

GRAF PEMBAGI NOL MATRIKS SEGITIGA ATAS BERORDO 2 DENGAN ENTRI ANGGOTA $\mathbb{Z}_n$

HAFILAH RIZKA NUHA HIDAYAT



PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA MATEMATIKA DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025



@Hak cipta milik IPB University

IPB University



IPB University
— Bogor Indonesia —

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Perpustakaan IPB University



PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Graf Pembagi Nol Matriks Segitiga Atas Berordo 2 dengan Entri Anggota $\mathbb{Z}_n$ ” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Agustus 2025

Hafilah Rizka Nuha Hidayat
G5401211078



@Hak cipta milik IPB University

IPB University



IPB University
— Bogor Indonesia —

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Perpustakaan IPB University

ABSTRAK

HAFILAH RIZKA NUHA HIDAYAT. Graf Pembagi Nol Matriks Segitiga Atas Berordo 2 dengan Entri Anggota $\mathbb{Z}_n$. Dibimbing oleh TEDUH WULANDARI dan SUGI GURITMAN.

Misalkan $M_2(n)$ merupakan himpunan semua matriks segitiga atas berordo 2 dengan entri anggota $\mathbb{Z}_n$. Pembagi nol dari $M_2(n)$, dinotasikan $Z(M_2(n))$, merupakan elemen tak nol dari $M_2(n)$ yang menghasilkan nol jika dikalikan dengan elemen tak nol lain dari $M_2(n)$. Pembagi nol $Z(M_2(n))$ dapat direpresentasikan ke dalam sebuah graf berarah $\Gamma(M_2(n))$ atau graf tak berarah $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$. Di dalam karya tulis ini, ditunjukkan bahwa graf berarah $\Gamma(M_2(n))$ merupakan graf berarah terhubung, jika $n \geq 2$. Selain itu, untuk graf tak berarah $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$ dengan $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_m^{e_m}$, $m \geq 2$ dan p_i merupakan bilangan prima berbeda ditunjukkan bahwa tidak ada simpul yang *adjacent* dengan semua simpul lain. Sedangkan untuk graf tak berarah $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$ dengan $n = p^k$, dengan p bilangan prima terdapat simpul yang mendominasi.

Kata kunci: digraf, graf, keterhubungan, matriks, pembagi nol

ABSTRACT

HAFILAH RIZKA NUHA HIDAYAT. Zero-divisor Graph of Upper Triangular 2×2 Matrices over $\mathbb{Z}_n$. Supervised by TEDUH WULANDARI and SUGI GURITMAN.

Let $M_2(n)$ denote the set of all upper triangular 2×2 matrices over $\mathbb{Z}_n$. The zero-divisor of $M_2(n)$ denoted by $Z(M_2(n))$, are non-zero elements that annihilate some other non-zero element under matrix multiplication. These zero-divisors can be represented as a directed graph $\Gamma(M_2(n))$ or an undirected graph $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$. This paper demonstrates that for $n \geq 2$, the directed graph $\Gamma(M_2(n))$ is connected. Furthermore, for the undirected graph $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$, we show that when $n = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \dots p_m^{e_m}$ for $m \geq 2$ and p_i are distinct prime number, no vertex is adjacent to all other vertexes. Conversely, when $n = p^k$ for p prime, there exists a dominating vertex that adjacent to every other vertex in $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$.

Keywords: connectivity, digraph, graph, matrix, zero-divisor



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2025
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.

GRAF PEMBAGI NOL MATRIKS SEGITIGA ATAS BERORDO 2 DENGAN ENTRI ANGGOTA $\mathbb{Z}_n$

HAFILAH RIZKA NUHA HIDAYAT

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA MATEMATIKA DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2025**



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Judul Skripsi : Graf Pembagi Nol Matriks Segitiga Atas Berordo 2 dengan Entri Anggota $\mathbb{Z}_n$

Nama : Hafilah Rizka Nuha Hidayat

NIM : G5401211078

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Teduh Wulandari Mas'oed, S.Si., M.Si.



Pembimbing 2:

Dr. Drs. Sugi Guritman



Diketahui oleh

Ketua Program Studi Matematika

Sekolah Sains Data Matematika dan Informatika:

Dr. Donny Citra Lesmana, M.Fin.Math.

NIP. 197902272005011001



Tanggal Ujian:
30 Juni 2025

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Tema yang dipilih dalam penelitian ini ialah graf pembagi nol, dengan judul “Graf Pembagi Nol Matriks Segitiga Atas Berordo 2 dengan Entri Anggota $\mathbb{Z}_n$ ”. Dengan hati yang tulus, penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Keluarga penulis—Ayah, Umi, Kakak, Adik, serta kerabat—yang telah mendukung dari segala sisi dan tanpa syarat, hingga penulis sampai di tahap ini.
2. Ibu Teduh Wulandari Mas'oed, S.Si., M.Si. dan Bapak Dr. Drs. Sugi Guritman, selaku dosen pembimbing yang telah menyediakan ilmu, tenaga, dan waktunya untuk membimbing dan memberi arahan kepada penulis dalam menyelesaikan karya ilmiah ini.
3. Bapak Fendy Septyanto, M.Si, selaku dosen penguji yang telah memberikan saran dan masukan dalam penyusunan karya ilmiah ini.
4. Bapak Prof. Dr. Toni Bakhtiar, S.Si., M.Sc. selaku dosen pembimbing akademik yang telah membimbing penulis selama menempuh pendidikan di program studi matematika IPB.
5. Seluruh dosen dan staf Departemen Matematika yang telah memberikan ilmu dan tenaganya selama penulis menempuh pendidikan di program studi matematika IPB.
6. Teman-teman “Nginep wew”—Alin, Aulia, Cantik, Faizah, Ika, Nazihah, Nikmah, Raudah, Serefinala, Syifa, dan Vivi—yang selalu kebersamai tawa dan lelah penulis.
7. Teman-teman “Singkat”—Astri, Bunga, Isni, Jalesva, Rana, Ratri, dan Vilan—yang jauh dari jangkauan, tapi kehangatannya selalu terasa.
8. Mereka yang tak pernah penulis kenal secara pribadi, tetapi karya-karyanya telah menjadi teman sepi, sumber semangat, atau pembuka wawasan.
9. Teman-teman lain, yang tentu tidak bisa penulis sebutkan satu per satu.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Agustus 2025

Hafilah Rizka Nuha Hidayat



DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	viii
DAFTAR GAMBAR	viii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Teori Bilangan	3
2.2 Struktur Aljabar	5
2.3 Teori Graf	6
III HASIL DAN PEMBAHASAN	8
3.1 Struktur Aljabar $M_2(n)$	8
3.2 Elemen Pembagi Nol $Z(M_2(n))$	11
3.3 Digraf Pembagi Nol $\Gamma(M_2(n))$	18
3.4 Graf Pembagi Nol $\tilde{\Gamma}(M_2(n))$	20
IV KESIMPULAN DAN SARAN	26
4.1 Kesimpulan	26
4.2 Saran	26
DAFTAR PUSTAKA	27
RIWAYAT HIDUP	29



DAFTAR TABEL

1	Pembagi nol $Z(M_2(2))$	12
2	Pembagi nol $Z(M_2(3))$	13

DAFTAR GAMBAR

1	Digraf pembagi nol $\Gamma(M_2(2))$	18
2	Graf Pembagi nol $\tilde{\Gamma}(M_2(2))$	21
3	Graf pembagi nol $\tilde{\Gamma}(M_2(3))$	25