PENDEKATAN NONPARAMETRIK UNTUK ANALISIS TREND PADA RESPONS BINER

NUSAR HAJARISMAN[1], ASEP SAEFUDDIN[2]

Abstrak

Pada saat penelitian lebih difokuskan pada proporsi dari banyaknya 'sukses', $p_i = Y_i/N_i$, maka analisis seringkali dilakukan berdasarkan model sampling untuk proporsi: distribusi binomial. Distribusi statistik sederhana seperti binomial kadang-kadang tidak mampu untuk menggambarkan distribusi sampling dari Y_i atau p_i. Dengan demikian, untuk setiap analisis berdasarkan pada penaksiran parameter dari model binomial (yaitu metode parametrik binomial) akan membawa pada kekeliruan dalam inferensi mengenai efek dari suatu stimulus yang sedang diamati. Dalam makalah ini akan dibahas mengenai suatu alternatif dari model parametrik untuk p_i, yaitu dengan menggunakan metode bebas-distribusi (nonparametrik). Dua buah metode berdasarkan pendekatan nonparametrik untuk keperluan analisis trend yang akan dibahas dalam makalah ini uji Cochran-Armitage dan uji Permutasi.

Kata Kunci: *data biner; devians; distribusi binomial; model linear umum; metode kemungkinan maksimum; uji Cochran-Armitage, uji permutasi; dan statistik Wald.*

1. Pendahuluan

Dalam berbagai bidang penelitian yang menggunakan prosedur statistika, seperti dalam bidang agronomi, pertanian, sosial dan ekonomi, politik, kesehatan, biologi, dan teknik, data yang diamati dibuat pada unit percobaan yang mengambil nilai salah satu dari dua kategori yang mungkin. Sebagai contoh, suatu benih akan berkecambah atau gagal berkecambah di bawah kondisi percobaan tertentu; suatu peralatan listrik yang diproduksi oleh sebuah pabrik elektronik dapat cacat atau tidak cacat; seorang pasien dalam percobaan klinis dapat dinyatakan sembuh atau sakit setelah diberi sejumlah perlakuan; atau serangga dapat dinyatakan bertahan hidup atau mati setelah diberi sejumlah dosis insektisida. Data semacam itu dikatakan sebagai data biner dan dua kategori yang mungkin untuk masing-masing observasi secara umum dinyatakan dengan istilah 'sukses' atau 'gagal'.

Dalam beberapa situasi, penelitian tidak hanya difokuskan pada respons dari satu unit percobaan tertentu (benih, pasien, alat listrik, dan serangga) tetapi pada segugus unit percobaan yang telah diberi perlakuan yang sama. Jadi, misalnya segugus benih dapat dipaparkan pada kondisi yang ditentukan oleh kelembaban dan suhu, kemudian proporsi dari benih yang berkecambah akan dicatat. Demikian juga bagi respons individu dari masing-masing pasien dalam percobaan klinis yang menerima perlakuan sama, serta mempunyai karakteristik yang mirip berdasarkan faktor-faktor demografis (umur atau jenis kelamin), dapat dikombinasikan untuk mendapatkan proporsi dari pasien yang dinyatakan sembuh. Data seperti ini disebut juga sebagai data biner terkelompok (*grouped binary data*) serta mewakili banyaknya peristiwa 'sukses' dari banyaknya unit percobaan yang dilakukan. Respon seperti ini kadang-kadang disebut juga sebagai respons kuantal.

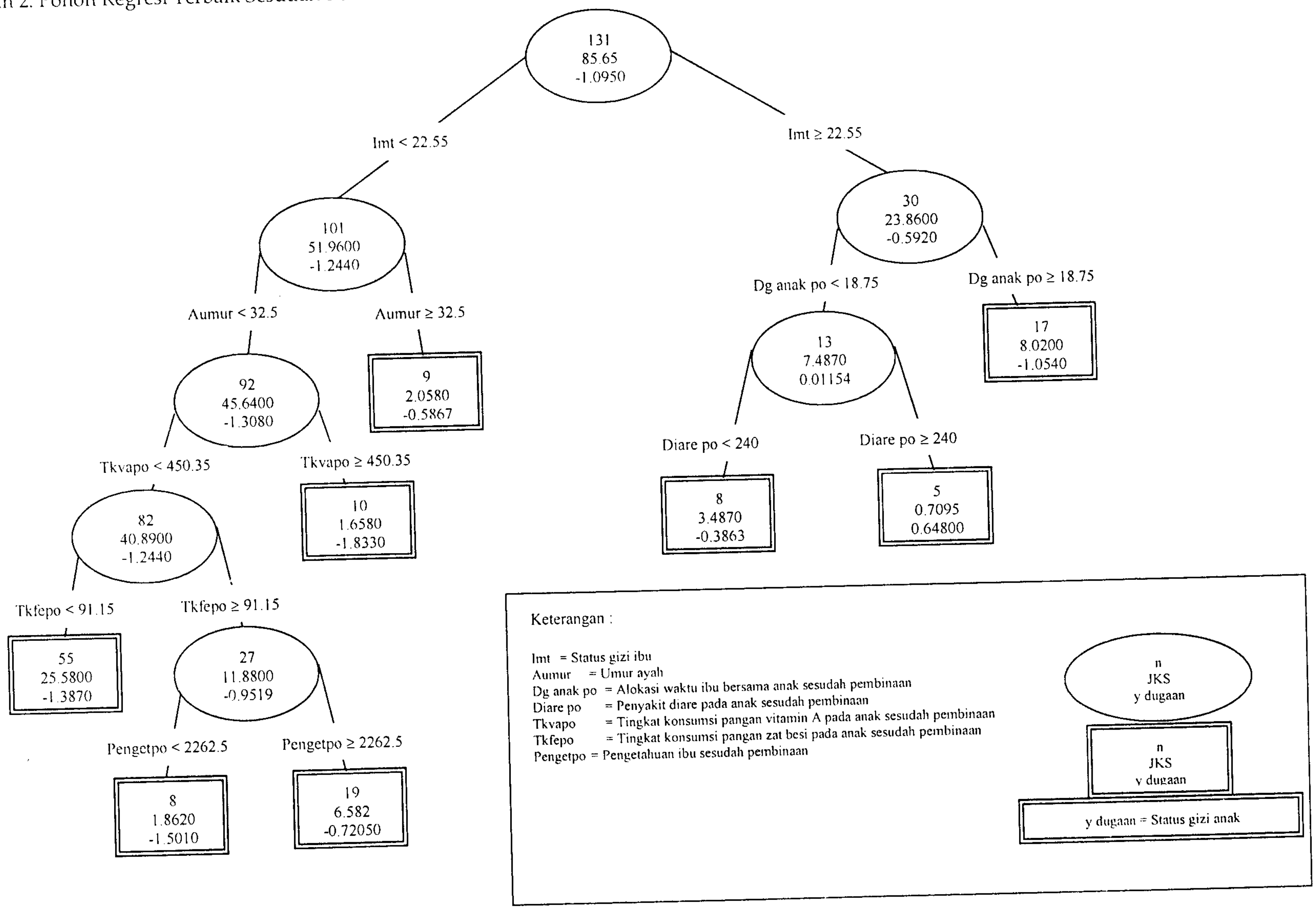
Data berbentuk proporsi seperti ini seringkali dimodelkan dengan menggunakan dengan menggunakan distribusi binomial sedangkan data biner itu sendiri diasumsikan mempunyai distribusi Bernoulli (Collet, 1991). Terdapat beberapa model parametrik yang dapat digunakan untuk memodelkan data respons binomial, diantaranya yaitu: model logistik, model probit, dan model log-log komplementer (Cox, 1971)

Pertanyaan statistik yang paling sederhana yang mungkin muncul dalam analisis respons kuantal adalah apakah terdapat peningkatan atau penurunan yang signifikan dalam respons menurut meningkatnya taraf dari variabel prediktor x_i. Hipotesis nol yang akan diuji adalah H_0: $p_1 = p_2 = \ldots = p_T$ melawan alternatif H_0: $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_T$. Seringkali, salah satu cara untuk menguji hipotesis itu dengan menyatakan fungsi parametrik yang menggambarkan peluang respons sebagai fungsi dari x. Oleh karena harus menggambarkan peluang, maka fungsi tersebut harus berada diantara 0 dan 1. Sebagai contoh, bentuk paramterik yang biasa digunakan p_i sering diasumsikan di bawah sampling binomial adalah fungsi respons logistik:

$$p_i = \frac{1}{1+\exp\left(-\beta_0 - \beta_1 x_i\right)}$$

[1]Dosen Jurusan Statistika, Universitas Islam Bandung
[2]Dosen Jurusan Statistika FMIPA IPB

Lampiran 2. Pohon Regresi Terbaik Sesudah Pembinaan



Perlu dicatat bahwa pada saat $\beta_1 = 0$, peluangnya adalah konstan terhadap x_i, sehingga H_0 diterima. Sebaliknya pada saat $\beta_1 \neq 0$ menunjukkan jauh dari H_0, dan tanda dari β_1 menunjukkan sifat-sifat dari respons: trend meningkat terjadi jika $\beta_1 > 0$, dan trend menurun pada saat $\beta_1 < 0$.

Penaksiran melalui model regresi logistik dilakukan pada saat model dicocokan terhadap data proporsi sehingga diperoleh penaksir $\hat{\beta}_j$ (j = 0, 1), dan juga galat bakunya, katakan $\hat{\sigma}_{\beta_j}$. Metode kemungkinan maksimum digunakan untuk menentukan nilai $\hat{\beta}_j$. Di bawah spesifikasi logistik, fungsi log-kemungkinannya adalah:

$$\ell(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{T}\left\{(Y_i)\log\left[\left(1+\exp\{-\beta_0-\beta_1 x_i\}\right)^{-1}\right]+(n_i-Y_i)\log\left[\left(1+\exp\{\beta_0+\beta_1 x_i\}\right)^{-1}\right]\right\} \quad .....(1)$$

Untuk mendapatkan penaksir kemungkinan maksimum akan dimaksimumkan $l(\beta_0, \beta_1)$ terhadap β_0 dan β_1 dengan jalan menetapkan $\partial l / \partial \beta_j = 0$ (j = 0, 1). Tentu saja tidak diperoleh bentuk persamaan tertutup untuk penaksir kemungkinan maksimum di bawah Persamaan (1), sehingga diperlukan iterasi komputer untuk memperoleh $\hat{\beta}_j$ (Agresti, 1995). Beberapa paket komputer modern seperti SAS (SAS Institute, 1989), S-PLUS (StatSci Division of MathSoft, 1995), atau GLIM (Baker dan Nelder, 1978 dan Aitkins et al, 1989) telah menyediakan fasilitas yang dapat digunakan untuk pemodelan regresi logistik biner. Paket komputer lainnya yang juga sudah menyediakan fasilitas tersebut adalah: SPSS dan MINITAB. Akan tetapi paket komputer seperti SPSS dan MINITAB hanya bisa memodelkan regresi logistik untuk data biner yang tidak terkelompok (*ungrouped binary data*).

Untuk menguji apakah apakah terdapat trend meningkat menurut nilai x_i dapat digunakan statistik uji Wald. Akan tetapi statistik Wald ini merupakan statistik uji yang tidak stabil (Hauck dan Donner, 1977). Pada saat hanya satu parameter yang diamati, $\beta 1$, dan jika nilai dari parameter itu sangat besar (misalnya $|\beta 1| \to \infty$), maka uji Wald pada umumnya tidak mampu untuk mendeteksi peningkatan atau penurunan trend. Sebagai alternatif pada statistik uji Wald adalah suatu pendekatan berdasarkan pada fungsi log-kemungkinan, $l(\beta_0, \beta_1)$, dapat menguji untuk peningkatan atau penurunan trend dalam data proporsi. Statistik ini disebut juga sebagai statistik rasio kemungkinan (*likelihood ratio*, LR).

Sebagaimana yang telah dijelaskan sebelumnya, yaitu pada saat penelitian lebih difokuskan pada proporsi dari banyaknya 'sukses', $p_i = Y_i/N_i$, maka analisis seringkali dilakukan berdasarkan model sampling untuk proporsi: distribusi binomial. Akan tetapi, model sederhana ini tidak cocok dengan baik di bawah sampling per-litter (Haseman dan Kupper, 1979). Selain itu, menurut Haseman dan Piegorsch (1994), distribusi statistik sederhana seperti binomial kadang-kadang tidak mampu untuk menggambarkan distribusi sampling dari Y_i atau p_i. Dengan demikian, untuk setiap analisis berdasarkan pada penaksiran parameter dari model binomial (yaitu metode parametrik binomial) akan membawa pada kekeliruan dalam inferensi mengenai efek dari suatu stimulus yang sedang diamati.

Dalam makalah ini akan dibahas mengenai suatu alternatif dari model parametrik untuk p_i, yaitu dengan menggunakan metode bebas-distribusi (nonparametrik). Dalam metode ini, diasumsikan bahwa tidak ada bentuk parametrik spesifik untuk distribusi sampling dari p_i. Bentuk dasar dari analisis bebas-distribusi ini menyangkut pendekatan menurut peringkat yang menggantikan observasi dengan peringkatnya itu. Analisis berdasarkan pada peringkat yang sudah banyak diketahui adalah uji Mann-Whitney-Wilcoxon untuk perbandingan dua-sampel (Lehmann, 1975). Akan tetapi, di dalam makalah ini akan dibahas mengenai uji Jonckheere-Terpstra untuk peningkatan trend dalam respons (Haseman dan Piegorsch, 1994) serta statistik trend Cochran-Armitage (Piegorsch, 1998).

2. Metode Nonparametrik untuk Analisis Trend

Model regresi logistik dalam Persamaan merupakan salah satu bentuk yang mungkin yang dapat digunakan sebagai model regresi parametrik untuk menguji trend. Model logistik ini merupakan bagian dari kelas yang lebih besar yang dikenal dengan model linear umum (*generalized linear model*, McCullagh dan Nelder, 1989). Pembentukan peluang respons dilakukan melalui fungsi penghubung dari model linear umum $g^{-1}(p_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$. Namun demikian, dalam prakteknya, banyak percobaan dilakukan dimana bentuk parametrik aktual dari fungsi respons g tidak diketahui. Dalam keadaan seperti ini, maka analisis berdasarkan pada fungsi logistik ataupun fungsi lainnya akan memberikan hasil penelitian yang keliru. Pada bagian ini akan dibahas mengenai metode bebas-distribusi untuk menguji peningkatan trend dalam respons biner berbentuk kuantal.

Statistik Trend Cochran Armitage

Jika spesifikasi fungsional parametrik tidak diketahui, maka pengujian untuk peningkatan respons menajdi agak sulit dilakukan. Untuk data dalam bentuk proporsi, pengujian H$_0$: $p_1 = p_2 = \ldots = p_T$ melawan alternatif H$_0$: $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_T$ dapat dilakukan melalui statistik trend Cochran-Armitage (Piegorsch, 1998):

$$Z_{CA} = \frac{\sum_{i=1}^{T}(x_i - \bar{x})Y_i}{\sqrt{\bar{p}\bar{q}\sum_{i=1}^{T} n_i (x_i - \bar{x})^2}} \ldots (2)$$

dimana x_i adalah nilai dari stimulus ke-i, $\bar{x} = \sum_{i=1}^{T} n_i x_i / N$ adalah rata-rata stimulus sampel terboboti, $\bar{p} = \sum_{i=1}^{T} Y_i / N$ adalah proporsi gabungan (dengan mengabaikan nilai x_i), dan $\bar{q} = 1 - \bar{p}$. Statistik uji ini pada dasarnya merupakan regresi terboboti dari $\hat{p}_i$ pada x_i dengan bobotnya adalah $n_i / \bar{p}\bar{q}$ (Piegorsch, 1998).

Untuk sampel besar, maka statistik ini akan mengikuti distribusi normal baku, dimana nilai Z_{CA} bernilai positif (atau negatif) yang besar menunjukkan peningkatan (penurunan) trend yang signifikan secara statistik. Perlu dicatat bahwa perhitungan dari Z_{CA} yang diberikan pada Persamaan (2) mengasumsikan bahwa nilai x_i adalah simetris di sekitar $\bar{x}$. Jika hal ini tidak terjadi, Tarone (1986) memberikan suatu koreksi terhadap kemiringan, yang diukur melalui:

$$\gamma = \frac{(1-2\bar{p})\sqrt{N-1}}{\sqrt{\bar{p}\bar{q}}(N-2)} \frac{m_3}{m_2^{3/2}} \ldots (3)$$

dimana $m_k = \sum_{i=1}^{T} n_i (x_i - \bar{x})^k / N$ (k = 2, 3). Kemudian, hipotesis nol akan ditolak jika $Z_{CA} > z_\alpha + \left[\gamma(z_\alpha^2 - 1)/6\right]$.

Uji Permutasi

Sebagaimana yang telah disebutkan sebelumnya bahwa bentuk dasar dari analisis bebas-distribusi ini menyangkut pendekatan menurut peringkat yang menggantikan observasi dengan peringkatnya itu. Pada saat metode peringkat ini digunakan, akan terdapat asumsi bahwa varians dari proporsi observasi, p_i, adalah ekivalen. Asumsi ini tidak dapat selalu dipenuhi untuk seluruh kasus, dan ini dapat terjadi pada saat terdapat perbedaan yang besar diantara ni. Selain itu, koreksi terhadap metode peringkat sangat disarankan apabila terdapat observasi kembar. Hal ini menjadi masalah karena perhitungan statistik uji ini menjadi sulit jika terlalu banyak observasi kembar. Bentuk dasar dari koreksi seperti itu adalah dengan menggantikan peringkat pada nilai kembar dengan nilai tengah peringkatnya. Artinya untuk dua atau lebih observasi kembar, akan dihitung rata-rata peringkat diantara nilai kembar.

Untuk data berbentuk proporsi, sejumlah metode lainnya dapat digunakan untuk menggambarkan metode bebas-distribusi ini. Daripada melakukan manipulasi peringkat observasi, lebih baik menggunakan aspek statistik lainnya dari data untuk memperoleh inferensi yang baik berkenaan dengan analisis trend ini. Tidak ada asumsi statistik parametrik yang diperlukan. Sebagai contoh, untuk mengidentifikasi adanya peningkatan trend ($p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_T$) untuk data berbentuk proporsi, dimana beberapa skor terurut, x_i, dicatat untuk setiap proporsi. Uji yang akan dibahas berikut ini disebut sebagai uji permutasi. Uji ini akan menyususn kembali data dalam seluruh kombinasi yang mungkin di bawah hipotesis nol tidak ada trend (atau H$_0$: $p_1 = p_2 = \ldots = p_T$).

Untuk sampel besar, pendekatan normalitas dari berbagai statistik uji permutasi sering terpenuhi (Johnson dan Kotz, 1985). Sebagai contoh, perhatikan statistik trend $T_p = \sum_{i=1}^{T} x_i p_i$, dimana $p_i = Y_i/N_i$. Statistik ini mempunyai masing-masing mempunyai rata-rata dan varians sebagai berikut:

$$E[T_p] = \bar{x}\sum_{i=1}^{T} p_i$$

$$Var[T_p] = S_R^2 \left\{\sum_{i=1}^{T} N_i x_i^2 - N\bar{x}^2\right\}$$

dimana $N = \sum_{i=1}^{T} N_i$ adalah total observasi, $\bar{x}$ adalah rata-rata diboboti dari nilai x, yang dinyatakan sebagai:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{T} N_i x_i$$

dan S_p^2 adalah varians sampel dari p_i yang diberikan oleh:

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=1}^{T} p_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{T} p_i\right)^2}{N-1}$$

Statistik dengan sampel besar untuk menguji trend adalah

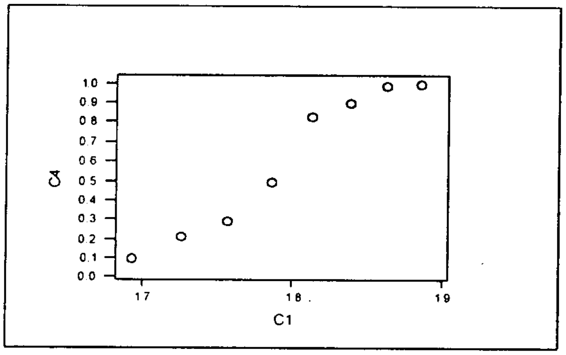
$$Z_p = \frac{T_p - E[T_p]}{\sqrt{Var[T_p]}} \quad (4)$$

Uji satu pihak akan menolak H_0 jika nilai Z_p lebih besar daripada Z_α dari distribusi normal baku. Lockhart (1994) menunjukkan bahwa uji oermutasi untuk trend ini sangat stabil dan mempunyai sensitifitas yang bagus untuk mendeteksi adanya peningkatan trend.

Contoh Numerik

Dalam penelitian tentang *bioassay*, maka variabel responnya bisa bervariasi dengan kovariat berbentuk dosis. Berikut ini akan diberikan suatu contoh tipikal yang menyangkut variabel biner yang diberikan dalam Tabel 1, dimana Y menyatakan banyaknya kumbang yang mati setelah diberi perlakuan semacam zat *carbon disulphide* selama 5 jam dengan berbagai macam konsentrasi (data diambil dari Dobson, 1983). Dalam Gambar 1 menunjukkan hasil plot antara $p_i = Y_i/N_i$ dengan dosis x_i.

Gambar 1. Plot Antara Dosis (x_i) dengan Proporsi Kumbang Mati p_i.



Tabel 1. Data Kematian Kumbang

Dosis x_i (log10 CS2 mgl^{-1}	Banyaknya Serangga N_i	Banyaknya Mati Y_i	Proporsi p_i
1.6907	59	6	0.1017
1.7242	60	13	0.2167
1.7552	62	18	0.2903
1.7842	56	28	0.5000
1.8113	63	52	0.8254
1.8369	59	53	0.8983
1.8610	62	61	0.9893
1.8839	60	60	1.0000

Galat baku dari penaksir b_1 = -60.72 dan b_2 = 34.27 masing-masing adalah $(26.802)^{1/2}$ = 5.18 dan $(8.469)^{1/2}$ = 2.91. Di bawah hipotesis H_0 bahwa model regresi logistik mampu menggambarkan data yang diperoleh, maka devians, D = 11.23, mempunyai pendekatan distribusi χ^2_6, karena terdapat N = 8 kelompok dosis dan p = 2 parameter. Akan tetapi apabila kita bandingkan dengan tabel distribusi chi-kuadrat, maka diperoleh nilai χ^2 sebesar 12.59 pada taraf nyata 5% dan derajat bebas 6. Hal ini berarti bahwa model regresi logistik yang diperoleh tidak cukup baik untuk menggambarkan data kematian kumbang tersebut.

Untuk mengilustrasikan perhitungan Z_{CA} dalam Persamaan (2), perhatikan kembali data yang disajikan dalam Tabel 1. Rata-rata terboboti untuk data tersebut adalah $\bar{x}$ = 1.7938. Terlihat bahwa nilai-nilai x_i berada di sekitar rata-rata terbobotinya, sehingga tidak perlu dilakukan koreksi. Dari data menunjukkan bahwa $\bar{p}$ = 0.605 dan $\bar{q}$ = 0.395. Diperoleh $\sum_{i=1}^{T}(x_i - \bar{x})Y_i$ = 10.196 dan $\sum_{i=1}^{T} n_i (x_i - \bar{x})^2$ = 3255.994. Dengan demikian diperoleh nilai statistik Z_{CA} sebagai berikut:

$$Z_{CA} = \frac{10.196}{\sqrt{(0.605)(0.395)(3255.994)}} = 0.3655.$$

Selanjutnya untuk menghitung statistik Z_p sebagaimana yang ditunjukkan dalam Persamaan (4), diperoleh nilai T_p = 8.8072, dimana rata-rata dan varians untuk T_p ini masing-masing adalah $E[T_p]$ = 8.6397 dan $Var[T_p]$ = 0.0151. Dengan demikian diperoleh nilai statistik Z_p sebagai berikut:

$$Z_p = \frac{8.8072 - 8.6397}{\sqrt{0.0151}} = 1.3620.$$

Dari hasil perhitungan kedua statistik di atas, baik statistik uji Cochran-Armitage (Z_{CA}) maupun statistik uji permutasi (Z_p), menunjukkan bahwa data mengenai proprosi banyaknya kumbang yang mati menurut berbagai ukuran dosis zat tertentu cenderung untuk mendukung hipotesis nol. Artinya, bahwa peningkatan proporsi banyaknya kumbang yang mati menurut meningkatnya dosis zat yang diberikan tidak signifikan secara statistik. Hasil ini sejalan dengan hasil-hasil yang diberikan dalam regresi logistik melalui ukuran devians.

Diskusi

Analisis regresi dan analisis trend untuk data biner merupakan hal yang penting dalam studi mengenai respons kuantal. Makalah ini telah menunjukkan analisis seperti itu, dimulai dengan fungsi regesi logistik yang telah dikenal luas. Di bawah model ini, penaksir kemungkinan maksimum untuk parameter regresi telah tersedia dalam berbagai program komputer. Penaksir (dan galat bakunya) sangat berguna dalam pembentukan selang kepercayaan dan uji signifikansi pada parameter tersebut.

Pada saat bentuk dasar dari fungsi respons tidak diketahui, analisis trend masih mungkin dapat dilakukan dengan menggunakan uji Cochran-Armitage dan uji Permutasi. Uji signifikansi yang telah dibahas di atas mempunyai sifat-sifat optimal, paling tidak dalam hal kesederhanaan dan kemudahannya. Namun perlu ditekankan di sini bahwa seluruh inferensi yang dibahas dalam makalah ini berdasarkan pada argumen sampel besar, dan hanya mendekati untuk setiap ukuran sampel terbatas, N_i. Pendekatan ini akan semakin meningkat sebagaimana meningkatnya N_i. Pada kenyataannya, kualitas dari pendekatan sampel-besar juga bergantung pada rancangan percobaan yang dilakukan, yaitu banyaknya atau alokasi unit percobaan menurut indeks i.

Daftar Pustaka

Agresti, A. (1990). *Categorical Data Analysis*. New York: John Wiley and Sons.

Aitkin, M., D. Anderson, B. Francis, and J. Hinde. (1989). *Statistical Modelling in GLIM*. Oxford: Clorendeon Press.

Baker, R.J., and J.A. Nelder. (1978). *Generalized Linear Interactive Modeling (GLIM)*. Release 3. Oxford: Numerical Algorithms Group.

Collet, D. (1991). *Modeling Binary Data*. London: Chapman and Hall.

Cox, D.R. (1970). *The Analysis of Binary Data*. London: Methuen.

Dobson, A.J. (1983). *Introduction to Statistical Modelling*. London: Chapman and Hall.

Griffiths, D.A. (1973). Maximum Likelihood Estimation for the Beta-Binomial Distribution and An Application to the Household Distribution of the Total Number of Cases of A Disease. *Biometrics*, **29**: 637-648.

Kupper, L.L. and J.K. Haseman (1978). The Use of A Correlated Binomial Model for the Analysis of Certain Toxicological Experiments. *Biometrics*, **34**: 69-76.

Haseman, J.K. and Piegorsch, W.W. (1991). Statistical Methods for Analyzing Developmental Toxicity Data. *Teratogenesis Carcinogen Mutagen*, 11, 115-133.

Hauck, W.W., and A. Donner. (1977). Wald's Test as Applied to Hypotheses in Logit Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 72: 851-853.

Lehman, E.L. (1975). Nonparametrics: *Statistical Methods Based on Ranks*. San Fransisco: Holden-Day.

Lockhart, A.M., Piegorsch, W.W., and Bishop, J.B. (1992). Assessing Overdispersion and Dose-Response in the Male Dominant Lethal Assay. *Mutat Res*, 272, 35-58.

McCullagh, P., and J.A. Nelder (1983). *Generalized Linear Models*. 2nd Ed. New York: Chapman and Hall.

Piegorsch, W.W. (1998) An Introduction to Binary Response Regression and Associated Trend Analyses. *Journal of Quality Technolgy*, **30**, 269-281.

Tarone, R.E. (1979). Testing Goodness of Fit of the Binomial Distribution. *Biometrika*, **66**: 585-590.

SAS Institute (1993). The GENMOD procedure, Release 6.09. *Technical Report P-243, SAS/STAT Software*. SAS Institute, Cary.