between  $H_2$  control performance limits and RHP pole/zero locations. Proc. 2003 SICE Annual Conference, Fukui, Japan, 1242–1246.
- [4] **Loram ID & Lakie M.** 2002. Human balancing of an inverted pendulum: position control by small, ballistic-like, throw and catch movements. *J. Physiol.*, 540.3, 1111–1124.
- [5] **Loram ID, Gawthrop PJ & Lakie M.** 2006. The frequency of human, manual adjustments in balancing an inverted pendulum is constrained by intrinsic physiological factors. *J. Physiol.*, 577.1, 417–432.
- [6] **Loram ID, Kelly SM & Lakie M.** 2001. Human balancing of an inverted pendulum: is sway size controlled by ankle impedance? *J. Physiol.*, 532.3, 879–891.
- [7] **Taurasi I.** 2005. *Inverted Pendulum Studies for Seismic Attenuation*. SURF Final Report LIGO T060048-00-R, California Institute of Technology, USA.

- [8] **Vidyasagar M.** 1985. *Control System Synthesis: A Factorization Approach*. Cambridge, MA: MIT Press.
- [9] **Woodyatt AR, Middleton RH & Freudenberg JS.** 1997. *Fundamental Constraints for the Inverted Pendulum Problem*, Technical Report EE9716, Department of Electrical and Computer Engineering, the University of Newcastle, Australia.