



## **PENGARUH PEMANENAN MANGSA ATAU PEMANGSA DALAM MODEL MANGSA PEMANGSA**

**RETNO ADIYANTI**



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA  
INSTITUT PERTANIAN BOGOR  
BOGOR  
2025**



## **PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA**

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Pengaruh Pemanenan Mangsa atau Pemangsa dalam Model Mangsa-Pemangsa” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apapun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, 30 Maret 2025

Retno Adiyanti  
G54180055

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah

b. Pengutipan tidak mengurangi kepentingan yang wajar IPB University.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



## **ABSTRAK**

RETNO ADIYANTI. Pengaruh Pemanenan Mangsa atau Pemangsa dalam Model Mangsa Pemangsa. Dibimbing oleh ALI KUSNANTO dan PAIAN SIANTURI.

Model dalam penelitian ini adalah model mangsa-pemangsa dengan pemanenan. Tujuan dari penelitian ini adalah mengkaji pengaruh pemanenan mangsa dan pemangsa pada model. Metode yang digunakan adalah dengan mencari dan menganalisis kestabilan titik tetap serta melakukan simulasi numerik. Model ini memiliki tiga titik tetap dengan sifat kestabilan yang dipengaruhi oleh nilai parameter. Adanya pemanenan tidak berdampak secara langsung terhadap populasi mangsa. Pemanenan pada satu populasi mengakibatkan populasi pemangsa lebih cepat menuju kepunahan dibandingkan tanpa adanya pemanenan. Pemanenan pada kedua populasi mengakibatkan populasi pemangsa mengalami penurunan yang signifikan dan lebih cepat mengalami kepunahan.

Kata kunci : analisis kestabilan, mangsa-pemangsa, pemanenan, simulasi numerik.

## **ABSTRACT**

RETNO ADIYANTI. Effects of Prey or Predator Harvesting in Predator-Prey Models. Supervised by ALI KUSNANTO and PAIAN SIANTURI.

The model in this study is predator-prey model with harvesting. The purpose of this study is to examine the effect of prey and predator harvesting on the model. The method used is to find and analyze the stability of fixed points and conduct numerical simulations. This model has three fixed points with stability properties influenced by parameter values. The presence of harvesting does not have a direct impact on the prey population. Harvesting in one population causes the predator population to go extinct faster than without harvesting. Harvesting in both populations cause the predator population to experience a significant decline and go extinct faster.

*Keywords:* harvesting, numerical simulation, predator-prey, stability analysis.



©Hak cipta milik IPB University

**IPB University**

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2025  
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

*Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.*

*Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.*



## **PENGARUH PEMANENAN MANGSA ATAU PEMANGSA DALAM MODEL MANGSA PEMANGSA**

**RETNO ADIYANTI**

Skripsi  
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Sarjana Matematika pada  
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA  
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA  
INSTITUT PERTANIAN BOGOR  
BOGOR  
2025**



# IPB University

Penguji pada Ujian Skripsi:  
**Drs. Siswandi, M.Si.**

*@Hak cipta milik IPB University*

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
  - b. Pengutipan tidak mengurangi kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Judul Skripsi : Pengaruh Pemanenan Mangsa atau Pemangsa dalam Model  
Mangsa Pemangsa  
Nama : Retno Adiyanti  
NIM : G54180055

Disetujui oleh



Pembimbing 1:  
Drs. Ali Kusnanto, M. Si.

Pembimbing 2:  
Dr.Drs. Paian Sianturi

Diketahui oleh



Ketua Program Studi Matematika  
Dr. Donny Citra Lesmana, M.Fin.Math.  
NIP. 19790227 200501 1001

Tanggal Ujian: 4 November 2024

Tanggal Lulus:

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang  
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :  
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah  
b. Pengutipan tidak mengurangi kepentingan yang wajar IPB University.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



## **PRAKATA**

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *subhanaahu wa ta'ala* atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Tema yang dipilih dalam penelitian dengan judul “Pengaruh Pemanenan Mangsa atau Pemangsa dalam Model Mangsa Pemangsa”. Terima kasih penulis ucapkan kepada semua pihak yang terlibat dalam proses penyusunan karya ilmiah ini di antaranya sebagai berikut:

1. Bapak Sumarman, Ibu Suyani serta seluruh keluarga yang telah memberikan dukungan, doa, dan kasih sayangnya sehingga penulis mampu menyelesaikan pendidikan hingga saat ini.
2. Drs. Ali Kusnanto, M.Si. selaku dosen pembimbing pertama, Dr. Drs. Paian Sianturi selaku dosen pembimbing kedua dan Drs. Siswandi, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan motivasi, ilmu, kritik, dan saran sehingga karya ilmiah ini bisa terselesaikan dengan baik.
3. Seluruh dosen Departemen Matematika FMIPA IPB atas semua ilmu dan motivasi yang diberikan kepada penulis.
4. Seluruh Staf Departemen Matematika IPB atas segala bantuan selama proses perkuliahan dan proses penyelesaian karya ilmiah ini.
5. Teman-teman Departemen Matematika FMIPA IPB atas doa dan dukungannya.
6. Semua pihak lain yang telah membantu penulisan karya ilmiah ini. Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, 30 Maret 2025

*Retno Adiyanti*



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang  
 1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah  
 b. Pengutipan tidak mengurangi kepentingan yang wajar IPB University.  
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

	x
<b>DAFTAR TABEL</b>	x
<b>DAFTAR GAMBAR</b>	x
<b>DAFTAR LAMPIRAN</b>	x
<b>I PENDAHULUAN</b>	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
<b>II TINJAUAN PUSTAKA</b>	3
2.1 Sistem Persamaan Diferensial	3
2.2 Titik Tetap dan Pelinearan	3
2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen	4
2.4 Analisis Kestabilan Titik Tetap	4
<b>III METODE PENELITIAN</b>	6
<b>IV HASIL DAN PEMBAHASAN</b>	7
4.1 Model Matematika	7
4.2 Penondimensionalan Model	8
4.3 Penentuan Titik Tetap Model	8
4.4 Penentuan Matriks Jacobi	9
4.5 Analisis Kestabilan Titik Tetap	9
4.6 Simulasi Numerik	11
4.7 Analisis Perbandingan	22
<b>V SIMPULAN DAN SARAN</b>	25
5.1 Simpulan	25
5.2 Saran	25
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	26
<b>LAMPIRAN</b>	28
<b>RIWAYAT HIDUP</b>	33



1	Keterangan dari parameter persamaan 13 dan 14	8
2	Pemilihan nilai parameter $s, m, Q$ dan $W$	11
3	Titik tetap dan kestabilan simulasi 1	12
4	Titik tetap dan kestabilan simulasi 2	14
5	Titik tetap dan kestabilan simulasi 3	16
6	Titik tetap dan kestabilan simulasi 4	18
7	Titik tetap dan kestabilan simulasi 5	20
8	Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 2	22
9	Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 4	22
10	Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 3	23
11	Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 5	23

## DAFTAR GAMBAR

1	Diagram kompartemen model	7
2	Bidang fase simulasi (a) 1a, (b) 1b, dan (c) 1c	12
3	Grafik solusi simulasi 1 populasi mangsa	13
4	Grafik solusi simulasi 1 populasi pemangsa	13
5	Bidang fase simulasi (a) 2a, (b) 2b, dan (c) 2c	14
6	Grafik solusi simulasi 2 populasi mangsa	15
7	Grafik solusi simulasi 2 populasi pemangsa	15
8	Bidang fase simulasi (a) 3a, (b) 3b, dan (c) 3c	16
9	Grafik solusi simulasi 3 populasi mangsa	17
10	Grafik solusi simulasi 3 populasi pemangsa	17
11	Bidang fase simulasi (a) 4a, (b) 4b, dan (c)	18
12	Grafik solusi simulasi 4 populasi mangsa	19
13	Grafik solusi simulasi 4 populasi pemangsa	19
14	Bidang fase simulasi (a) 5a, (b) 5b, dan (c) 5c	20
15	Grafik solusi simulasi 5 populasi mangsa	21
16	Grafik solusi simulasi 5 populasi pemangsa	21
17	Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 2	22
18	Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 4	23
19	Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 3	24
20	Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 5	24

## DAFTAR LAMPIRAN

1	Penondimensionalan Model Mangsa-Pemangsa dengan Pemanenan	28
2	Penentuan Titik Tetap Model	29
3	Penentuan Matriks Jacobi	30
4	Nilai Eigen untuk Masing-Masing Titik Tetap	30
5	Program Plot Bidang Fase	31
6	Program Plot Grafik Solusi	32



## 1.1 Latar Belakang

Makhluk hidup yang ada di bumi terdiri atas kumpulan populasi dari berbagai spesies yang hidup bersama atau disebut komunitas. Hal ini menunjukkan bahwa makhluk hidup di bumi ini tidak ada yang dapat hidup sendiri, tetapi akan selalu membutuhkan satu sama lain. Mereka akan saling berinteraksi dengan berbagai spesies yang ada. Ada beberapa jenis sistem interaksi antar spesies yang dapat terjadi dalam ekosistem, salah satunya adalah sistem interaksi mangsa pemangsa (*predator-prey*). Dalam sistem interaksi mangsa-pemangsa, pemangsa akan memakan mangsa untuk bertahan hidup. Bentuk interaksi yang terjadi dapat berupa simbiosis, predasi, maupun kompetisi (Junaedi *et al.* 2015).

Model dinamika populasi sudah banyak dikembangkan dalam bidang matematika biologi. Model ini menggambarkan peristiwa perubahan yang terjadi pada suatu populasi, khususnya ekologi. Ekologi merupakan cabang ilmu biologi yang mempelajari interaksi antara suatu spesies dengan lingkungannya (Roy *et al.* 2017). Model interaksi mangsa dan pemangsa pertama kali diperkenalkan oleh Lotka dan Volterra yang disebut model Lotka-Volterra. Model ini telah digunakan sebagai alat untuk memperkenalkan banyak konsep matematika yang praktis dalam teori ekologi. Asumsi yang digunakan dalam model ini adalah mangsa dan pemangsa hidup secara bebas sehingga pemangsa dapat berinteraksi secara langsung dengan mangsa. Interaksi ini berpengaruh pada kepadatan kedua populasi. Luckinbill (1973) mempertimbangkan dan menunjukkan bahwa populasi mangsa-pemangsa dapat hidup bersama dalam jangka waktu yang lama jika kontak antara keduanya dikurangi. Ada beberapa faktor yang mempengaruhi populasi mangsa dan pemangsa seperti pertumbuhan intrinsik per kapita mangsa, daya dukung lingkungan, tingkat kematian pemangsa, tingkat konsumsi pemangsa dan tingkat pemanenan kedua spesies (Manna *et al.* 2017).

Predasi merupakan interaksi biologis di mana pemangsa memakan mangsanya (Roy *et al.* 2017). Hubungan interaksi antar mangsa pemangsa sangat erat, sebab tanpa mangsa populasi pemangsa tidak dapat hidup. Sebaliknya, pemangsa juga berfungsi sebagai pengontrol populasi mangsa. Menurut Toaha (2013), interaksi antar spesies yang terjadi dalam suatu ekosistem dapat menyebabkan keadaan populasi suatu spesies berubah. Salah satu penyebab kepunahan populasi adalah tingkat pemangsaan terhadap mangsa yang sangat tinggi dan rendahnya tingkat pertumbuhan mangsa atau rendahnya populasi awal dari populasi mangsa (Afifah *et al.* 2020).

Martin dan Ruan (2001) dan Kar (2003) menyarankan untuk mengkaji faktor pemanenan pada model-model pertumbuhan populasi mangsa-pemangsa karena adanya pemanenan dapat mencegah suatu populasi berlebihan di populasi lain dan tetap dalam keadaan seimbang. Pemanenan sering dilakukan dalam perikanan, kehutanan, dan pengelolaan satwa liar (Xiao *et al.* 2006). Menurut (Carling *et al.* 1988) tujuan dari pemanenan ini di antaranya untuk mempertahankan pengembangan ekosistem yang berkelanjutan serta menjaga perkembangan pemanenan dengan memperhatikan kelestarian fungsi lingkungan hidupnya. Banyak peneliti yang mengembangkan model Lotka-Volterra (*predator-prey*) dengan menambahkan beberapa asumsi.



Kar dan Chauduri (2004) mengkaji model mangsa-pemangsa yang merujuk kepada model Lotka-Volterra dengan mempertimbangkan pengaruh pemanenan. Holmberg (1995) meneliti pengaruh pemanenan dengan kuota konstan dan usaha konstan. Sistem satu mangsa dan satu pemangsa dalam (Hogart *et al.* 1992) meninjau kedua populasi mangsa dan pemangsa dipanen dengan hasil tangkapan konstan dan diperoleh kestabilan pada hasil maksimal yang lestari. Penelitian lainnya seperti (Zhang *et al.* 2007) tentang model mangsa pemangsa yang melibatkan tiga spesies dengan pemanenan pada populasi mangsa pertama dan populasi pemangsa. Penelitian ini akan menganalisis dan membandingkan model mangsa-pemangsa dasar (tanpa pemanenan) dengan model mangsa-pemangsa dengan pemanenan yang selanjutnya akan diamati perilaku sistem dengan mencari titik tetap dan kestabilannya dan melakukan simulasi numerik.

## 1.2 Tujuan

Tujuan yang ingin dicapai dalam penelitian ini adalah:

1. merekonstruksi model mangsa-pemangsa dengan pemanenan,
2. mencari titik tetap dan sifat kestabilannya, dan
3. melakukan simulasi numerik dan menganalisis pengaruh laju pemanenan terhadap populasi.



## II TINJAUAN PUSTAKA

### 2.1 Sistem Persamaan Diferensial

Sistem persamaan diferensial orde satu dengan  $n$  persamaan dan  $n$  fungsi yang tidak diketahui  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dinyatakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

dapat ditulis sebagai berikut

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (1)$$

dengan

$$x = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, f(t, x) = \begin{pmatrix} f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix}.$$

Persamaan (1) dikenal sebagai sistem persamaan diferensial linear jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  fungsi linear terhadap  $x_1, x_2, \dots, x_n$  dan jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  fungsi tak linear terhadap  $x_1, x_2, \dots, x_n$  maka persamaan (1) dikenal sebagai sistem persamaan diferensial tak linear. Persamaan (1) disebut sebagai sistem persamaan diferensial mandiri jika  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tidak bergantung secara eksplisit pada  $t$ , yaitu  $f(t, x) = f(x)$ .

Sistem persamaan diferensial linear mandiri dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + b,$$

dengan  $A$  merupakan matriks koefisien berukuran  $n \times n$  serta  $b$  adalah vektor koefisien berukuran  $n \times 1$ . Jika  $b = 0$ , maka sistem persamaan diferensial di atas disebut homogen. Solusi dari sistem persamaan diferensial linear mandiri homogen sebagai berikut

$$x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0,$$

disebut dengan solusi *trivial*. Jika tidak demikian maka disebut solusi *nontrivial*.  
 (Braun 1983)

### 2.2 Titik Tetap dan Pelinearan

Diberikan persamaan diferensial tak linear sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y), \\ \dot{y} &= g(x, y),\end{aligned} \quad (2)$$

di mana  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Persamaan (2) memiliki titik tetap  $\bar{x} = (x^*, y^*)$  yang disebut juga sebagai titik ekuilibrium, ketika memenuhi



$f(x^*, y^*) = 0$  dan  $g(x^*, y^*) = 0$ .

Dimisalkan  $\dot{u} = x - x^*$  dan  $\dot{v} = y - y^*$ , akan diperoleh persamaan sebagai berikut

$$\dot{u} = f(x^* + u, y^* + v),$$

$$\dot{v} = g(x^* + u, y^* + v),$$

dengan pendekatan ekspansi Taylor dua peubah, diperoleh sistem persamaan sebagai berikut

$$\dot{u} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv), \quad (3)$$

$$\dot{v} = u \frac{\partial g}{\partial x} + v \frac{\partial g}{\partial y} + O(u^2, v^2, uv),$$

di mana  $O(u^2, v^2, uv)$  mendeskripsikan bentuk kuadratik dalam  $u$  dan  $v$ . Karena  $u$  dan  $v$  merupakan bilangan yang sangat kecil, sehingga bentuk kuadratik tersebut bernilai sangat kecil, jadi nilai dari  $O(u^2, v^2, uv)$  akan mendekati nol dan dapat diabaikan. Sehingga, dari persamaan (3) tersebut diperoleh persamaan linear dalam bentuk matriks berikut.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix},$$

di mana  $A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix}$  merupakan matriks Jacobi yang dievaluasi di titik tetap  $(x^*, y^*)$ . Bentuk  $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$  disebut pelinearan pada sistem persamaan (3).

(Strogatz 2015)

### 2.3 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Dimisalkan Matriks  $A$  berukuran  $n \times n$ , dengan suatu vektor tak nol  $x$  di  $R^n$  disebut vektor eigen dari  $A$  jika untuk suatu skalar  $\lambda$ , yang disebut nilai eigen dari  $A$  berlaku

$$Ax = \lambda x. \quad (4)$$

Vektor  $x$  pada persamaan (4) merupakan vektor eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen  $\lambda$ . Untuk mencari nilai eigen dari matriks  $A$ , persamaan (4) dapat ditulis sebagai berikut.

$$(A - \lambda I)x = 0, \quad (5)$$

dengan  $I$  merupakan matriks identitas berukuran  $n \times n$ . Persamaan (5) mempunyai solusi tak nol jika dan hanya jika  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Persamaan (5) disebut sebagai persamaan karakteristik dari  $A$  (Tu 1994).

### 2.4 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Diberikan suatu sistem persamaan diferensial linear sebagai berikut

$$\dot{x} = ax + by, \quad (6)$$

$$\dot{y} = cx + dy, \quad (7)$$

dengan  $a, b, c, d$  adalah parameter. Sistem persamaan diferensial (6) dan (7) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\dot{x} = Ax, \quad (8)$$

dengan

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ dan } x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Berdasarkan persamaan (8), diperoleh persamaan karakteristik sebagai berikut

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0,$$

dengan

$$\tau = \text{trace}(A) = a + d = \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\Delta = \det(A) = ad - bc = \lambda_1 \lambda_2.$$

Sehingga didapat nilai eigen dari  $A$  sebagai berikut

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}, \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}.$$

Berdasarkan nilai  $\Delta = \det(A)$ ,  $\tau = \text{trace}(A)$ , nilai eigen  $\lambda_1$ , dan  $\lambda_2$  dapat ditinjau tiga kasus sebagai berikut :

### 1. Kasus I

Jika  $\Delta < 0$ , maka kedua nilai eigen real berbeda tanda, sehingga titik tetap merupakan titik sadel.

### 2. Kasus II

Jika  $\Delta > 0$ , maka nilai eigen dapat berupa bilangan real dengan tanda yang sama (titik tetap berupa simpul) atau bilangan kompleks *conjugate* (titik tetap bersifat spiral atau center).

- $D = \tau^2 - 4\Delta > 0$ 
  - Jika  $\tau > 0$  dan kedua nilai eigen real bernilai positif ( $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ ), maka titik tetap bersifat simpul tak stabil.
  - Jika  $\tau < 0$  dan kedua nilai eigen real bernilai negatif ( $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ ), maka titik tetap bersifat simpul stabil.
- $D = \tau^2 - 4\Delta < 0$ 
  - Jika  $\tau > 0$  dan kedua nilai eigen imajiner ( $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ ), maka titik tetap bersifat spiral tak stabil.
  - Jika  $\tau < 0$  dan kedua nilai eigen imajiner ( $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ ), maka titik tetap bersifat spiral stabil.
  - Jika  $\tau = 0$  dan kedua nilai eigen imajiner ( $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$ ), maka titik tetap bersifat center.
- $D = \tau^2 - 4\Delta = 0$

Parabola  $\tau^2 - 4\Delta = 0$  adalah garis batas antara simpul dan spiral. *Star nodes* dan *degenerate* terletak pada parabola ini. Jika kedua nilai eigen bernilai sama ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ), maka titik tetap bersifat simpul sejati.

### 3. Kasus III

Jika  $\Delta = 0$ , maka setidaknya ada satu nilai eigen yang sama dengan nol, maka titik tetap merupakan titik tak terisolasi.

(Strogatz 2015)



### **III METODE PENELITIAN**

Model mangsa-pemangsa yang akan dikaji dalam penyusunan karya ilmiah adalah model mangsa-pemangsa Lotka-Volterra dengan adanya pemanenan. Metode penelitian yang digunakan dalam penyusunan karya ilmiah ini mengikuti langkah-langkah sebagai berikut.

1. Merekonstruksi model mangsa-pemangsa dengan pemanenan.
2. Mencari dan menganalisis titik tetap model mangsa-pemangsa dengan pemanenan.
3. Melakukan simulasi numerik.

## 4.1 Model Matematika

Situasi di mana satu populasi berfungsi sebagai mangsa bagi populasi lain yang menjadi pemangsa dapat dimodelkan dengan model mangsa-pemangsa. Sepasang persamaan diferensial sederhana yang menggambarkan fenomena mangsa-pemangsa dikembangkan oleh Lotka dan Volterra pada pertengahan tahun 1925 (Murray 2002). Sebelum merekonstruksi model mangsa-pemangsa dengan pemanenan pada populasi mangsa dan pemangsa diberikan model dasar Lotka-Volterra sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx - axy, \quad (9)$$

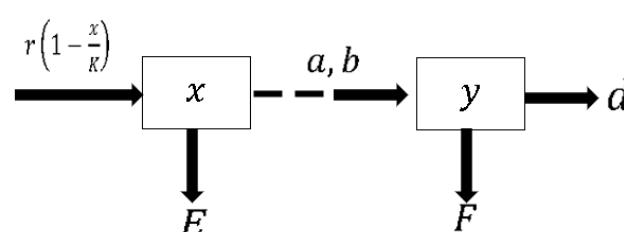
$$\frac{dy}{dt} = bxy - dy. \quad (10)$$

Model Lotka-Volterra pada persamaan (9) dan (10) sudah tidak relevan dalam kehidupan nyata saat ini, dikarenakan populasi mangsa tidak selamanya meningkat dan populasi pemangsa tidak selamanya menurun. Sehingga model tersebut dikembangkan dengan menambahkan fungsi logistik. Misalkan dalam suatu populasi terdapat  $x$  individu mangsa dengan kapasitas lingkungan ( $K$ ), sehingga kapasitas lingkungan yang tersisa adalah  $(K - x)$  individu. Terdapat  $\left(\frac{K-x}{K}\right)$  bagian lingkungan yang masih bisa ditinggali. Persamaan model mangsa-pemangsa dengan pemanenan diperoleh dari model Lotka-Volterra yang dimodifikasi dengan fungsi logistik dan pemanenan sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - Ex, \quad (11)$$

$$\frac{dy}{dt} = bxy - dy - Fy. \quad (12)$$

Parameter  $a, E, b, d$ , dan  $F$  bernilai positif. Persamaan (11) dan (12) dapat digambarkan pada diagram kompartemen berikut :



Gambar 1 Diagram kompartemen model mangsa-pemangsa dengan pemanenan (diadopsi dari Li, B *et al.* 2015)



Gambar 1 menunjukkan populasi mangsa tumbuh secara logistik  $rx \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ ,

dengan  $r$  merupakan laju pertumbuhan intrinsik dan kemudian akan berkurang sebesar  $K$  Brauer dan Castillo-Chaves (2012). Populasi mangsa berkurang sebesar  $a$  (kematian mangsa) dan laju pemanenan mangsa ( $E$ ). Populasi pemangsa bertambah sebesar  $b$  dan berkurang sebesar  $d$  (kematian alami pemangsa) dan pemanenan pemangsa ( $F$ ).

#### 4.2 Penondimensionalan Model

Penondimensionalan merupakan metode untuk menghilangkan dimensi parameter-parameter sehingga dapat dilakukan operasi matematis antar parameternya. Penondimensionalan persamaan (11) dan (12) diawali dengan memperkenalkan variabel tak berdimensi sebagai berikut

$$\bar{x} = \frac{x}{K}, \bar{y} = \frac{ya}{r}, \bar{t} = tr,$$

dan

$$\bar{s} = \frac{d}{r}, \bar{m} = \frac{bK}{r}, \bar{Q} = \frac{E}{r}, \bar{W} = \frac{F}{r}.$$

Dari lampiran 1, persamaan (11) dan (12) dapat dituliskan menjadi

$$\frac{dx}{dt} = x(1 - x - y - Q), \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-s + mx - W). \quad (14)$$

Keterangan parameter persamaan (13) dan (14) disajikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Keterangan dari parameter persamaan (13) dan (14)

Parameter	Keterangan
$x$	Proporsi populasi mangsa pada waktu $t$
$y$	Proporsi populasi pemangsa pada waktu $t$
$s$	Laju kematian alami pemangsa
$m$	Laju interaksi antara mangsa dan pemangsa
$Q$	Laju pemanenan populasi mangsa
$W$	Laju pemanenan populasi pemangsa

Tanda bar pada setiap parameter dan variabel persamaan (13) dan (14) dihilangkan. Nilai  $0 < Q < 1$  dan parameter  $s, m, Q$ , dan  $W$  memiliki pengertian ekologi yang sama dengan  $b, d, E$ , dan  $F$ . Semua parameter Tabel 1 bernilai positif.

#### 4.3 Penentuan Titik Tetap Model

Titik tetap sistem persamaan (13) dan (14) dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan  $\frac{dx}{dt} = 0$  dan  $\frac{dy}{dt} = 0$  sebagai berikut :

$$x(1 - x - y - Q) = 0, \quad (15)$$



$$y(-s + mx - W) = 0. \quad (16)$$

Sehingga didapatkan tiga titik tetap yaitu  $T_1(0,0)$ ,  $T_2(1-Q,0)$ , dan  $T_3\left(\frac{s+W}{m}, \frac{m-s-W-mQ}{m}\right)$ . Penentuan titik tetap model dapat dilihat lebih jelas pada Lampiran 2.

#### 4.4 Penentuan Matriks Jacobi

Model mangsa-pemangsa dengan pemanenan dapat dituliskan sebagai berikut

$$\dot{x} = P(x,y) = (1-x-y-Q), \quad (17)$$

$$\dot{y} = R(x,y) = y(-s+mx-W). \quad (18)$$

Selanjutnya dari persamaan (17) dan (18) akan dicari matriks Jacobi yang dievaluasi pada setiap titik tetapnya sebagai berikut

$$J = \begin{pmatrix} 1-2x-y-Q & -x \\ my & mx-s-W \end{pmatrix}, \quad (19)$$

di mana  $x$  dan  $y$  masing-masing merupakan koordinat titik tetap. Penentuan matriks Jacobi lebih jelas dapat dilihat pada Lampiran 3.

#### 4.5 Analisis Kestabilan Titik Tetap

Kestabilan titik tetap dianalisis dengan melihat nilai eigen yang didapatkan dari matriks Jacobi yang dievaluasi pada setiap titik tetap. Analisis kestabilan titik tetap lebih jelas dapat dilihat pada Lampiran 4.

##### Kestabilan Titik Tetap $T_1(0,0)$

Titik tetap  $T_1(0,0)$  disubstitusikan pada matriks Jacobi persamaan (19) dan diperoleh matriks Jacobi berikut :

$$J_{(T_1)} = \begin{pmatrix} 1-Q & 0 \\ 0 & -s-W \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian persamaan karakteristik  $\det(J_{(T_1)} - \lambda I) = 0$  diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = 1-Q \text{ dan } \lambda_2 = -s-W.$$

Nilai parameter  $s$ ,  $Q$  dan  $W$  diasumsikan bernilai positif dan  $0 < Q < 1$ . Diperoleh  $\lambda_1 > 0$  dan  $\lambda_2 < 0$  sehingga titik tetap  $T_1(0,0)$  kestabilannya bersifat sadel.

##### Kestabilan Titik Tetap $T_2(1-Q,0)$

Titik tetap  $T_2(1-Q,0)$  disubstitusikan ke dalam persamaan (19) dan diperoleh matriks Jacobi berikut :

$$J_{(T_2)} = \begin{pmatrix} Q-1 & Q-1 \\ 0 & m-mQ-s-W \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian persamaan karakteristik  $\det(J_{(T_2)} - \lambda I) = 0$  diperoleh nilai eigen sebagai berikut :

$$\lambda_1 = Q-1 \text{ dan } \lambda_2 = m-mQ-s-W.$$



Nilai parameter  $s, m$  dan  $W$  diasumsikan bernilai positif dan  $0 < Q < 1$ . Diperoleh  $\lambda_1 < 0$  dan  $T_2(1 - Q, 0)$  bersifat sadel jika  $m > \frac{s+W}{1-Q}$  dan bersifat simpul stabil jika  $m < \frac{s+W}{1-Q}$ .

### Kestabilan Titik Tetap $T_3(\frac{s+W}{m}, \frac{m-mQ-s-W}{m})$

Titik tetap  $T_3(\frac{s+W}{m}, \frac{m-mQ-s-W}{m})$  disubstitusikan ke dalam persamaan (19) dan diperoleh matriks Jacobi berikut :

$$J_{T_3} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$$

dengan

$$A_1 = \frac{-s - W}{m},$$

$$A_2 = \frac{-s - W}{m},$$

$$A_3 = m - mQ - s - W.$$

$$A_4 = 0.$$

Berikut ini akan ditentukan  $D$  dan  $\tau$ . Berdasarkan  $J_{(T_3)}$  diperoleh :

$$\Delta = \det(J_{(T_3)})$$

$$= A_4 - A_2 A_3 \\ = \frac{sm - smQ - s^2 - 2sW + mW - mWQ - W^2}{m},$$

$$\tau = \text{trace}(J_{T_3})$$

$$= A_1 + A_4 \\ = \frac{-s - W}{m}.$$

Sehingga

$$D = \tau^2 - 4\Delta \\ = \left(\frac{-s - W}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{sm - smQ - s^2 - 2sW + mW - mWQ - W^2}{m}\right).$$

Sistem persamaan diferensial (13) dan (14) di sekitar  $T_3(\frac{s+W}{m}, \frac{m-mQ-s-W}{m})$  bersifat :

- i. Simpul stabil jika  $D > 0$  dan  $\tau < 0$ .
- ii. Spiral stabil jika  $D < 0$  dan  $\tau < 0$ .

## 4.6 Simulasi Numerik

Simulasi numerik dilakukan dengan cara mensubstitusikan nilai-nilai parameter, yaitu merubah salah satu nilai parameter sedangkan nilai parameter yang lain bernilai tetap. Parameter yang akan dilihat perubahannya dalam penelitian ini yaitu parameter laju pemanenan mangsa ( $Q$ ) dan laju pemanenan pemangsa ( $W$ ).

Simulasi numerik model dalam penelitian ini dilakukan menggunakan *Software Wolfram Mathematica 12.3*. Nilai parameter yang digunakan dapat dilihat pada Tabel 2.

Tabel 2 Pemilihan nilai parameter  $s$ ,  $m$ ,  $Q$  dan  $W$

Simulasi	$s$	$m$	$Q$	$W$
1a	0.6	0.95	0	0
1b	0.8	0.95	0	0
1c	1	0.95	0	0
2a	0.6	0.95	0.1	0
2b	0.6	0.95	0.3	0
2c	0.6	0.95	0.5	0
3a	0.6	0.95	0	0.1
3b	0.6	0.95	0	0.3
3c	0.6	0.95	0	0.5
4a	0.6	0.95	0.1	0.1
4b	0.6	0.95	0.3	0.1
4c	0.6	0.95	0.5	0.1
5a	0.6	0.95	0.1	0.1
5b	0.6	0.95	0.1	0.3
5c	0.6	0.95	0.1	0.5

Berdasarkan Tabel 2, diketahui bahwa simulasi ini bertujuan untuk mengetahui pengaruh perubahan nilai parameter  $Q$  dan  $W$  terhadap populasi. Simulasi 1a-1c merupakan simulasi tanpa pemanenan yang digunakan sebagai pembanding terhadap simulasi dengan pemanenan. Simulasi 2a-2c merupakan simulasi dengan pemanenan hanya pada mangsa sedangkan simulasi 3a-3c pemanenan hanya pada pemangsa. Simulasi 4a-4c merupakan simulasi dengan pemanenan mangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok dan simulasi 5a-5c pemanenan pemangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok.

Dinamika populasi mangsa-pemangsa diamati menggunakan bidang fase dan grafik solusi yang menunjukkan hubungan banyaknya populasi terhadap waktu  $t$ . Nilai awal yang digunakan pada masing-masing simulasi yaitu  $x(0) = 1.2$  dan  $y(0) = 0.7$  yang berturut-turut menunjukkan jumlah awal populasi mangsa dan pemangsa.

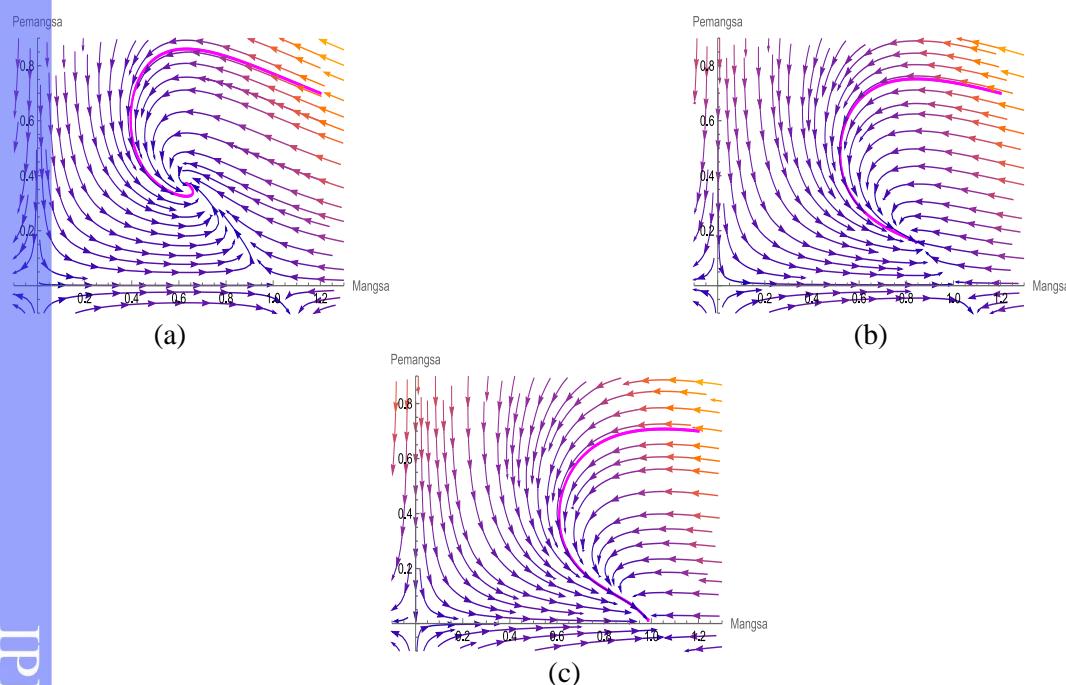
### Simulasi 1. Simulasi Model Mangsa-Pemangsa Tanpa Pemanenan

Simulasi model mangsa-pemangsa tanpa pemanenan merupakan simulasi di mana nilai laju pemanenan mangsa ( $Q = 0$ ) dan laju pemanenan pemangsa ( $W = 0$ ). Terdapat dua parameter yang berpengaruh yaitu laju kematian alami pemangsa ( $s$ ) dan laju interaksi mangsa-pemangsa ( $m$ ). Pada simulasi 1 akan dilihat pengaruh kematian alami pemangsa terhadap populasi dengan meningkatkan nilai  $s$  sedangkan nilai  $m$  bernilai tetap.

Tabel 3 Titik tetap dan kestabilan simulasi 1

Simulasi	1a	1b	1c
Nilai $s$	0.6	0.8	1
Nilai $m$	0.95	0.95	0.95
Nilai $Q$	0	0	0
Nilai $W$	0	0	0
Titik Tetap $T_1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Sadel
Titik Tetap $T_2$	(1,0)	(1,0)	(1,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Simpul Stabil
Titik Tetap $T_3$	(0.63,0.37)	(0.84,0.16)	(1.05,-0.05)
Kestabilan	Spiral Stabil	Simpul Stabil	-

Tabel 3 memperlihatkan bahwa sistem mengalami perubahan kestabilan yaitu titik tetap  $T_2$  berubah dari sadel pada simulasi 1b menjadi simpul stabil pada simulasi 1c sedangkan titik tetap  $T_3$  berubah dari spiral stabil pada simulasi 1a menjadi simpul stabil pada simulasi 1b. Pergerakan kurva dan perubahan bentuk kestabilan titik tetap dapat dilihat lebih jelas pada gambar bidang fase berikut.

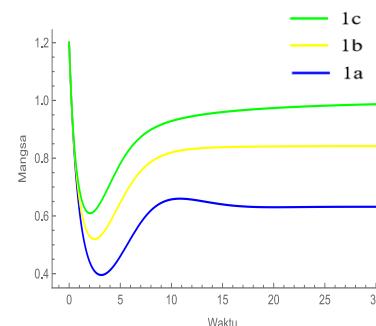


Gambar 6 Bidang fase simulasi (a) 1a, (b) 1b, dan (c) 1c



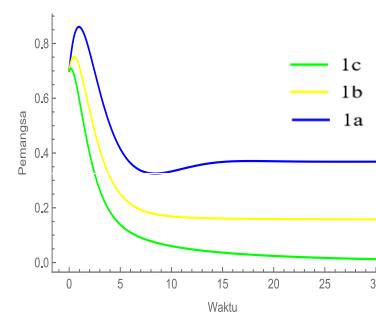
Gambar 6 memperlihatkan bidang fase simulasi 1. Gambar 6 bagian (a) menunjukkan di titik  $T_1(0,0)$  terdapat arah panah yang mendekati dan menjauhi titik tersebut, sehingga kestabilannya bersifat sadel. Trayektori di sekitar  $T_2(1,0)$  memiliki arah panah yang berlawanan, sehingga  $T_2$  bersifat sadel. Selanjutnya pada  $T_3(0.63,0.37)$  membentuk spiral dengan arah masuk mendekati titik tetap stabil  $T_3$ , sehingga kestabilannya bersifat spiral stabil.

Gambar 6 bagian (b) menunjukkan kestabilan di sekitar titik tetap  $T_1(0,0)$  dan  $T_2(1,0)$  memiliki kestabilan yang bersifat sama yaitu sadel, sedangkan  $T_3(0.84,0.16)$  bersifat simpul stabil. Gambar 6 bagian (c), terlihat kurva bergerak menuju titik tetap yang stabil  $T_2(1,0)$ .



Gambar 7 Grafik solusi simulasi 1 populasi mangsa

Gambar 7 menunjukkan grafik solusi populasi mangsa sub simulasi 1a, 1b, dan 1c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 1.2 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Memperbesar nilai laju kematian alami pemangsa ( $s$ ) mengakibatkan populasi mangsa meningkat dan koeksistensi dalam jangka waktu yang panjang.



Gambar 8 Grafik solusi simulasi 1 populasi pemangsa

Gambar 8 menunjukkan grafik solusi populasi pemangsa sub simulasi 1a, 1b, dan 1c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 0.7 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Memperbesar nilai laju kematian alami pemangsa ( $s$ ) mengakibatkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya mengalami kepunahan. Pemangsa mengalami kepunahan nilai ( $s = 1$ ) lebih besar dari nilai laju interaksi mangsa-pemangsa ( $m = 0.95$ ).

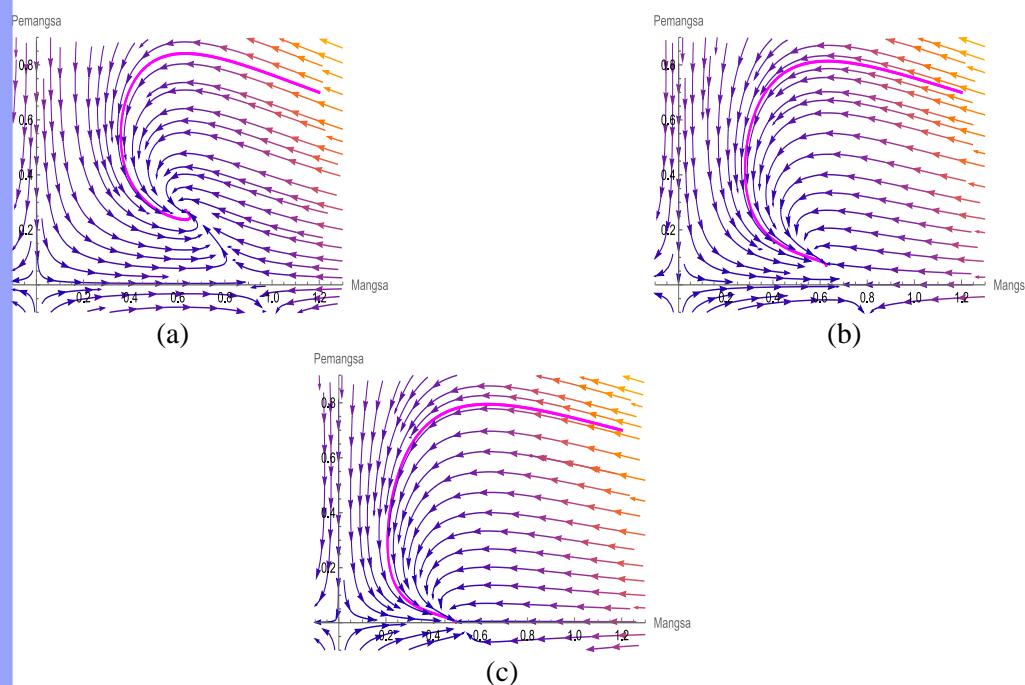
## Simulasi 2. Simulasi Model Mangsa-Pemangsa dengan Pemanenan Hanya pada Mangsa

Simulasi 2 dilakukan dengan mengubah nilai laju pemanenan mangsa ( $Q$ ) sedangkan parameter  $s$  dan  $m$  bernilai tetap.

Tabel 4 Titik tetap dan kestabilan simulasi 2

Simulasi	2a	2b	2c
Nilai $s$	0.6	0.6	0.6
Nilai $m$	0.95	0.95	0.95
Nilai $Q$	0.1	0.3	0.5
Nilai $\left(\frac{s}{1-Q}\right)$	0.67	0.86	1.2
Titik Tetap $T_1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Sadel
Titik Tetap $T_2$	(0.9,0)	(0.7,0)	(0.5,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Simpul Stabil
Titik Tetap $T_3$	(0.63,0.27)	(0.63,0.07)	(0.63,-0.13)
Kestabilan	Spiral Stabil	Simpul Stabil	-

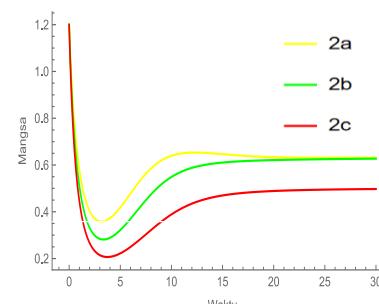
Tabel 4 memperlihatkan bahwa sistem mengalami perubahan kestabilan pada titik tetap  $T_2$  dari simulasi 2b yang semula bersifat sadel menjadi simpul stabil pada simulasi 2c. Selanjutnya pada titik tetap  $T_3$  berubah dari spiral stabil pada simulasi 2a menjadi simpul stabil pada simulasi 2b.



Gambar 9 Bidang fase simulasi (a) 2a, (b) 2b, dan (c) 2c

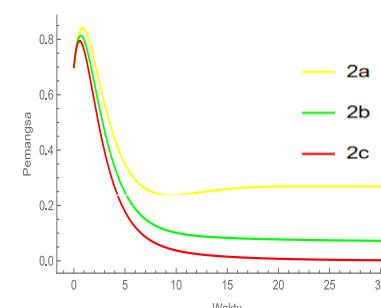
Bidang fase Gambar 9 memperlihatkan kestabilan titik tetap simulasi 2. Gambar 9 bagian (a) menunjukkan di sekitar titik tetap  $T_1(0,0)$  terdapat arah panah yang mendekati dan menjauhi titik tersebut, sehingga kestabilannya bersifat sadel. Trayektori di sekitar titik tetap  $T_2(0.9,0)$  memiliki arah panah yang berlawanan, sehingga  $T_2$  bersifat sadel. Selanjutnya pada titik tetap  $T_3(0.63,0.27)$  membentuk spiral dengan arah masuk mendekati titik tetap stabil  $T_3$ , sehingga kestabilannya bersifat spiral stabil.

Gambar 9 bagian (b) menunjukkan kestabilan di sekitar titik tetap  $T_1(0,0)$  dan  $T_2(0.7,0)$  memiliki kestabilan yang bersifat sama yaitu sadel, sedangkan  $T_3(0.63,0.07)$  bersifat simpul stabil. Gambar 9 bagian (c), terlihat kurva bergerak menuju titik tetap yang stabil  $T_2(0.5,0)$ .



Gambar 10 Grafik solusi simulasi 2 populasi mangsa

Gambar 10 menunjukkan grafik solusi populasi mangsa sub simulasi 2a, 2b, dan 2c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 1.2 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan mangsa ( $Q$ ) mengakibatkan populasi yang semula konstan kemudian berkurang saat nilai pemanenan 0.5 dan konsistensi dalam jangka waktu yang lama.



Gambar 11 Grafik solusi simulasi 2 populasi pemangsa

Gambar 11 menunjukkan grafik solusi populasi pemangsa sub simulasi 2a, 2b, dan 2c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 0.7 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan mangsa ( $Q$ ) mengakibatkan populasi semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai nilai 0.5. Kepunahan terjadi karena nilai  $\left(\frac{s}{1-Q}\right) = 1.2$  lebih besar dari nilai laju interaksi mangsa-pemangsa  $m = 0.95$ .

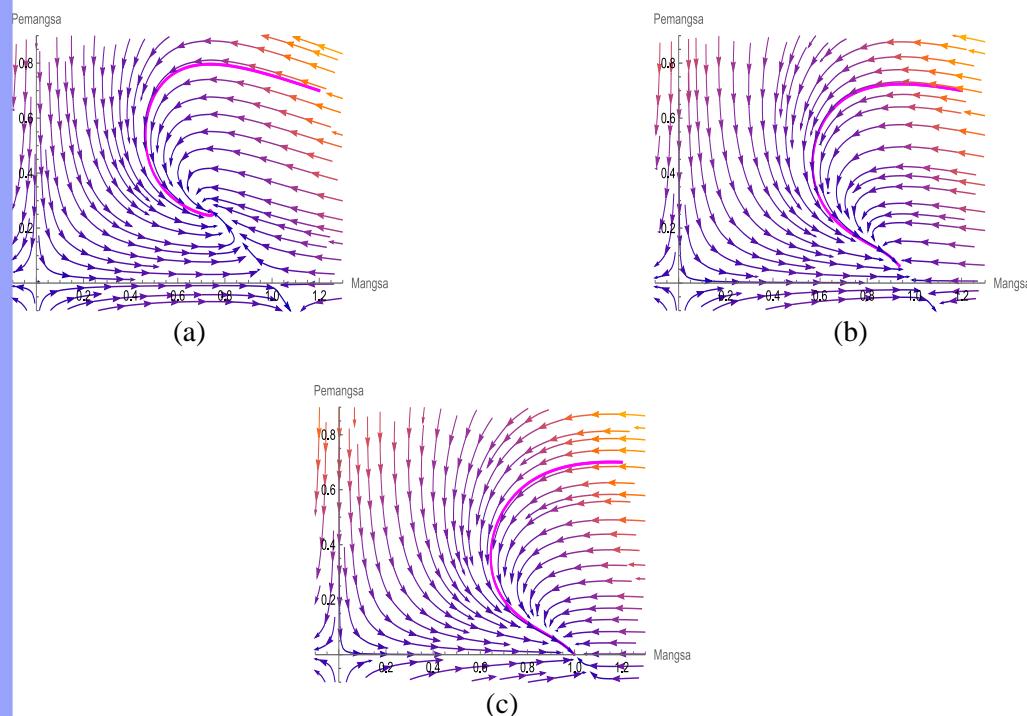
### Simulasi 3. Simulasi Model Mangsa-Pemangsa dengan Pemanenan Hanya pada Populasi Pemangsa

Simulasi 3 dilakukan dengan mengubah-ubah nilai laju pemanenan pemangsa ( $W$ ) sedangkan parameter  $s$  dan  $m$  bernilai tetap.

Tabel 5 Titik tetap dan kestabilan simulasi 3

Simulasi	3a	3b	3c
Nilai $s$	0.6	0.6	0.6
Nilai $m$	0.95	0.95	0.95
Nilai $W$	0.1	0.3	0.5
Nilai $s + W$	0.7	0.9	1.1
Titik Tetap $T_1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Sadel
Titik Tetap $T_2$	(1,0)	(1,0)	(1,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Simpul Stabil
Titik Tetap $T_3$	(0.74,0.26)	(0.947,0.053)	(1.16,-0.16)
Kestabilan	Spiral Stabil	Simpul Stabil	-

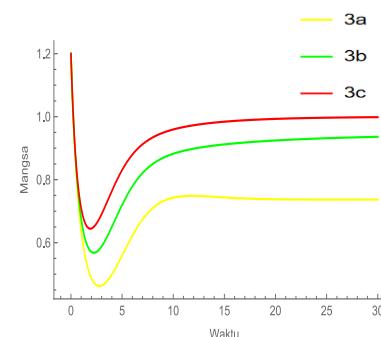
Tabel 5 menunjukkan adanya perubahan kestabilan pada titik tetap  $T_2$  dari yang semula bersifat sadel pada simulasi 3b menjadi simpul stabil pada simulasi 3c. Selanjutnya pada titik tetap  $T_3$  mengalami perubahan kestabilan dari spiral stabil pada simulasi 3a menjadi simpul stabil pada simulasi 3b.



Gambar 12 Bidang fase simulasi (a) 3a, (b) 3b, dan (c) 3c

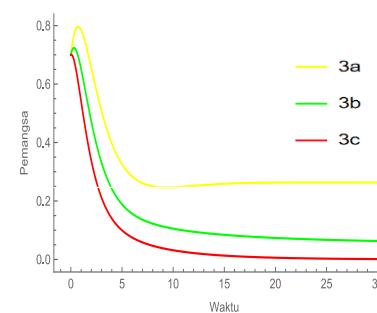
Bidang fase pada Gambar 12 memperlihatkan kestabilan titik tetap simulasi 3. Gambar 8 bagian (a) memperlihatkan di sekitar titik  $T_1(0,0)$  terdapat arah panah yang mendekati dan menjauhi  $T_1$  sehingga kestabilannya bersifat sadel. Trayektori di sekitar  $T_2(1,0)$  memiliki arah panah yang berlawanan, sehingga  $T_2$  bersifat sadel. Selanjutnya pada  $T_3(0.74,0.26)$  membentuk spiral dengan arah panah masuk mendekati titik tetap stabil  $T_3$ , sehingga kestabilannya bersifat spiral stabil.

Gambar 12 bagian (b) menunjukkan di sekitar titik tetap  $T_1(0,0)$  dan  $T_2(1,0)$  memiliki kestabilan yang sama yaitu sadel, sedangkan  $T_3(0.947,0.053)$  bersifat simpul stabil. Gambar 12 bagian (c), terlihat kurva bergerak menuju titik tetap yang stabil  $T_2(1,0)$ .



Gambar 13 Grafik solusi simulasi 3 populasi mangsa

Gambar 9 menunjukkan grafik solusi populasi mangsa sub simulasi 3a, 3b, dan 3c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 1.2 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan pemangsa ( $W$ ) mengakibatkan populasi mengalami peningkatan dan tidak punah dalam jangka waktu yang lama.



Gambar 14 Grafik solusi simulasi 3 populasi pemangsa

Gambar 14 menunjukkan grafik solusi populasi pemangsa sub simulasi 3a, 3b, dan 3c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 0.7 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan pemangsa ( $W$ ) mengakibatkan populasi semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5. Kepunahan terjadi karena nilai  $s + W = 1.1$  lebih besar dari nilai laju interaksi mangsa-pemangsa  $m = 0.95$ .

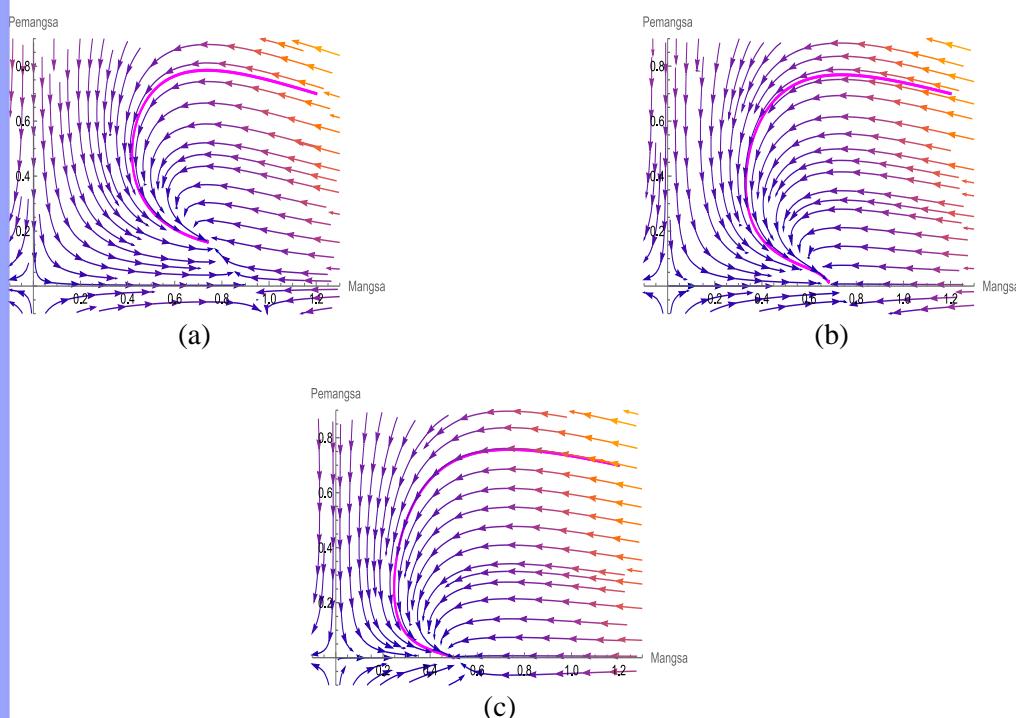
#### Simulasi 4. Simulasi Model Mangsa-Pemangsa Pemanenan Dua Populasi dengan Pemanenan Mangsa Diperbesar

Simulasi 4 dilakukan dengan meningkatkan nilai laju pemanenan mangsa ( $Q$ ) sedangkan nilai parameter  $s$ ,  $m$  dan  $W$  bernilai tetap.

Tabel 6 Titik tetap dan kestabilan simulasi 4

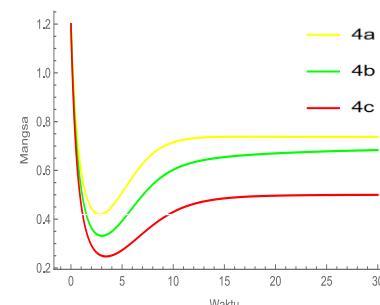
Simulasi	4a	4b	4c
Nilai $s$	0.6	0.6	0.6
Nilai $m$	0.95	0.95	0.95
Nilai $Q$	0.1	0.3	0.5
Nilai $W$	0.1	0.1	0.1
Nilai $\frac{(s+W)}{(1-Q)}$	0.78	1	1.4
Titik Tetap $T_1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Sadel
Titik Tetap $T_2$	(0.9,0)	(0.7,0)	(0.5,0)
Kestabilan	Sadel	Simpul Stabil	Simpul Stabil
Titik Tetap $T_3$	(0.74,0.16)	(0.74,-0.03)	(0.74,-0.24)
Kestabilan	Simpul Stabil	-	-

Tabel 6 menunjukkan terjadi perubahan sifat kestabilan titik tetap  $T_2$  dari sadel pada simulasi 4a menjadi simpul stabil pada simulasi 4b.



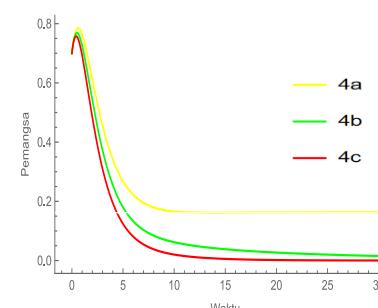
Gambar 15 Bidang fase simulasi (a) 4a, (b) 4b, dan (c)

Bidang fase Gambar 15 memperlihatkan kestabilan titik tetap simulasi 4. Gambar 15 bagian (a) terlihat di titik  $T_1(0,0)$  terdapat arah panah yang mendekati dan menjauhi titik tersebut, sehingga kestabilitannya bersifat sadel. Trayektori di sekitar  $T_2(0.9,0)$  memiliki arah panah yang berlawanan, sehingga  $T_2$  bersifat sadel. Selanjutnya pada  $T_3(0.74,0.16)$  arah panah mendekati titik tetap, sehingga  $T_3$  bersifat simpul stabil. Gambar 15 bagian (b) menunjukkan kurva bergerak menuju titik tetap stabil  $T_2(0.7,0)$ . Gambar 15 (c) menunjukkan kurva bergerak menuju titik tetap stabil di titik  $T_2(0.5,0)$ .



Gambar 16 Grafik solusi simulasi 4 populasi mangsa

Gambar 16 menunjukkan grafik solusi populasi mangsa sub simulasi 4a, 4b, dan 4c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 1.2 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan mangsa ( $Q$ ) mengakibatkan populasi mangsa semakin berkurang namun koeksistensi dalam jangka waktu yang lama.



Gambar 17 Grafik solusi simulasi 4 populasi pemangsa

Gambar 17 menunjukkan grafik solusi populasi pemangsa sub simulasi 4a, 4b, dan 4c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 0.7 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan mangsa ( $Q$ ) mengakibatkan populasi semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai nilai 0.3. Kepunahan terjadi karena nilai  $\left(\frac{s+w}{1-Q}\right) = 1$  lebih besar dari nilai laju interaksi mangsa-pemangsa  $m = 0.95$ .

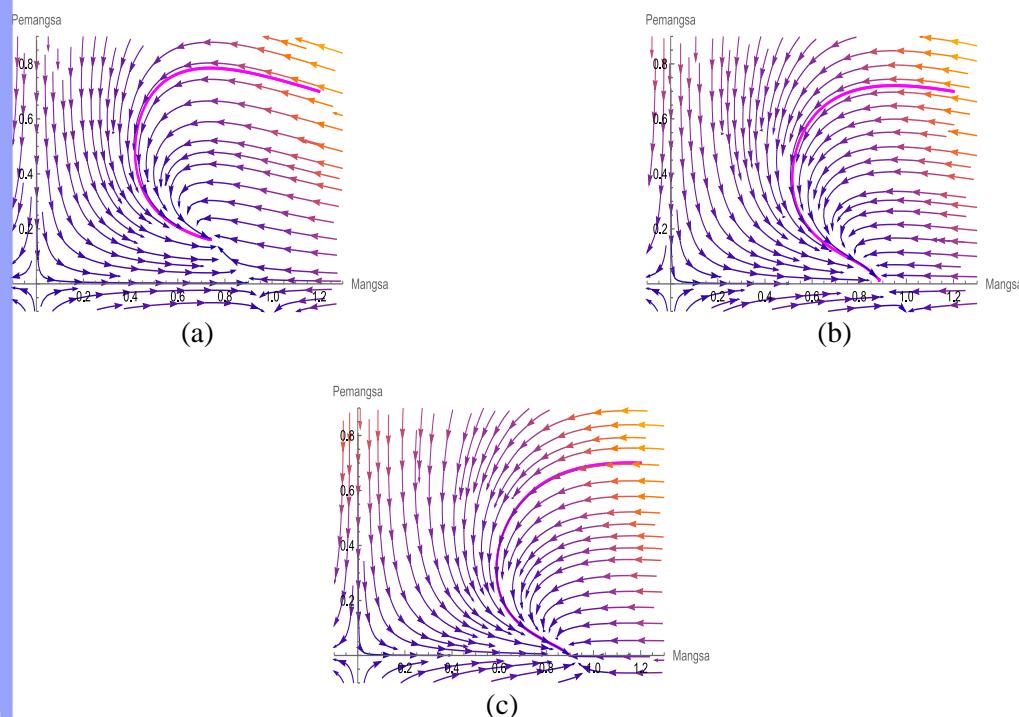
## Simulasi 5. Simulasi Model Mangsa-Pemangsa Pemanenan Dua Populasi dengan Pemanenan Pemangsa Diperbesar

Simulasi 5 dilakukan dengan meningkatkan nilai laju pemanenan pemangsa ( $W$ ) sedangkan nilai parameter  $s, m$  dan  $W$  bernilai tetap.

Tabel 7 Titik tetap dan kestabilan simulasi 5

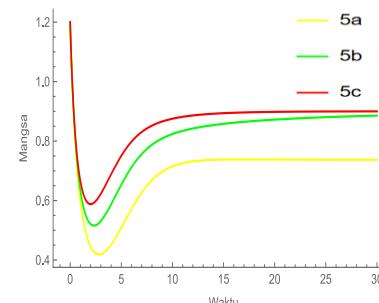
Simulasi	5a	5b	5c
Nilai $s$	0.6	0.6	0.6
Nilai $m$	0.95	0.95	0.95
Nilai $Q$	0.1	0.1	0.1
Nilai $W$	0.1	0.3	0.5
Nilai $\frac{(s+W)}{(1-Q)}$	0.78	1	1.22
Titik Tetap $T_1$	(0,0)	(0,0)	(0,0)
Kestabilan	Sadel	Sadel	Sadel
Titik Tetap $T_2$	(1,0)	(1,0)	(1,0)
Kestabilan	Sadel	Simpul Stabil	Simpul Stabil
Titik Tetap $T_3$	(0.74,0.16)	(0.95,-0.05)	(1.16,-0.26)
Kestabilan	Simpul Stabil	-	-

Tabel 7 menunjukkan terjadi perubahan sifat kestabilan titik tetap  $T_2$  dari sadel pada simulasi 4a menjadi simpul stabil pada simulasi 4b.



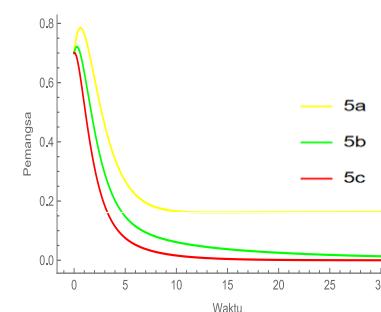
Gambar 18 Bidang fase simulasi (a) 5a, (b) 5b, dan (c) 5c

Bidang fase yang diperoleh pada Gambar 18 memperlihatkan kestabilan titik tetap simulasi 4. Gambar 15 bagian (a) terlihat di sekitar titik  $T_1(0,0)$  terdapat arah panah yang mendekati dan menjauhi titik tersebut, sehingga kestabilannya bersifat sadel. Trayektori di sekitar  $T_2(1,0)$  memiliki arah panah yang berlawanan, sehingga  $T_2$  bersifat sadel. Selanjutnya di  $T_3(0.74,0.16)$  arah panah mendekati titik tetap, sehingga  $T_3$  bersifat simpul stabil. Gambar 15 bagian (b) dan (c) menunjukkan kurva bergerak menuju titik tetap stabil  $T_2(1,0)$ .



Gambar 19 Grafik solusi simulasi 5 populasi mangsa

Gambar 19 menunjukkan grafik solusi populasi mangsa sub simulasi 5a, 5b, dan 5c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 1.2 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan pemangsa ( $W$ ) mengakibatkan populasi meningkat dan koeksistensi dalam jangka waktu yang panjang.



Gambar 20 Grafik solusi simulasi 5 populasi pemangsa

Gambar 20 menunjukkan grafik solusi populasi pemangsa sub simulasi 5a, 5b, dan 5c. Gambar tersebut menunjukkan ke tiga kurva bergerak dari nilai awal 0.7 menuju titik stabil masing-masing sub simulasi. Meningkatkan nilai pemanenan pemangsa ( $W$ ) mengakibatkan populasi semakin berkurang hingga akhirnya punah ketika pemanenan mencapai nilai 0.3. Kepunahan terjadi karena nilai  $\left(\frac{s+W}{1-Q}\right) = 1$  lebih besar dari nilai laju interaksi mangsa-pemangsa  $m = 0.95$ .

## 4.7 Analisis Perbandingan

### Perbandingan Simulasi 1a dan Simulasi 2 serta Perbandingan Simulasi 1a dan Simulasi 4

Analisis perbandingan dilakukan untuk melihat pengaruh adanya pemanenan terhadap dinamika populasi. Perbandingan pertama yaitu simulasi 1a (tanpa pemanenan) dengan simulasi 2 (pemanenan hanya pada mangsa) yang disajikan pada Tabel 8, kemudian perbandingan simulasi 1a dengan simulasi 4 (pemanenan mangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok) disajikan pada Tabel 9.

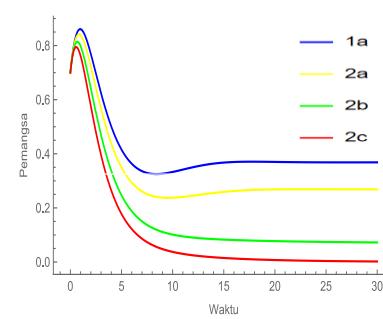
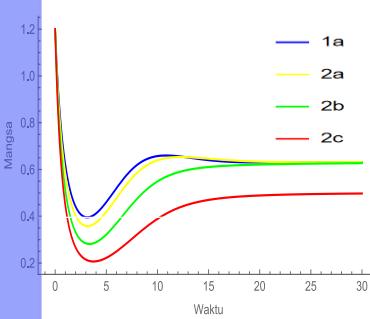
Tabel 8 Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 2

Simulasi	1a	2a	2b	2c
Nilai ( $Q$ )	0	0.1	0.3	0.5
Nilai ( $W$ )	0	0	0	0
Titik Tetap Stabil	$T_3(0.63,0.37)$	$T_3(0.63,0.27)$	$T_3(0.63,0.07)$	$T_2(0.5,0)$

Tabel 9 Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 4

Simulasi	1a	4a	4b	4c
Nilai ( $Q$ )	0	0.1	0.3	0.5
Nilai ( $W$ )	0	0.1	0.1	0.1
Titik Tetap Stabil	$T_3(0.63,0.37)$	$T_3(0.74,0.16)$	$T_2(0.7,0)$	$T_2(0.5,0)$

Tabel 8 menunjukkan pemanenan hanya pada mangsa mengakibatkan populasi yang semula konstan di 0.63 turun menjadi 0.5 sedangkan pada populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai nilai 0.5. Tabel 9 menunjukkan dengan pemanenan mangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok mengakibatkan populasi mangsa meningkat kemudian turun menjadi 0.5 sedangkan pada populasi pemangsa akan semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai nilai 0.5.



Gambar 21 Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 2



Gambar 22 Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 4

Gambar 21 menunjukkan pemanenan hanya pada mangsa mengakibatkan populasi mangsa yang semula konstan mengalami sedikit penurunan dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan pada populasi pemangsa akan semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5.

Gambar 22 menunjukkan pemanenan mangsa diperbesar pada pemanenan dua populasi mengakibatkan populasi mangsa meningkat kemudian mengalami penurunan namun koeksistensi dalam jangka waktu yang panjang sedangkan populasi pemangsa akan semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai nilai 0.3.

### Perbandingan Simulasi 1a dan Simulasi 3 serta Perbandingan Simulasi 1a dan Simulasi 5

Analisis perbandingan dilakukan untuk mengetahui pengaruh adanya pemanenan terhadap dinamika populasi mangsa dan pemangsa. Perbandingan pertama yaitu simulasi 1a (tanpa pemanenan) dan simulasi 3 (pemanenan hanya pada pemangsa) yang disajikan pada Tabel 10, kemudian perbandingan simulasi 1a dan simulasi 5 (pemanenan pemangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok) disajikan pada Tabel 11.

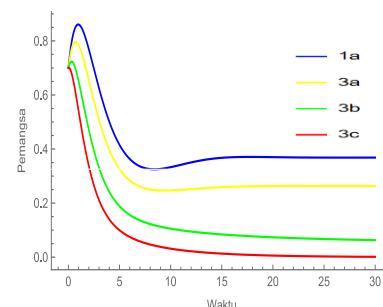
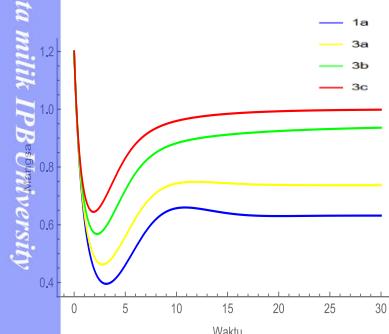
Tabel 10 Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 3

Simulasi	1a	3a	3b	3c
Nilai ( $Q$ )	0	0	0	0
Nilai ( $W$ )	0	0.1	0.3	0.5
Titik Tetap Stabil	$T_3(0.63, 0.37)$	$T_3(0.74, 0.26)$	$T_3(0.947, 0.053)$	$T_3(1, 0)$

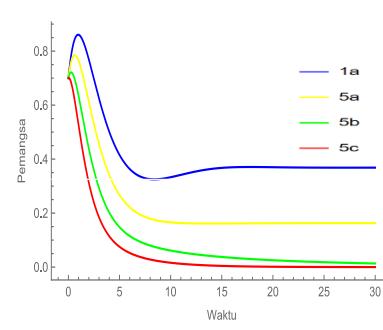
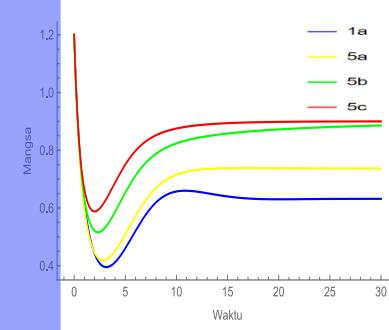
Tabel 11 Perbandingan simulasi 1a dan simulasi 5

Simulasi	1a	5a	5b	5c
Nilai ( $Q$ )	0	0.1	0.1	0.1
Nilai ( $W$ )	0	0.1	0.3	0.5
Titik Tetap Stabil	$T_3(0.63, 0.37)$	$T_3(0.74, 0.16)$	$T_2(1, 0)$	$T_2(1, 0)$

Tabel 10 menunjukkan dengan pemanenan hanya pada pemangsa mengakibatkan populasi mangsa semakin meningkat sedangkan pada populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5. Tabel 11 menunjukkan dengan pemanenan pemangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok mengakibatkan populasi mangsa semakin meningkat sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah ketika nilai pemanenan mencapai 0.3.



Gambar 23 Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 3



Gambar 24 Perbandingan grafik solusi simulasi 1a dan 5

Gambar 23 menunjukkan dengan pemanenan hanya pada mangsa mengakibatkan populasi mangsa semakin meningkat sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5. Gambar 24 menunjukkan dengan pemanenan pemangsa diperbesar pada pemanenan dua populusi mengakibatkan populasi mangsa semakin meningkat dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.3.



## V SIMPULAN DAN SARAN

### 5.1 Simpulan

Model mangsa-pemangsa dengan pemanenan mempunyai tiga titik tetap yaitu  $T_1$ ,  $T_2$ , dan  $T_3$ . Kestabilan titik tetap  $T_1$  bersifat sadel, kestabilan titik tetap  $T_2$  dapat bersifat sadel atau simpul stabil, dan kestabilan titik tetap  $T_3$  dapat bersifat simpul stabil atau spiral stabil. Model mangsa-pemangsa tanpa pemanenan hanya dipengaruhi dua parameter yaitu laju interaksi mangsa-pemangsa ( $m$ ) dan laju kematian alami pemangsa ( $s$ ). Simulasi 1 hanya melihat pengaruh parameter ( $s$ ) terhadap populasi dan digunakan sebagai pembanding terhadap model dengan adanya pemanenan.

Pemanenan hanya pada mangsa mengakibatkan populasi mangsa yang semula konstan mengalami sedikit penurunan dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5. Pemanenan mangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok mengakibatkan populasi mangsa meningkat kemudian mengalami penurunan dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.3.

Pemanenan hanya pada pemangsa mengakibatkan populasi mangsa meningkat dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan pada populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.5. Pemanenan pemangsa diperbesar pada pemanenan dua kelompok mengakibatkan populasi mangsa semakin meningkat dan koeksistensi dalam jangka waktu yang lama sedangkan populasi pemangsa semakin berkurang hingga akhirnya punah saat nilai pemanenan mencapai 0.3. Adanya pemanenan pada dua kelompok mengakibatkan penurunan yang signifikan terhadap populasi pemangsa.

### 5.2 Saran

Pada karya ilmiah ini, dilihat pengaruh perubahan nilai parameter model mangsa-pemangsa dengan pemanenan. Penelitian berikutnya dapat dilihat pengaruh perubahan parameter-parameter yang lebih spesifik terhadap kestabilan titik tetap model dan dinamika populasi serta dapat melihat masalah tersebut dari segi ekonomi dengan menambahkan faktor harga untuk mendapatkan keuntungan yang maksimal.



## DAFTAR PUSTAKA

- Afifah YN, Qomarudin M NH, Ummah I. 2020. Optimal Control Model Pemanenan Prey-Predator di Area Konservasi Ikan. *Buana Matematika: Jurnal Ilmiah Matematika dan Pendidikan Matematika*. 10(1):1-16. <https://doi.org/10.36456/buanamatematika.v10i1.2410>.
- Brauer F, Castillo-Chavez C. 2012. *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology 2nd Edition*. New York (US): Springer-Verlag.
- Braun M. 1993. *Differential Equations and Their Applications 4th Edition*. New York (US): Springer-Verlag.
- Carling GA, Wood RK. 1988. The dynamics and control of a depropanizer. In *Dynamics and Control of Chemical Reactors and Distillation Columns*. pp 167-173. Pergamon.
- Hogarth WL, Norbury J, Cunning I, Sommers K. 1992. Stability of a predator-prey model with harvesting. *Ecological Modelling*. 62(1-3):83-106. [https://doi.org/10.1016/0304-3800\(92\)90083-Q](https://doi.org/10.1016/0304-3800(92)90083-Q).
- Holmberg J. 1995. *Socio-ecological principles and indicators for sustainability*. P 1083.
- Junaedi I, Zulkarnaen D, Julaeha S. 2015. Simulasi Model Mangsa Pemangsa di Wilayah yang Dilindungi untuk Kasus Pemangsa Tergantung Sebagian pada Mangsa. *KUBIK: Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*. 1(1):1-11. <https://doi.org/10.15575/kubik.v1i1.318>.
- Kar TK. 2003. Selective harvesting in a prey-predator fishery with time delay. *Mathematical and Computer Modelling*. 38(3-4):449-458. [https://doi.org/10.1016/S0895-7177\(03\)90099-9](https://doi.org/10.1016/S0895-7177(03)90099-9).
- Kar TK, Chaudhuri KS. 2004. Harvesting in a two-prey one-predator fishery: a bioeconomic model. *The ANZIAM Journal*. 45(3):443-456. <https://doi.org/10.1017/S144618110001347X>.
- Li B, Li Z, Chen B, Wang G. 2015. Hopf Bifurcation Analysis of a Predator-Prey Biological Economic System with Nonselective Harvesting. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2015(1):264321. <http://dx.doi.org/10.1155/2015/264321>.
- Luckinbill LS. 1973. Coexistence in laboratory populations of Paramecium aurelia and its predator Didinium nasutum. *Ecology*. 54(6):1320-1327. <http://dx.doi.org/10.2307/1934194>.
- Manna D, Maiti A, Samanta GP. 2018. Analysis of a predator-prey model for exploited fish populations with schooling behavior. *Applied Mathematics and Computation*. 317:35-48. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.052>.
- Martin A, Ruan S. 2001. Predator-prey models with delay and prey harvesting. *Journal of Mathematical Biology*. 43:247-267.
- Murray JD. 2007. *Mathematical biology: I. An introduction*. Volume 17: Springer Science dan Business Media.
- Roy B, Roy SK. 2017. Holling-Tanner model with Beddington-DeAngelis functional response and time delay introducing harvesting. *Mathematics and Computers in Simulation*. 142:1-14. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2017.03.010>.
- Strogatz SH. 1994. Nonlinear dynamics and chaos: Lab demonstrations.

- Toaha, S. 2013. Pemodelan Matematika dalam Dinamika Populasi. *Makassar: Dua Satu Pers.*
- Tu PN, Tu PN. 1994. Nonlinear Systems. *Dynamical Systems: An Introduction with Applications in Economics and Biology.* 133-162. [https://doi.org/10.1007/978-3-642-78793-5\\_7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-78793-5_7).
- Xiao D, Li W, Han M. 2006. Dynamics in a ratio-dependent predator-prey model with predator harvesting. *Journal of mathematical analysis and applications.* 324(1):14-29. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2005.11.048>.
- Zhang R, Sun J, Yang H. 2007. Analysis of a prey-predator fishery model with prey reserve. *Applied Mathematical Sciences.* 1(50):2481-2492.