

SPATIO-TEMPORAL GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL DENGAN RESPON TWEEDIE COMPOUND POISSON GAMMA DALAM STATISTICAL DOWNSCALING

MA'RUF AH HAYATI MT



**STATISTIKA DAN SAINS DATA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2022**



@Hak cipta milik IPB University

IPB University



IPB University
— Bogor Indonesia —

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

PERNYATAAN MENGENAI DISERTASI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa disertasi dengan judul “*Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model* dengan Respon *Tweedie Compound Poisson Gamma* dalam *Statistical Downscaling*” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir disertasi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Agustus 2022

Ma'rufah Hayati Mt
G161160061



RINGKASAN

MA'RUF AH HAYATI MT. *Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model* dengan Respon *Tweedie Compound Poisson Gamma* dalam *Statistical Downscaling*. Dibimbing oleh AJI HAMIM WIGENA, ANIK DJUR AIDAH dan ANANG KURNIA.

Curah hujan secara alami terdiri dari dua komponen yaitu komponen diskret dan kontinu, masing-masing untuk menjelaskan kejadian hujan dan intensitas curah hujan. Curah hujan yang bernilai nol diartikan sebagai tidak ada kejadian hujan (komponen diskret) sehingga intensitas hujannya juga nol (komponen kontinu). Adapun untuk curah hujan yang bernilai lebih dari nol diartikan sebagai adanya kejadian hujan (komponen diskret) dan intensitas hujannya bernilai lebih dari nol (komponen kontinu). Penelitian mengenai curah hujan umumnya menggunakan dua model terpisah untuk masing-masing memodelkan kejadian hujan dan intensitas hujan. Pemodelan intensitas hujan sesuai dengan beberapa sebaran seperti gamma, normal, Weibull dan log normal.

Prediksi curah hujan yang akurat sangat diperlukan terkait dengan antisipasi bencana baik kekeringan di musim kemarau ataupun banjir di musim penghujan. Secara statistika, prediksi curah hujan membutuhkan pemodelan yang tepat meliputi pemilihan sebaran yang mampu memprediksi komponen hujan secara simultan. Sifat data curah hujan yang *exact zero* dan menjulur ke kanan cocok digambarkan dengan sebaran Tweedie berupa gabungan sebaran Poisson dan Gamma atau dikenal dengan nama *Tweedie Compound Poisson Gamma* (TCPG).

Teknik *Statistical Downscaling* (SD) dapat digunakan untuk menduga curah hujan pada skala lokal melalui data skala global. Penelitian ini menggunakan data skala global yaitu luaran *General Circulation Model* (GCM) berupa presipitasi. Namun demikian, peubah presipitasi dalam SD melanggar syarat multikolinearitas dalam pemodelan. Masalah ini dapat ditangani menggunakan metode reduksi dimensi menggunakan metode *principal component analysis* (PCA) atau menggunakan metode seleksi dan penyusutan peubah menggunakan LASSO, gulud, ataupun *elasticnet*.

Kajian pertama penelitian ini dilakukan pada tiga wilayah yang mewakili dataran rendah, sedang, dan tinggi untuk memodelkan curah hujan menggunakan metode TCGP-LASSO berbasis *generalized linear model* (GLM). TCGP-LASSO digunakan untuk prediksi kejadian dan intensitas hujan pada masing-masing wilayah dengan menangani masalah multikolinearitas dalam model menggunakan metode seleksi dan penyusutan peubah yaitu LASSO. TCGP-LASSO dibandingkan dengan beberapa model lainnya yaitu Gamma-LASSO, Normal-LASSO, TCGP-GLM, Gamma-GLM, TCGP-PCA, Gamma-PCA. Hasil penelitian menunjukkan bahwa TCGP-LASSO dan metode lainnya baik digunakan untuk memodelkan curah hujan pada dataran tinggi dan rendah. Ukuran kebaikan model menunjukkan bahwa model TCGP-LASSO mempunyai RMSEP terkecil dan korelasi terbesar dari pada model lainnya.

Penelitian lanjutan dari kajian pertama dikembangkan untuk prediksi kejadian dan intensitas hujan pada beberapa lokasi dan periode waktu. Data yang dikumpulkan dari beberapa lokasi dan waktu akan berakibat pada terlanggarnya asumsi independensi karena adanya dependensi spasial dan temporal. Data dari

lokasi yang saling berdekatan memiliki kecenderungan autokorelasi spasial dan data dari beberapa periode waktu akan mengandung autokorelasi temporal. Data yang mengandung autokorelasi spasial dan temporal disebut dengan data *spatio-temporal*. Salah satu model yang mampu menangani terlanggarnya asumsi dependensi spasial dan temporal adalah *generalized linear mixed model* (GLMM). Lokasi dan waktu dijadikan sebagai efek acak yang dimasukkan ke dalam model GLM sebagai jumlahan efek tetap dan acak. Model ini disebut dengan *spatio-temporal generalized linear mixed model* (STGLMM).

Pendugaan parameter regresi pada STGLMM menggunakan metode kemungkinan maksimum sulit dilakukan karena melibatkan integrasi yang kompleks pada saat menentukan fungsi peluang marginal dari komponen rata-rata efek tetap dan komponen ragam dari efek acak. Metode pendugaan lain seperti *Gauss hermite quadrature*, *Laplace*, *penalized quasi likelihood* sulit menghasilkan parameter dugaan karena lambat konvergen bahkan tidak konvergen dan tidak dapat menangani efek acak yang berkorelasi akibat dependensi spasial dan temporal. Model GLMM dengan efek acak berkorelasi akibat dependensi spasial dan temporal umumnya diselesaikan menggunakan metode Bayes namun membutuhkan pengetahuan mengenai sebaran prior bagi parameter yang akan diduga sebelum pemodelan. Penentuan prior parameter tidak mudah ditentukan. Metode pendugaan parameter *H-likelihood* dibangun untuk menangani keterbatasan yang dialami beberapa metode pendugaan tersebut dan mampu memodelkan GLMM dengan efek acak berkorelasi akibat dependensi spasial dan temporal. *H-likelihood* merupakan metode pendugaan yang berbasis *extended likelihood* sehingga lebih sederhana dalam penggunaannya karena mampu menduga efek tetap, acak dan komponen ragam efek acak. Model STGLMM pada kajian dua dibangun tanpa melibatkan peubah prediktor dalam pemodelannya yang disebut sebagai STGLMM1.

Model ini digunakan untuk prediksi curah hujan pada 27 stasiun hujan dengan periode waktu dari bulan Januari 1981 sampai dengan Desember 2009. Efek acak lokasi diasumsikan mengikuti fungsi eksponensial dan waktu mengikuti proses *autoregressive* orde pertama. Hasil pemodelan menunjukkan bahwa STGLMM1 belum mampu memberikan hasil prediksi yang baik. Prediksi curah hujan dari model STGLMM1 memberikan hasil yang monoton untuk seluruh bulan prediksi dan lokasi. Hal ini terjadi karena tidak adanya prediktor dalam model, perkalian antara matriks Z_1 dan Z_2 dengan matriks korelasi hasil dekomposisi Cholesky untuk efek acak spasial L dan temporal Λ memberikan hasil yang sama untuk lokasi dan waktu yang sama. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lanjutan mengenai model yang dibangun dengan menambah peubah prediktor untuk mendapatkan hasil yang lebih baik.

Penelitian lanjutan dari STGLMM1 yaitu dengan memasukkan luaran *general circulation model* (GCM) berupa presipitasi sebagai prediktor dalam *statistical downscaling* (SD). GCM memiliki masalah multikolinearitas dalam pemodelan sehingga ditangani menggunakan metode *principal component analysis* (PCA). Pemilihan PCA bertujuan untuk menangani masalah multikolinearitas sama seperti pada regularisasi LASSO pada kajian satu dan untuk prediksi curah hujan serta kejadian hujan bukan untuk seleksi peubah sehingga metode PCA digunakan. Selain itu, penggunaan regularisasi LASSO pada STGLMM perlu dibangun secara simulatan dalam model sehingga penelitian ini diberi batasan hanya untuk



membangun model STGLMM yang melibatkan prediktor dalam model. Model ini disebut dengan STGLMM2. Aplikasi STGLMM2 dilakukan pada 27 stasiun hujan dengan waktu 348 bulan dibandingkan dengan tiga model lainnya yaitu model SGLMM, TGLMM, dan GLMM. Pemodelan dilakukan pada lima skenario data prediksi yaitu 2009, 2008-2009, 2007-2009, 2006-2009, 2005-2009. Prediksi keempat model memiliki hasil yang mirip dan sama baiknya karena memiliki pola yang sama dalam prediksi. Kebaikan model dilihat dari nilai RMSEP dan korelasi antara data aktual dengan data prediksi dari ketiga model. Secara umum, STGLMM2 memiliki nilai RMSEP terkecil. Semakin panjang data prediksi maka semakin besar RMSEP dan semakin kecil nilai korelasi yang di peroleh. STGLMM2 dan GLMM mampu menurunkan nilai dugaan komponen ragam spasial dan temporal dibandingkan model SGLMM, TGLMM. Berdasarkan peta curah hujan pada seluruh bulan diperoleh bahwa bulan Desember, Januari dan Februari memiliki curah hujan yang cenderung ekstrem. Bulan Maret dan November memiliki curah hujan yang tinggi. Bulan Juni, Juli, Agustus, September memiliki curah hujan yang rendah. Bulan April, Mei, dan oktober memiliki kriteria curah hujan yang sedang. Selain intensitas hujan, karakteristik curah hujan lainnya juga dapat diprediksi.

Kata kunci: *Generalized Linear Mixed Model (GLMM) , Tweedie Compound Poisson Gamma, H-Likelihood, Statistical downscaling, spatio-temporal.*

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

SUMMARY

MA'RUF AH HAYATI MT. Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model with Tweedie Compound Poisson-Gamma Response in Statistical Downscaling. Supervised by AJI HAMIM WIGENA, ANIK DJURAI DAH and ANANG KURNIA.

Natural rainfall consists of two components, namely discrete and continuous components, respectively to explain the occurrence of rain and rainfall intensity. Rainfall with a value of zero is defined as no rain event (discrete component) so that the rainfall intensity is also zero (continuous component). As for rainfall that is worth more than zero, it is defined as the occurrence of rain (discrete component) and the intensity of rain is more than zero (continuous component). Research on rainfall generally uses two separate models for each modeling rainfall incidence and rainfall intensity. Rainfall intensity modeling according to several distributions such as gamma, normal, Weibull and log normal.

Accurate rainfall predictions are very necessary in relation to the anticipation of disasters, whether drought in the dry season or flooding in the rainy season. Statistically, rainfall prediction requires appropriate modeling including the selection of a distribution that is able to predict rainfall components simultaneously. The nature of rainfall data which is exact zero and sticks to the right is suitable to be described by the Tweedie distribution in the form of a combination of Poisson and Gamma distributions or known as Tweedie Compound Poisson Gamma (TCPG).

Statistical Downscaling (SD) technique can be used to estimate rainfall on a local scale through global scale data. This study uses global scale data, namely the output of the General Circulation Model (GCM) in the form of precipitation. However, the precipitation variable in SD violates the multicollinearity requirement in the modeling. This problem can be handled using the dimensional reduction method using the principal component analysis (PCA) method or using the variable selection and shrinkage method using LASSO, ridge, or elasticnet.

The first study of this research was conducted in three areas representing low, medium, and high plains to model rainfall using the TCPG-LASSO method based on the generalized linear model (GLM). TCPG-LASSO is used to predict the occurrence and intensity of rain in each region by dealing with multicollinearity problems in the model using the selection and shrinkage method. TCPG-LASSO is compared with several other models, namely Gamma-LASSO, Normal-LASSO, TCPG-GLM, Gamma-GLM, TCPG-PCA, Gamma-PCA. The results show that TCPG-LASSO and other methods are good for modeling rainfall in the highlands and lowlands. The size of the goodness of the model shows that the TCPG-LASSO model has the smallest RMSEP and the largest correlation than other models.

Further research from the first study was developed to predict the occurrence and intensity of rain at several locations and time periods. Data collected from several locations and times will result in the violation of the independence assumption due to spatial and temporal dependencies. Data from locations that are close together have a tendency for spatial autocorrelation and data from several time periods will contain temporal autocorrelation. Data that contains spatial and temporal autocorrelation is called spatio-temporal data. One model that is able to

handle the violation of the assumption of spatial and temporal dependencies is the generalized linear mixed model (GLMM). Location and time are used as random effects which are entered into the GLM model as the sum of fixed and random effects. This model is called the spatio-temporal generalized linear mixed model (STGLMM).

Estimating the regression parameters on STGLMM using the maximum likelihood method is difficult because it involves complex integration when determining the marginal probability function of the mean component of the fixed effect and the variance component of the random effect. Other estimation methods such as Gauss Hermite Quadrature, Laplace, Penalized Quasi likelihood are difficult to generate estimated parameters because they are slow to converge or even do not converge and cannot handle correlated random effects due to spatial and temporal dependencies. GLMM models with correlated random effects due to spatial and temporal dependencies are generally solved using the Bayes method but require knowledge of the prior distribution for the parameters to be estimated before modeling. Determination of prior parameters is not easy to determine. The H-likelihood parameter estimation method was built to handle the limitations experienced by these estimation methods and is able to model GLMM with correlated random effects due to spatial and temporal dependencies. H-likelihood is an extended likelihood-based estimation method so that it is simpler to use because it is able to predict fixed, random and various components of random effects. The STGLMM model in study two was built without involving predictor variables in its modeling which is called STGLMM1.

This model is used to predict rainfall in 27 rain stations with a time period from January 1981 to December 2009. The spatial random effect is assumed to follow an exponential function and time follows a first-order autoregressive process. The modeling results show that STGLMM1 has not been able to provide good predictive results. The rainfall prediction from the STGLMM1 model gives monotonous results for all predicted months and locations. This happens because there are no predictors in the model, the multiplication between Z_1 and Z_2 matrices with the correlation matrix of the Cholesky decomposition for spatial random effects L and temporal Λ gives the same results for the same location and time. Therefore, it is necessary to do further research on the model built by adding predictor variables to get better results

Further research from STGLMM1 is to include the general circulation model (GCM) output in the form of precipitation as a predictor in Statistical Downscaling (SD). GCM has multicollinearity problems in modeling so it is handled using the principal component analysis (PCA) method. The choice of PCA aims to deal with the problem of multicollinearity as in LASSO regularization in study one and for prediction of rainfall and rainfall events, not for variable selection, so the PCA method is used. In addition, the use of LASSO regularization in STGLMM needs to be built simultaneously in the model so that this study is limited to only building STGLMM models that involve predictors in the model. This model is called STGLMM2. The STGLMM2 application was carried out at 27 rain stations with a time of 348 months compared to three other models, namely the SGLMM, TGLMM, and GLMM models. The modeling was carried out on five scenarios of predictive data, namely 2009, 2008-2009, 2007-2009, 2006-2009, 2005-2009. The predictions of the four models have similar results and are equally good because they have the

same pattern in predictions. The goodness of the model is seen from the RMSEP value and the correlation between the actual data and the predicted data from the three models. In general, STGLMM2 has the smallest RMSEP value. The longer the prediction data, the greater the RMSEP and the smaller the correlation value obtained. STGLMM2 and GLMM were able to reduce the estimated value of the spatial and temporal variance components compared to the SGLMM and TGLMM models. Based on the rainfall map for all months, it is found that December, January and February have rainfall that tends to be extreme. March and November have high rainfall. June, July, August, September have low rainfall. April, May, and October have moderate rainfall criteria. In addition to the intensity of rain, other rainfall characteristics can also be predicted.

Keywords: Generalized Linear Mixed Model, Tweedie Compound Poisson Gamma, H-Likelihood, Statistical downscaling, spatio-temporal.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



@Hak cipta milik IPB University

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2022
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.



@Hak cipta milik IPB University

IPB University



IPB University
— Bogor Indonesia —

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

SPATIO-TEMPORAL GENERALIZED LINEAR MIXED MODEL DENGAN RESPON TWEEDIE COMPOUND POISSON GAMMA DALAM STATISTICAL DOWNSCALING

MA'RUF AH HAYATI MT

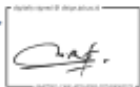
Disertasi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Doktor pada
Program Studi Statistika dan Sains Data

**STATISTIKA DAN SAINS DATA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2022**



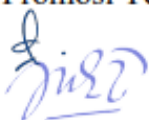
Penguji Luar Komisi Pembimbing pada Ujian Tertutup Disertasi:

- 1 Dr. Agus Mohamad Soleh, S.Si, MT
- 2 Dr. I Made Sumertajaya, M.Si

Promotor Luar Komisi Pembimbing pada Sidang Promosi Terbuka Disertasi:

- 1 Dr. Agus Mohamad Soleh, S.Si, MT
- 2 Dr. Ardhasena Sopaheluwakan



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Judul Disertasi: *Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model* dengan Respon *Tweedie Compound Poisson Gamma* dalam *Statistical Downscaling*

Nama : Ma'rufah Hayati MT
NIM : G161160061

Disetujui oleh

Pembimbing 1:
Prof. Dr. Ir. Aji Hamim Wigena, M.Sc

Pembimbing 2:
Dr. Ir. Anik Djuraidah, MS

Pembimbing 3:
Dr. Anang Kumia, M.Si



Diketahui oleh

Ketua Program Studi:
Prof. Dr. Khairil Anwar Notodiputro, MS
NIP 19560404198011 1 002

Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam:
Dr. Berry Juliandi, S.Si., M. Si.
NIP 19780723 200701 1 001



Tanggal Ujian:
4 Maret 2022

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *subhanahu wa ta'ala* atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Penelitian ini telah menghasilkan *Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model* dengan Respon *Tweedie Compound Poisson-Gamma* dalam *Statistical Downscaling*.

Penulis mengucapkan banyak terimakasih dan memberikan penghargaan setinggi-tingginya kepada semua pihak yang telah terlibat dalam penyelesaian disertasi ini, baik yang secara langsung maupun yang tidak langsung, antara lain:

1. Komisi pembimbing yang telah banyak memberikan bimbingan, arahan dan dorongan dengan penuh kesabaran: Prof. Dr. Ir. Aji Hamim Wigena, M.Sc, Dr. Ir. Anik Djuraidah, MS, Dr. Anang Kurnia, M.Si.
2. Penguji luar komisi yang telah banyak memberi masukan berharga untuk disertasi ini: Bapak Dr. Ir. I Made Sumertajaya, MS, Bapak Dr. Agus Mohamad Soleh, S.Si, M.T dan Dr. Ardhasena Sopaheluwakan.
3. Kementerian Keuangan atas bantuan beasiswa BUDI – DN yang dikelola oleh LPDP dari tahun 2016 – 2021.
4. Keluarga kami tercinta yaitu Bapak Mohammad Taslim Aziz, ibunda Roziyah, mama mertua Zainab, suami Dedy Irawan S.Sos., M.Si, kakak ipar Erfi Efendi beserta istri teteh Euis maisiska, kakak ipar Devi Swi Saputra beserta istri teteh Rasuna, anak- anak kami Rahmat Zakiy Maulana Daeng, Fathan Aziz Danial Robbani Daeng dan Afnan Syauqi Malik Ibrahim Daeng, dan adik-adik yaitu Rahmawati Azizah, Imam Nasiqin (adik Ipar), M Fahrudin Aziz, Helandri Ikajaya Putri (Adik Ipar), Siti Halimatussa'diyah, Galang Yoga Saputra (Adik Ipar), A khoirudin Yusuf, Hidayataul Fajriyah, A Khoirul Fikri, A Nasrulloh Syafi'I, Abdul Hakim Amrulloh, yang telah banyak membantu, pengertian, dukungan, pengorbanan serta doa dan kasih sayangnya.
5. Sekolah Pascasarja IPB beserta jajarannya yang telah membantu memfasilitasi studi penulis.
6. Ketua Program Studi Statistika IPB, serta Bapak dan Ibu Dosen yang telah banyak memberikan ilmu, pencerahan dan arahan selama masa pendidikan.
7. Sekretariat Program Studi Statistika IPB yang telah banyak membantu administrasi dan informasi.
8. Teman-teman S3 Program Studi Statistika IPB, khususnya angkatan 2016 yaitu uni Fevi Novkaniza, teh Novi Pusponegoro, aa Agus Muslim, dan mbk Ro'fah Nur Rachmawati yang telah berbagi pengalaman, pengetahuan dan bantuan hingga dapat menyelesaikan studi
9. Semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu. Disertasi ini masih memiliki banyak keterbatasan dan kekurangan, namun demikian penulis berharap disertasi ini dapat bermanfaat, baik dalam pengembangan ilmu pengetahuan bidang statistika maupun bidang terapan lainnya.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Agustus 2022

Ma'rufah Hayati Mt

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR GAMBAR	viii
DAFTAR LAMPIRAN	xi
DAFTAR SINGKATAN	viii
DAFTAR SIMBOL	xi
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	5
1.3 Tujuan Penelitian	6
1.4 <i>Road Map</i> Penelitian	6
1.5 Kebaruan	9
1.6 Sistematika Penulisan	9
II TINJAUAN PUSTAKA	10
2.1 Keluarga Ekponensial	10
2.2 <i>Generalized Linear Model</i> (GLM)	11
2.3 Kemungkinan Maksimum Klasik dan <i>Extended Likelihood</i>	12
2.4 Iterasi Newton-Raphson dan <i>Fisher Scoring</i>	16
2.5 <i>Exponential Dispersion Model</i> (EDM)	16
2.6 Keluarga Sebararn Tweedie	18
2.7 Efek Acak dan Efek Tetap	19
2.8 <i>Generalized Linear Mixed Model</i> (GLMM)	20
2.9 <i>Hierarchical Generalized Linear Model</i> (HGLM)	23
2.10 <i>Hierarchical Likelihood</i> (H-Likelihood)	23
2.11 Efek Acak Berkorelasi untuk Data Non-normal dalam HGLM	27
2.12 <i>Least Absolute Shrinkage and Selection Operator</i> (LASSO)	29
2.13 <i>General Circulation Model</i> (GCM) dan <i>Statistical Downscaling</i> (SD)	30
III PEMODELAN <i>STATISTICAL DOWNSCALING</i> MENGGUNAKAN <i>TWEEDIE COMPOUND POISSON GAMMA</i> (TCPG) DENGAN REGULARISASI LASSO	32
3.1 Pendahuluan	32
3.2 <i>Tweedie Compound Poisson Gamma</i> (TCPG)	33
3.3 Data	37
3.4 Algoritma Pemodelan Menggunakan Metode TCPG - LASSO	37
3.5 Hasil dan Pembahasan	40
3.6 Simpulan	56
IV <i>SPATIO-TEMPORAL GLMM</i> UNTUK RESPON <i>TWEEDIE COMPOUND POISSON GAMMA</i> DENGAN METODE PENDUGAAN <i>H-LIKELIHOOD</i>	57
4.1 Pendahuluan	57
4.2 Pengembangan <i>Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model</i> (STGLMM1) untuk Sebaran TCPG	58

4.3	Pendugaan Paramater Efek Tetap dan Acak untuk STGLMM1 Respon TCPG Menggunakan <i>H-Likelihood</i>	63
4.4	Pendugaan Paramater Komponen Ragam Efek Acak untuk STGLMM1 Menggunakan <i>Adjusted Profile H-Likelihood</i>	73
4.5	Aplikasi STGLMM1 respon TCPG Tanpa Peubah Penjelas Pada Data Curah Hujan	77
4.6	Simpulan	93
	MODEL <i>SPATIO –TEMPORAL</i> GLMM UNTUK RESPON TCPG DENGAN METODE <i>H-LIKELIHOOD</i> DALAM <i>STATISTICAL DOWNSCALING</i>	94
5.1	Pendahuluan	94
5.2	Spesifikasi Model	95
5.3	Pendugaan Paramater Efek Tetap dan Acak untuk model STGLMM2	101
5.4	Pendugaan Komponen Ragam Efek Acak Menggunakan Metode <i>Adjusted Profile H-Likelihood</i>	140
5.5	Aplikasi STGLMM2 pada <i>Statistical Downscaling</i>	115
5.6	Hasil dan pembahasan	117
5.7	Simpulan	135
VI	PEMBAHASAN UMUM	136
VII	SIMPULAN DAN SARAN	139
7.1	Simpulan	139
7.2	Saran	140
	DAFTAR PUSTAKA	141
	LAMPIRAN	146
	RIWAYAT HIDUP	190

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

DAFTAR TABEL

2.1	Fungsi $a(\cdot)$, $b(\cdot)$, dan $c(\cdot)$ untuk konstruksi keluarga eksponensial	10
2.2	Fungsi ragam bagi sebaran utama keluarga GLM	11
2.3	Perbedaan <i>Fisher likelihood</i> dan <i>extended likelihood</i>	12
2.4	Bentuk matrik W dari beberapa sumber	14
2.5	Beberapa jenis sebaran Tweedie dengan nilai parameter indek (power) p yang berbeda-beda	19
2.6	Perbedaan efek acak dan efek tetap	20
2.7	Perbedaan rata-rata dan ragam koragam dari model efek tetap dan acak	21
2.8	Kelebihan dan kekurangan teknik pendugaan parameter GLMM	25
2.9	Gambaran umum prinsip-prinsip statistik	25
3.1	Deskripsi data curah hujan	37
3.2	Algoritma TCGP-LASSO untuk pendugaan parameter regresi dan reduksi dimensi	39
3.3	Model - model regresi untuk prediksi curah hujan	40
3.4	Dugaan parameter indeks (p), dispersi (ϕ), shape (α)	42
3.5	Dugaan parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N\pi$ untuk Stasiun Cigugur	50
3.6	Dugaan parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N\pi$ untuk Stasiun Kahuripan	51
3.7	Dugaan Parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N\pi$ untuk Stasiun Pusakanegara	51
3.8	RMSEP dan korelasi (r) data prediksi dengan data aktual untuk masing-masing stasiun untuk tahun 2005-2009	55
3.9	RMSEP dan korelasi (r) data prediksi dengan data aktual untuk masing-masing stasiun untuk tahun 2009	55
4.1	Struktur data curah hujan yang melibatkan dependensi spasial dan temporal	58
4.2	Peubah yang digunakan dalam pemodelan	77
4.3	Stasiun hujan yang digunakan dalam penelitian	79
4.4	Dugaan parameter indeks (p) untuk masing-masing stasiun hujan	88
4.5	Dugaan parameter dispersi (ϕ) untuk masing-masing stasiun hujan	88
4.6	Dugaan parameter sebaran TCGP	88
5.1	Struktur umum susunan data penelitian	96
5.2	Peubah yang digunakan dalam pemodelan	115
5.3	Nilai akar ciri bagi peubah prediktor luaran GCM	116
5.4	Model-model yang digunakan dalam penelitian	117
5.5	Penduga efek tetap dan komponen ragam	119
5.6	Perbandingan nilai korelasi antara data aktual dengan prediksi dari masing-masing model dari lima skenario data pemodelan	120
5.7	RMSEP masing-masing model dari lima skenario data pemodelan	121
5.8	Dugaan Parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N\pi$ untuk Stasiun Malabar metode STGLMM	126
5.9	Dugaan Parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N\pi$ untuk Stasiun Malabar metode SGLMM	126
5.10	Dugaan Parameter $\lambda, \gamma, \alpha\gamma, \pi = \exp(-\lambda), N$ untuk Stasiun Malabar metode TGLMM	127

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

DAFTAR GAMBAR

1.1	<i>Road map</i> penelitian berdasarkan literatur terbaru	8
2.1	<i>General circulation model</i> (GCM)	30
2.2	<i>Statistical Downscaling</i>	31
3.1	Plot beberapa pola data berdasarkan parameter indeks p yang berbeda	35
3.2	Plot <i>density</i> beberapa pola data Berdasarkan Parameter Indeks p yang Berbeda	36
3.3	Plot (a) - (c) merupakan plot <i>density</i> data curah hujan bagi Stasiun Cigugur, Kahuripan dan Pusakanegara. (d) - (f) merupakan histogram data curah hujan bagi Stasiun Cigugur, Kahuripan dan Pusakanegara. (g) - (i) merupakan plot curah hujan bagi Stasiun Cigugur, Kahuripan dan Pusakanegara	41
3.4	Plot <i>profile likelihood</i> untuk dugaan parameter indeks p dari data curah hujan bagi (a) stasiun Cigugur (b) Kahuripan (c) Pusakanegara	42
3.5	Plot <i>cross validation error</i> untuk parameter λ	43
3.6	Plot seleksi peubah penjelas Stasiun Cigugur dengan metode TCPG-LASSO	44
3.7	Plot seleksi peubah penjelas Stasiun Kahuripan dengan metode TCPG-LASSO	45
3.8	plot seleksi peubah penjelas Stasiun Pusakanegara dengan metode TCPG-LASSO	45
3.9	Koefisien regresi dari metode TCPG-LASSO, Gamma-LASSO, Normal-LASSO untuk Stasiun Cigugur, Lekong dan Pusakanegara	46
3.10	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Cigugur dengan parameter indeks berada dalam selang kepercayaan 95%	47
3.11	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Kahuripan dengan parameter indeks berada dalam selang kepercayaan 95%	47
3.12	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Pusakanegara dengan parameter indeks berada dalam selang kepercayaan 95%	48
3.13	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Cigugur	49
3.14	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Kahuripan	49
3.15	Plot prediksi curah hujan Tahun 2009 untuk Stasiun Pusakanegara	49
3.16	Plot dugaan parameter bagi for (a) λ , (b) $\alpha\gamma$, (c) $\pi = \exp(-\lambda)$, (d) $N\pi$ untuk Stasiun Cigugur Tahun 2009	52
3.17	Plot dugaan parameter bagi for (a) λ , (b) $\alpha\gamma$, (c) $\pi = \exp(-\lambda)$, (d) $N\pi$ untuk Stasiun Kahuripan Tahun 2009	52
3.18	Plot dugaan parameter bagi (a) λ , (b) $\alpha\gamma$, (c) $\pi = \exp(-\lambda)$, (d) $N\pi$ untuk Stasiun Pusakanegara Tahun 2009	53
3.19	Plot antara parameter indeks dengan korelasi untuk Stasiun Cigugur, Lekong dan Pusakanegara	54
3.20	Plot antara parameter indeks dengan RMSEP untuk Stasiun Cigugur, Lekong dan Pusaka Negara	54
4.1	Peta sebaran 27 lokasi stasiun hujan di Provinsi Jawa Barat	78

4.2	Plot densitas curah hujan bagi Stasiun Malabar, Sukawana, Bantar Dewa, Rancah, Parigi, Leles, Anjatan, Bugel, Bugis	80
4.3	Plot densitas curah hujan bagi Stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat, karang Asem, Kroya, Sukra, Wanguk, Cigugur, Cipeundeuy	81
4.4	Plot densitas curah hujan bagi Stasiun Cisuti, Curug Agung, Dangdeur, Pusakanegara, Jati Mulya, Tanjung Sari, Kahuripan, Pada Waras, Wangun Wati	81
4.5	Histogram curah hujan bagi Stasiun Malabar, Sukawana, Bantar Dewa, Rancah, Parigi, Leles, Anjatan, Bugel, Bugis	82
4.6	Histogram curah hujan bagi Stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat, karang Asem, Kroya, Sukra, Wanguk, Cigugur, Cipeundeuy	82
4.7	Histogram curah hujan bagi Stasiun Cisuti, Curug Agung, Dangdeur, Pusakanegara, Jati Mulya, Tanjung Sari, Kahuripan, Pada Waras, Wangun Wati	83
4.8	Box-plot sebaran curah hujan bagi Stasiun Malabar, Sukawana, Bantar Dewa, Rancah, Parigi, Leles, Anjatan, Bugel, Bugis	83
4.9	Box-plot sebaran curah hujan bagi Stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat, karang Asem, Kroya, Sukra, Wanguk, Cigugur, Cipeundeuy	84
4.10	Box-plot sebaran curah hujan bagi Stasiun Cisuti, Curug Agung, Dangdeur, Pusakanegara, Jati Mulya, Tanjung Sari, Kahuripan, Pada Waras, Wangun Wati	84
4.11	Gambar (a) Plot densitas curah hujan, (b) Histogram curah hujan, (c) Box-plot curah hujan seluruh stasiun hujan dari Bulan Januari-Desember Tahun 1981-2009	85
4.12	Plot <i>profile likelihood</i> parameter indeks p untuk data hujan bagi Stasiun Malabar, Sukawana, Bantar Dewa, Rancah, Parigi, Leles, Anjatan, Bugel, Bugis	86
4.13	Plot <i>profile likelihood</i> parameter indeks p untuk data hujan bagi stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat, Karang Asem, Kroya, Sukra, Wanguk, Cigugur, Cipeundeuy	86
4.14	Plot <i>profile likelihood</i> parameter indeks p untuk data hujan bagi Stasiun Cisuti, Curug Agung, Dangdeur, Pusakanegara, Jati Mulya, Tanjung Sari, Kahuripan, Pada Waras, Wangun Wati	87
4.15	Plot <i>profile likelihood</i> parameter indeks p	87
4.16	Plot korelasi curah hujan dengan jarak antar lokasi	89
4.17	Plot curah hujan aktual dengan prediksi bagi Stasiun Malabar, Sukawana, Bantar Dewa, Rancah, Parigi, Leles, Anjatan, Bugel, Bugis	91
4.18	Plot curah hujan aktual dengan prediksi bagi Stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat, karang Asem, Kroya, Sukra, Wanguk, Cigugur, Cipeundeuy	92
4.19	Plot curah hujan aktual dengan prediksi bagi Stasiun Cisuti, Curug Agung, Dangdeur, Pusakanegara, Jati Mulya, Tanjung Sari, Kahuripan, Pada Waras, Wangun Wati	92
5.1	Pembangunan model STGLMM1 dan STGLMM2	100
5.2	Domain GCM optimum untuk Provinsi Jawa Barat penelitian Fadhlil (2019)	115



5.3	Plot peubah prediktor dengan nilai akar ciri	116
5.4	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Malabar – Bugis periode 2009	121
5.5	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model GLMM (—), model TGLMM (—), model SGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Cipancuh – Cipeundeuy periode 2009	122
5.6	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Cisuti - Wangun Wati periode 2009	122
5.7	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Malabar – Bugis periode periode 2008-2009	123
5.8	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Malabar – Bugis periode 2007-2009	124
5.9	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk Stasiun hujan Malabar – Bugis periode 2006-2009	124
5.10	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM untuk stasiun hujan Malabar – Bugis periode 2005-2009	125
5.11	Plot dugaan parameter bagi $\lambda, \alpha\gamma, \pi, N\pi$ untuk Stasiun Malabar, Sukawana dan Bantar Dewa Tahun 2009	127
5.12	Plot dugaan parameter bagi $\lambda, \alpha\gamma, \pi, N\pi$ untuk Stasiun Cipancuh, Gantar, Juntinyuat Tahun 2009	128
5.13	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Januari	129
5.14	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Februari	129
5.15	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Maret	130
5.16	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan April	130
5.17	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Mei	131
5.18	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Juni	131
5.19	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Juli	132

5.20	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Agustus	132
5.21	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan September	133
5.22	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Oktober	133
5.23	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan November	134
5.24	Peta pola sebaran prediksi curah hujan tahun 2009 pada 27 Stasiun hujan pada Bulan Desember	134
6.1	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM, STGLMM1 (—) untuk Stasiun hujan Malabar – Bugis	137
6.2	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model GLMM (—), model TGLMM (—), model SGLMM (—), dengan data aktual (—), (—) model GLMM, STGLMM1 (—) untuk Stasiun hujan Cipancuh – Cipeundeuy	138
6.3	Gambar (a) – (i) plot prediksi curah hujan model SGLMM (—), model TGLMM (—), model STGLMM (—) dengan data aktual (—), (—) model GLMM, STGLMM1 (—) untuk Stasiun hujan Cisuti - Wangun Wati	138

DAFTAR LAMPIRAN

1	Turunan pertama dan kedua bagi efek tetap Model STGLMM1 Bersebaran TCPG tanpa prediktor	147
2	Turunan pertama dan kedua bagi efek tetap model STGLMM2 Bersebaran TCPG dengan prediktor	157
3	Beberapa masalah yang ada pada data penelitian	166
4	Pemilihan data penelitian dan rincian beberapa masalah data curah hujan	167
5	<i>Longitude</i> , <i>latitude</i> dan <i>altitude</i> 27 Stasiun hujan di Jawa Barat yang digunakan dalam penelitian	169
6	Stasiun hujan yang digunakan dalam penelitian	171
7	Pembagian Stasiun hujan berdasarkan daratan tinggi, sedang dan rendah	172
8	Syntax model STGLMM2	173
9	Prediksi curah hujan periode waktu 24 bulan Tahun 2008-2009	186
10	Prediksi curah hujan periode waktu 36 bulan Tahun 2007-2009	187
11	Prediksi curah hujan periode waktu 48 bulan Tahun 2006-2009	188
12	Prediksi curah hujan periode waktu 60 Bulan Tahun 2005 - 2009	189

DAFTAR SINGKATAN

MLE	: <i>Maximum Likelihood Estimation</i>
GLM	: <i>Generalized Linear Model</i>
GLMM	: <i>Generalized Linear Mixed Model</i>
EDM	: <i>Exponential Dispersion Model</i>
H-LIKELIHOOD	: <i>Hierarchical Likelihood</i>
TCPG	: <i>Tweedie Compound Poisson Gamma</i>
GCM	: <i>General Circulation Model</i>
SD	: <i>Statistical Downscaling</i>
HGLM	: <i>Hierarchical Generalized Linear Model.</i>
SGLMM	: <i>Spasial Generalized Linear Mixed Model</i>
TGLMM	: <i>Temporal Generalized Linear Mixed Model</i>
STGLMM	: <i>Spatio-Temporal Generalized Linear Mixed Model</i>
PCA	: <i>Principal Component Analysis</i>
LASSO	: <i>Least Absolute Shrinkage And Selection Operator</i>
TCPG-PCA	: <i>Tweedie Compound Poisson Gamma-Principal Component Analysis</i>
TCPG-LASSO	: <i>Tweedie Compound Poisson Gamma- Least Absolute Shrinkage And Selection Operator</i>
TCPG-GLM	: <i>Tweedie Compound Poisson Gamma-Generalized Linear Model</i>
RMSEP	: <i>Root Mean Square Error Prediction</i>

DAFTAR SIMBOL

$l_p(\theta)$	: <i>Profile (log-)likelihood</i>
h	: <i>Hierarchical log-likelihood</i>
h_A	: <i>Adjusted Profile H-likelihood</i>
D	: Matriks negatif nilai harapan turunan kedua dari h untuk seluruh $\beta = \hat{\beta}, u = \hat{u}$
H	: Matriks Hessian
p	: Parameter indeks / Power
$f_\theta(.)$	: Fungsi kepekatan peluang dari peubah acak dengan parameter tetap θ . $(.)$ isinya bisa <i>conditional</i> atau <i>unconditional</i> yaitu: $f_\theta(y, u)$, $f_\theta(u)$, $f_\theta(y u)$, $f_\theta(v y)$.
$L(a; b)$	: Kemungkinan dari parameter a , berdasarkan pada data atau model b
$\ell()$	: Log kemungkinan
ω	: Parameter dispersi efek acak
ϕ	: Parameter dispersi sebaran TCPG
α	: Parameter range dari fungsi eksponensial dalam matriks korelasi lokasi

- W : Matriks berukuran $n \times n$ yang isinya memenuhi $w_{ii} = \{V(\boldsymbol{\mu})(g(\boldsymbol{\mu}))^2\}^{-1}$.
 ρ : Parameter autoregresif yang diperoleh dari galat proses autoregresif orde pertama..
 $T_{W_p}(\mu, \phi)$: Sebaran Tweedie dengan parameter μ dan ϕ . Parameter indeks p memiliki nilai yang beragam dan sebagai penentu sebaran Tweedie.
 $V(\mu)$: Fungsi ragam
 $g(\mu)$: Turunan η terhadap μ yang berukuran $n \times n$ berbentuk diagonal matrik.
 b : Efek acak spasial
 c : Efek acak temporal
 u : Efek acak spasial setelah dekomposisi Cholesky
 v : Efek acak temporal setelah dekomposisi Cholesky

