# LAMPIRAN

Lampiran 1 Penondimensionalan model mangsa-pemangsa dengan pemanenan

Persamaan model mangsa-pemangsa dengan pemanenan dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - Ex, \tag{11}$$

$$\frac{dy}{dt} = bxy - dy - F. \tag{12}$$

Penyederhanaan parameter persamaan (11) dan (12) dilakukan dengan penondimensionalan dengan variabel nondimensional sebagai berikut:

$$\bar{x} = \frac{x}{K}, \bar{y} = \frac{ya}{r}, \bar{t} = tr,$$

dan

$$\bar{s} = \frac{d}{r}, \bar{m} = \frac{bK}{r}, \bar{Q} = \frac{E}{r}, \bar{W} = \frac{F}{r}.$$

Parameter $\bar{x}, \bar{y}$, dan $\bar{t}$ disubstitusikan ke dalam persamaan (11) dan (12), sehingga diperoleh bentuk sebagai berikut:

i. Untuk $\frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = x\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - Ex$$

$$\frac{d(\bar{x}K)}{d\left(\frac{\bar{t}}{r}\right)} = r(\bar{x}K)\left(1 - \frac{\bar{x}K}{K}\right) - a(\bar{x}K)y - E(\bar{x}K)$$

$$\frac{d(\bar{x}Kr)}{d\bar{t}} = (r\bar{x}K(1 - \bar{x}) - a\bar{x}Ky - E\bar{x}K)\left(\frac{1}{Kr}\right)$$

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}(1 - \bar{x}) - \frac{a\left(\frac{\bar{y}r}{a}\right)\bar{x}}{r} - \frac{E\bar{x}}{r}$$

dengan pemisalan $\bar{Q} = \frac{E}{r}$, selanjutnya diperoleh persamaan

$$\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \bar{x}(1 - \bar{x}) - \bar{x}\bar{y} - \bar{Q}\bar{x}$$

dengan menghilangkan tanda bar pada setiap parameter dan variabel, diperoleh hasil penondimensionalan berikut :

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y - Q).$$

ii. Untuk $\frac{dy}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = bxy - dy - Fy$$

$$\frac{d\left(\frac{\bar{y}r}{a}\right)}{d\left(\frac{\bar{t}}{r}\right)} = b(\bar{x}K)\left(\frac{\bar{y}r}{a}\right) - d\left(\frac{\bar{y}r}{a}\right) - F\left(\frac{\bar{y}r}{a}\right)$$

$$\frac{d\bar{y}r^2}{da\bar{t}} = \left(\frac{bKr\bar{x}\bar{y}}{a} - \frac{dr\bar{y}}{a} - \frac{F\bar{y}}{r}\right)\left(\frac{a}{r^2}\right)$$
$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \frac{bK\bar{x}\bar{y}}{r} - \frac{d\bar{y}}{r} - \frac{F\bar{y}}{r}$$

dengan pemisalan $\bar{m} = \frac{bK}{r}, \bar{s} = \frac{d}{r},$ dan $\bar{W} = \frac{F}{r}$ , selanjutnya diperoleh persamaan

$$\frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} = \bar{m}\bar{x}\bar{y} - \bar{s}\bar{y} - \bar{W}\bar{y}$$

dengan menghilangkan tanda bar pada setiap parameter dan variabel, diperoleh hasil penondimensionalan berikut :

$$\frac{dy}{dt} = y(-s + mx - W)$$

Lampiran 2 Penentuan Titik Tetap Model

Titik tetap persamaan didapatkan dari $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$, sehingga diperoleh persamaan sebagai berikut :

$$x(1 - x - y - Q) = 0,$$
$$y(mx - s - W) = 0.$$

i. $\frac{dx}{dt} = 0$

$x(1 - x - y - Q) = 0$

$x = 0$ atau $x = 1 - y - Q$

$\frac{dy}{dt} = 0$

$y(mx - s - W) = 0$

$y = 0$ atau $x = \frac{s+W}{m}$

Diperoleh titik tetap $T_1(0,0)$.

ii. Saat $y = 0$

$$\begin{aligned} x &= 1 - y - Q \\ &= 1 - 0 - Q \\ &= 1 - Q \end{aligned}$$

Diperoleh titik tetap $T_2(1 - Q, 0)$

iii. Saat $x = 1 - y - Q$

$$\begin{aligned} x &= 1 - y - Q \\ \frac{s+W}{m} &= 1 - y - Q \\ s + W &= m - my - mQ \\ my &= m - mQ - s - W \\ y &= \frac{m - mQ - s - W}{m} \end{aligned}$$

Diperoleh titik tetap $T_3\left(\frac{s+W}{m}, \frac{m-mQ-s-W}{m}\right)$

Lampiran 3 Penentuan Matriks Jacobi

Misalkan persamaan (3) dan (4) dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - Ex = f(x)$$
$$\frac{dy}{dt} = bxy - dy - Fy = g(x)$$

Selanjutnya diperoleh matriks jacobi berikut :

$$J_{x,y} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} f(x) & \frac{d}{dy} f(x) \\ \frac{d}{dx} g(x) & \frac{d}{dy} g(x) \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y - Q & -x \\ my & mx - s - W \end{pmatrix}$$

Kemudian masing-masing titik tetap yang telah diperoleh sebelumnya disubstitusikan ke dalam matriks jacobi tersebut sehingga dapat diperoleh nilai eigen masing-masing titik tetap dan dapat dianalisis sifat kestabilannya.

Lampiran 4 Nilai Eigen untuk Masing-Masing Titik Tetap

$$J = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y - Q & -x \\ my & mx - s - W \end{pmatrix}$$

i. Pelinearan titik tetap $T_1(0,0)$
Substitusikan titik tetap $T_1$ ke dalam matriks jacobi

$$J_{(T_1)} = \begin{pmatrix} 1 - Q & 0 \\ 0 & -s - W \end{pmatrix}$$

dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det\left(J_{(T_1)} - \lambda I\right) = 0$ akan diperoleh nilai eigen $T_1$.

$$\left|J_{(T_1)} - \lambda I\right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 - Q - \lambda & 0 \\ 0 & -s - W - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1 - Q - \lambda)(-s - W - \lambda) = 0$$

sehingga

$$\lambda_1 = 1 - Q \text{ dan } \lambda_2 = -s - W$$

ii. Pelinearan titik tetap $T_2(1 - Q, 0)$
Substitusikan titik tetap $T_2$ ke dalam matriks jacobi

$$J_{(T_2)} = \begin{pmatrix} Q - 1 & Q - 1 \\ 0 & m - mQ - s - W \end{pmatrix}$$

dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det\left(J_{(T_2)} - \lambda I\right) = 0$ akan diperoleh nilai eigen $T_2$.

$$\left|J_{(T_2)} - \lambda I\right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} Q-1-\lambda & Q-1 \\ 0 & m-mQ-s-W-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(Q-1-\lambda)(m-mQ-s-W-\lambda) = 0$$

sehingga

$$\lambda_1 = Q-1 \text{ dan } \lambda_2 = m-mQ-s-W$$

iii. Pelinearan titik tetap $T_3(\frac{s+W}{m}, \frac{m-mQ-s-W}{m})$

Substitusikan titik tetap $T_3$ ke dalam matriks jacobi

$$J_{(T_3)} = \begin{pmatrix} \frac{-s-W}{m} & \frac{-s-W}{m} \\ m-mQ-s-W & 0 \end{pmatrix}$$

dengan menyelesaikan persamaan karakteristik $\det\left(J_{(T_3)} - \lambda I\right) = 0$ akan diperoleh nilai eigen $T_3$.

$$\left|J_{(T_3)} - \lambda I\right| = 0$$
$$\begin{vmatrix} \frac{-s-W-\lambda}{m} & \frac{-s-W}{m} \\ m-mQ-s-W & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(\frac{-s-W-\lambda}{m}\right)(-\lambda) - (m-mQ-s-W)\left(\frac{-s-W}{m}\right) = 0$$
$$\lambda^2 + \left(\frac{s+W}{m}\right)\lambda + \frac{sm-smQ-s^2-sW+Wm-WmQ-Ws-W^2}{m} = 0$$

diperoleh akar dari persamaan kuadrat tersebut sebagai berikut

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{-s-W}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{-s-W}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{sm-smQ-s^2-2sW+mW-mWQ-W^2}{m}\right)}}{2}$$

Lampiran 5 Program Plot Bidang Fase

```
odel[x0_, y0_] :=
  NDSolve[{x'[t] = x[t] * (1 - x[t] - y[t] - 0.1), y'[t] = y[t] * (-0.6 + 0.95 * x[t] - 0.1), x[0] = x0, y[0] = y0},
   {x[t], y[t]}, {t, 0, 30}];

sol1[1] = ode1[1.2, 0.7];

sol2[1] = ode1[1.2, 0.7];

p1 = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. sol1[1], {t, 0, 30}, PlotRange → {{-0.1, 1.3}, {-0.1, 0.9}},
   AspectRatio → 0.6, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], Thick}, AxesLabel → {"Mangsa", "Pemangsa"}];

p2 = ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. sol2[1], {t, 0, 30}, PlotRange → {{-0.1, 1.3}, {-0.1, 0.9}},
   AspectRatio → 0.6, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 1], Thick}, AxesLabel → {"Mangsa", "Pemangsa"}];

p3 = StreamPlot[{x * (1 - x - y - 0.1), y * (-0.6 + (0.95 * x) - 0.1)}, {x, -0.1, 1.3}, {y, -0.1, 0.9}];

Show[p1, p2, p3]
```

Lampiran 6 Program Plot Grafik Solusi

```
p2 = VectorPlot[{x (1 - x - y - 0.1), y (-0.6 + 0.95 x - 0.1)}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}];

p3 = VectorPlot[{x (1 - x - y - 0.3), y (-0.6 + 0.95 x - 0.1)}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}];

p4 = VectorPlot[{x (1 - x - y - 0.5), y (-0.6 + 0.95 x - 0.1)}, {x, 0, 1.5}, {y, 0, 1.5}];

ode2[x0_, y0_] := NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - y[t] - 0.1), y'[t] == y[t] (-0.6 + 0.95 x[t] - 0.1), x[0] == x0, y[0] == y0},
   {x[t], y[t]}, {t, 0, 30}];

ode3[x0_, y0_] := NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - y[t] - 0.3), y'[t] == y[t] (-0.6 + 0.95 x[t] - 0.1), x[0] == x0, y[0] == y0},
   {x[t], y[t]}, {t, 0, 30}];

ode4[x0_, y0_] := NDSolve[{x'[t] == x[t] (1 - x[t] - y[t] - 0.5), y'[t] == y[t] (-0.6 + 0.95 x[t] - 0.1), x[0] == x0, y[0] == y0},
   {x[t], y[t]}, {t, 0, 30}];

sol[2] = ode2[1.2, 0.7];

sol[3] = ode3[1.2, 0.7];

sol[4] = ode4[1.2, 0.7];

p6 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{t, x[t]} /. sol[2], {i, 1}]], {t, 0, 30}, PlotRange → All,
   Frame → {{True, False}, {True, False}}, FrameLabel → {"Waktu", "Mangsa"}, PlotLegends → {"4a"},
   PlotStyle → {{Black, Yellow}}];
p7 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{t, x[t]} /. sol[3], {i, 1}]], {t, 0, 30}, PlotRange → All,
   Frame → {{True, False}, {True, False}}, FrameLabel → {"Waktu", "Mangsa"}, PlotLegends → {"4b"},
   PlotStyle → {{Black, Green}}];

p8 = ParametricPlot[Evaluate[Table[{t, x[t]} /. sol[4], {i, 1}]], {t, 0, 30}, PlotRange → All,
   Frame → {{True, False}, {True, False}}, FrameLabel → {"Waktu", "Mangsa"}, PlotLegends → {"4c"},
   PlotStyle → {{Black, Red}}];

Show[{p6, p7, p8}, FrameLabel → {"Waktu", "Mangsa"}, AxesStyle → White];

p14 = Show[{p6, p7, p8}, FrameLabel → {"Waktu", "Mangsa"}, AxesStyle → White];

Show[p14, ImageSize → {360, 222}, AspectRatio → Full]
```

# RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di kota Purworejo pada 15 November 1999 sebagai anak ke dua dari pasangan bapak Sumarman dan ibu Suyani. Pendidikan Sekolah Menengah Atas (SMA) ditempuh di Sekolah Menengah Atas Negeri 1 Purworejo, dan lulus pada tahun 2018. Pada tahun 2018 penulis diterima sebagai mahasiswa program sarjana (S-1) di Program sarjana Departemen Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam di IPB.

Selama mengikuti program S-1, penulis aktif dalam berbagai kegiatan yang ada di IPB University yaitu menjadi pengurus Gumatika pada Departemen Bisection kabinet Sigma Karya tahun 2020/2021. Penulis juga aktif di berbagai kepanitiaan, seperti menjadi staff divisi super mentor di G-Faculty Familiarity FMIPA IPB tahun 2020.