GAME COLORING NUMBER SUATU GRAF

INDRI JULIYANTI

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2015

PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi berjudul *Game Coloring Number* suatu Graf adalah benar karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Desember 2015

Indri Juliyanti
NIM G54110071

ABSTRAK

INDRI JULIYANTI. *Game Coloring Number* Suatu Graf. Dibimbing oleh TEDUH WULANDARI MAS’OED dan SISWANDI.

Pewarnaan pada graf terdiri atas tiga macam pewarnaan yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. *Coloring game* merupakan salah satu permainan pewarnaan simpul yang dilakukan oleh dua orang pemain. *Game chromatic number* dan *game coloring number* merupakan nilai yang dapat dicari dari permainan *coloring game*. Dalam penelitian ini dibuktikan tiga teorema. Pertama, jika terdapat graf sembarang maka nilai *game coloring number* graf tersebut lebih besar atau sama dengan nilai *game chromatic number*-nya. Kedua, untuk sembarang graf dengan dua subgraf, nilai *game coloring number* graf kurang dari atau sama dengan nilai *game coloring number* subgraf pertama ditambah dengan nilai *maximum degree* subgraf kedua. Ketiga, untuk sembarang graf yang memiliki subgraf, nilai *game coloring number* subgraf kurang dari atau sama dengan nilai dari *game coloring number* graf tersebut.

Kata kunci: *coloring game*, *game chromatic number*, *game coloring number,* pewarnaan, teori graf.

ABSTRACT

INDRI JULIYANTI. Game Coloring Number of a Graph. Supervised by TEDUH WULANDARI MAS’OED and SISWANDI.

Coloring of the graph consists of three kinds of coloring namely vertex coloring, edge coloring, and field coloring. The coloring game is vertex coloring game which is played by two players. Game chromatic number and game coloring number are number that can be obtained from the coloring game. This study proves three theorems. First, for any given graph, the value of game coloring number of the graph will be greater or equal to the value of its game chromatic number. Second, for any graph with two subgraphs, the value of game coloring number of the graph is less than or equal to the value of the game coloring number of the first subgraph plus the value of maximum degree of the second subgraph. Third, for any graph possesses subgraphs, the value of thr game coloring number of a subgraph is less than or equal to the value of the game coloring number of the graph.

Keywords: coloring, coloring game, game chromatic number, game coloring number, graph theory.

GAME COLORING NUMBER SUATU GRAF

INDRI JULIYANTI

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Departemen Matematika

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2015

Judul Skripsi : *Game Coloring Number* Suatu Graf
Nama : Indri Juliyanti
NIM : G54110071

Disetujui oleh

Teduh Wulandari Mas'oed, MSi
Pembimbing I

Drs Siswandi, MSi
Pembimbing II

Diketahui oleh

Dr Toni Bakhtiar, MSc
Ketua Departemen

Tanggal Lulus: 16 DEC 2015

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah *Subhanahu Wa Ta'ala* atas segala karuniaNya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi yang berjudul "*Game Coloring Number* suatu Graf". Shalawat serta salam senantiasa diucapkan kepada Nabi Muhammad SAW sebagai pemimpin dan suri tauladan terbaik bagi umatnya.

Terima kasih penulis ucapkan kepada Teduh Wulandari Mas'oed, MSi dan Drs Siswandi, MSi selaku pembimbing atas bimbingan dan arahannya kepada penulis dalam pembuatan skripsi ini, serta Dra Farida Hanum, MSi selaku dosen penguji atas saran dan masukannya untuk perbaikan skripsi ini. Di samping itu, penghargaan penulis sampaikan kepada seluruh dosen dan staf di Departemen Matematika atas segala ilmu dan bantuan yang diberikan semasa perkuliahan. Ungkapan terima kasih juga disampaikan kepada ayah Wawan Darmawan, ibu Oneng Mulyani, kakak Intan Krisnawanti dan Erni Parlina, adik Indah Puspasari serta seluruh keluarga besar, atas segala doa dan kasih sayangnya. Tak lupa juga, penulis ucapkan terima kasih kepada Fikri Hidayat dan keluarga, atas segala dukungan dan perhatiannya. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada para sahabat Elita Febriani, Putri Normasari, Yohanes Bella, Candra Hidayat, Dedy Wibowo, Erjodi, Rianiko, Agung P, Vina, Intan F, Resty atas segala bantuannya, teman teman Matematika angkatan 48, angkatan 47, angkatan 49 dan angkatan 50, seluruh keluarga di Paguyuban Mahasiswa Bandung (PAMAUNG), seluruh keluarga Drama Musikal Matematika, teman kos Rumah Warna serta seluruh pihak yang telah mendukung dan mendoakan penulis hingga terselesaikannya karya ilmiah ini.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat.

Bogor, Desember 2015

Indri Juliyanti

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Matematika diskret adalah salah satu cabang ilmu matematika. Salah satu ilmu yang dibahas dalam matematika diskret adalah teori graf. Teori graf pertama kali digunakan pada tahun 1736 oleh Leonhard Euler untuk menyelesaikan masalah jembatan Köningsberg yang terjadi di kota Kaliningrad, Rusia Timur. Secara umum graf merupakan pasangan himpunan simpul (*vertex*) dan himpunan sisi (*edges*).

Salah satu topik yang menarik dalam teori graf adalah pewarnaan. Pewarnaan pada graf terdiri dari tiga macam pewarnaan yaitu pewarnaan simpul, pewarnaan sisi, dan pewarnaan bidang. Pewarnaan simpul pada graf dapat diaplikasikan ke berbagai bidang seperti penjadwalan ujian, rute transportasi, dan penempatan bahan-bahan kimia. Dalam karya ilmiah ini akan dibahas mengenai *coloring game* pada simpul dan *game coloring number*, dengan dua simpul yang saling *adjacent* mempunyai warna yang berbeda. Jumlah warna minimum yang digunakan untuk mewarnai simpul pada suatu graf disebut bilangan kromatik yang dinotasikan sebagai $\chi(G)$.

Coloring game merupakan sebuah permainan pewarnaan pada simpul yang dilakukan oleh dua orang pemain, yaitu pemain A dan pemain B. Pemain A memiliki kesempatan mengambil langkah pertama untuk mewarnai simpul pada graf G. Permainan ini memiliki ketentuan tidak boleh mewarnai simpul yang saling *adjacent* dengan warna yang sama. Pemain A dapat memenangkan permainan jika semua simpul pada graf G dapat diwarnai dan pemain B dapat memenangkan permainan jika ada satu simpul atau lebih pada graf G yang tidak dapat diwarnai.

Game coloring number dapat didefinisikan melalui *coloring game*, dengan kedua pemain secara bergantian memilih simpul yang ada pada graf G hingga semua simpul terpilih. Pemain A memenangkan permainan jika dapat meminimumkan nilai *back degree* yang diperoleh dan pemain B memenangkan permainan jika dapat memaksimumkan nilai *back degree* yang diperoleh. Definisi mengenai *back degree* akan dijelaskan pada tinjauan pustaka. Didefinisikan l yaitu nilai *maximum back degree* yang diperoleh saat kedua pemain menggunakan strategi yang optimal untuk memainkan permainan.

Permasalahan yang dibahas dalam karya ilmiah ini adalah menentukan bagaimana cara agar mendapatkan nilai l dengan kedua pemain menggunakan strateginya untuk memenangkan permainan. Pada kasus yang berbeda untuk sembarang graf G diperoleh nilai dari *game chromatic number* yang optimal untuk kedua pemain. Sumber utama dalam karya ilmiah ini ialah artikel berjudul "*The Game Coloring Number of Planar Graphs*" yang ditulis Xuding Zhu pada tahun 1998.

Tujuan Penelitian

Tujuan dari penulisan karya ilmiah ini ialah menjelaskan bahwa:

1. jika G adalah graf sembarang, maka nilai *game coloring number* pada graf G akan lebih besar atau sama dengan nilai *game chromatic number* pada graf G,
2. untuk sembarang graf G, nilai dari *game coloring number* pada graf G akan kurang dari atau sama dengan nilai dari *game coloring number* pada graf G_1 ditambah dengan nilai *maximum degree* pada graf G_2 dengan graf G_1 dan G_2 adalah subgraf dari graf G,
3. untuk sembarang graf G, jika graf H adalah subgraf dari graf G, maka nilai dari *game coloring number* pada graf H kurang dari atau sama dengan nilai dari *game coloring number* pada graf G.

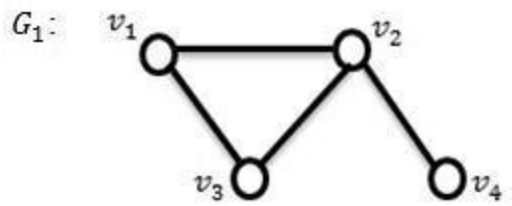
TINJAUAN PUSTAKA

Pada bab ini akan dijelaskan beberapa definisi dalam teori graf dan permainan pada graf yang akan digunakan dalam penyusunan karya ilmiah ini.

Teori Graf

Definisi 1 (Graf)

Suatu graf G adalah pasangan terurut (V, E) dengan V merupakan suatu himpunan takkosong, dan E merupakan himpunan dari pasangan-pasangan tak terurut dari anggota himpunan V. Anggota dari V disebut simpul (*vertex*) dari G, dan anggota dari E disebut sisi (*edge*) dari G. himpunan simpul (*vertex*) dari G dinotasikan dengan $V(G)$ dan $E(G)$ merupakan himpunan sisi (*edge*) dari G (Hartsfield dan Ringel 1990). Contoh graf dapat dilihat pada Gambar 1.

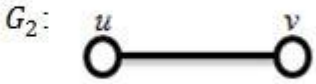


Gambar 1 Graf $G_1 = (V, E)$

Pada Gambar 1 himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf G_1 adalah $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dan $E(G_1) = \{\{v_1, v_3\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}\}$ dengan $\{v_1, v_3\}$, $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}$ dan $\{v_2, v_4\}$ merupakan sisi dari graf G_1.

Definisi 2 (*Adjacent*)

Simpul u dan v pada graf G dikatakan *adjacent* (berhubungan) jika terdapat sebuah sisi (*edge*) $e = \{u, v\}$ (Lipschutz dan Lipson 2007). Contoh simpul yang *adjacent* dapat dilihat pada Gambar 2.

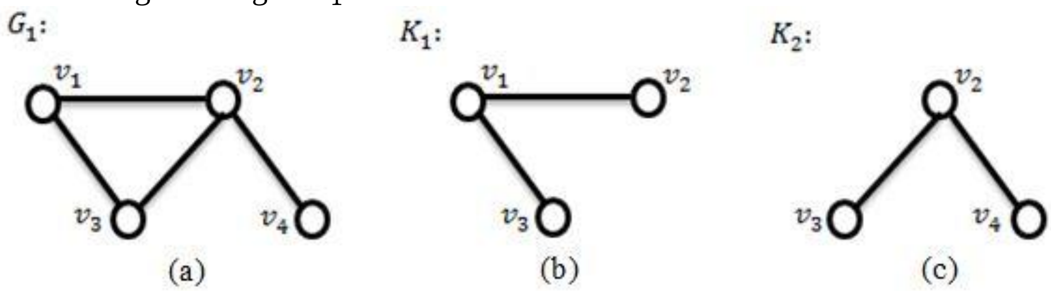


Gambar 2 Graf G_2 memiliki simpul yang *adjacent*

Pada Gambar 2 himpunan simpul dan himpunan sisi dari graf G_2 adalah $V(G_2) = \{u, v\}$ dan $E(G_2) = \{\{u, v\}\}$ dengan simpul u dan v adalah simpul yang saling *adjacent* (berhubungan). Pada Gambar 1 simpul v_3 dan v_4 adalah simpul yang tidak saling *adjacent*.

Definisi 3 (Subgraf)

Subgraf dari graf G adalah suatu graf H dengan setiap simpul H merupakan simpul dari G dan setiap sisi dari H merupakan sisi dari G, dengan kata lain $V(H) \subseteq V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hartsfield dan Ringel 1990). Berikut diberikan contoh subgraf dari suatu graf pada Gambar 3. Pada Gambar 3 graf K_1 dan K_2 adalah subgraf dari graf G_1.



Gambar 3 Ilustrasi subgraf

Definisi 4 (*Walk*)

Walk pada graf G adalah suatu barisan simpul dan sisi secara bergantian pada graf G dengan bentuk $\{v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, \ldots\ v_{n-1}, e_{n-1}, v_n\}$ (Hartsfield dan Ringel 1990). Pada Gambar 3, graf G_1 memiliki *walk* yaitu $\{\ v_1, \{v_1, v_3\}, v_3,$ $\{v_2, v_3\}, v_2, \{v_2, v_4\}, v_4\}$.

Definisi 5 (Lintasan)

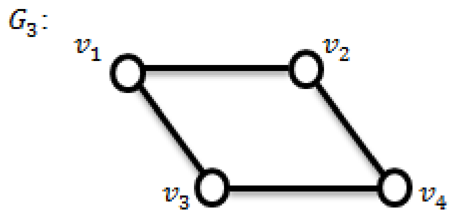
Lintasan (*path)* pada suatu graf G adalah suatu *walk* sehingga setiap simpulnya berbeda (Chartrand dan Zhang 2009). Pada Gambar 3(a) lintasannya adalah v_1, v_3, v_2, v_4, Gambar 3(b) lintasannya adalah v_2, v_1, v_3 dan Gambar 3(c) lintasannya adalah v_3, v_2, v_4.

Definisi 6 (Lintasan tertutup)

Lintasan tertutup *(closed path)* pada graf G adalah lintasan yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama (Lipschutz dan Lipson 2007). Contoh mengenai lintasan tertutup diberikan setelah definisi *cycle*.

Definisi 7 (C*ycle*)

Sebuah *cycle* pada graf G adalah suatu lintasan tertutup dari 3 simpul atau lebih (Lipschutz dan Lipson 2007). Ilustrasi lintasan tertutup dapat dilihat pada Gambar 4.



Gambar 4 Graf G_3 yang memiliki *cycle* dan lintasan tertutup

Pada Gambar 4 graf G_3 adalah lintasan tertutup yang berawal dan berakhir pada simpul yang sama. Graf G_3 memiliki *cycle* dengan simpul v_1, v_2, v_3 dan v_4.

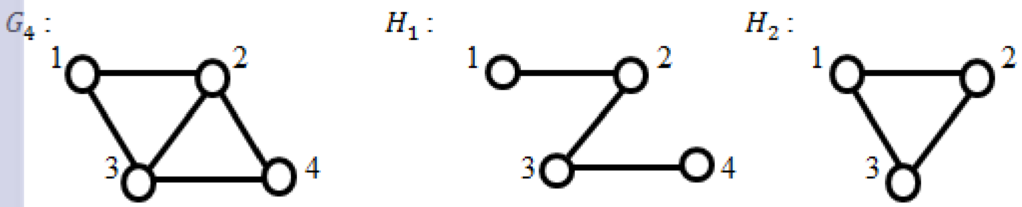
Definisi 8 (Graf Terhubung)

Suatu graf G dikatakan graf terhubung jika ada suatu lintasan antara sembarang dua simpul (Lipschutz dan Lipson 2007). Pada Gambar 4 graf G_3 adalah graf terhubung karena setiap pasangan simpul di dalam graf tersebut terhubung.

Definisi 9 *(Spanning subgraph*)

Misalkan diberikan graf G dan graf H. *Spanning subgraph* dari graf G adalah subgraf H dari graf G dengan $V(H) = V(G)$ dan $E(H) \subseteq E(G)$ (Hartsfield dan Ringel 1990).

Berikut ini diberikan contoh graf yang memiliki *spanning subgraph*. Misalkan diberikan graf $G_4 = (V, E)$ dengan $V(G_4) = V(H_1) = \{1, 2, 3, 4\}$, $E(G_4) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{1,3\}, \{3,4\}\}$, $E(H_1) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$ dan $E(H_2) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$. Pada Gambar 5 graf H_1 adalah *spanning subgraph* dari graf G_4, tetapi H_2 bukan *spanning subgraph* dari G_4 karena graf H_2 tidak mengandung semua simpul pada graf G_4.



Gambar 5 *Spanning subgraph* dan bukan *spanning subgraph*

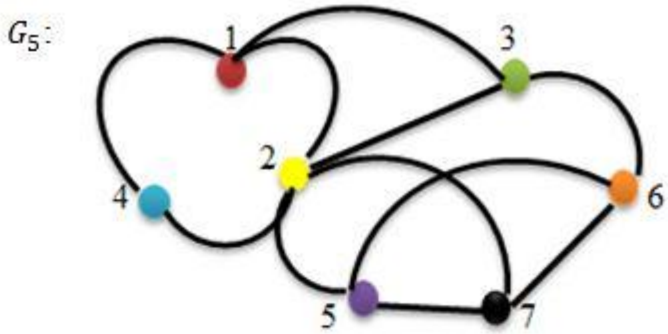
Permainan Graf

Karya ilmiah ini membahas mengenai permainan pada graf. Berikut dijelaskan beberapa definisi mengenai semua hal yang berkaitan dengan *game chromatic number* dan *game coloring number* pada graf.

Definisi 10 (*Proper vertex coloring*)

Proper vertex coloring pada graf G adalah pemberian warna pada setiap simpul, diberikan satu warna untuk satu simpul sedemikian sehingga untuk simpul yang saling *adjacent* diwarnai dengan warna yang berbeda. *Proper vertex coloring* dapat disebut dengan pewarnaan pada graf G (Chartrand dan Zhang 2009).

Berikut ini diberikan contoh pewarnaan pada graf. Misalkan diberikan graf $G_5 = (V, E)$ dengan $V(G_5) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E(G_5) = \{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2,7\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}\}$, dan himpunan warna C dengan $C = \{\text{merah}, \text{kuning}, \text{hijau}, \text{biru}, \text{ungu}, \text{jingga}, \text{hitam}\}$.



Gambar 6 Pewarnaan simpul pada graf G_5

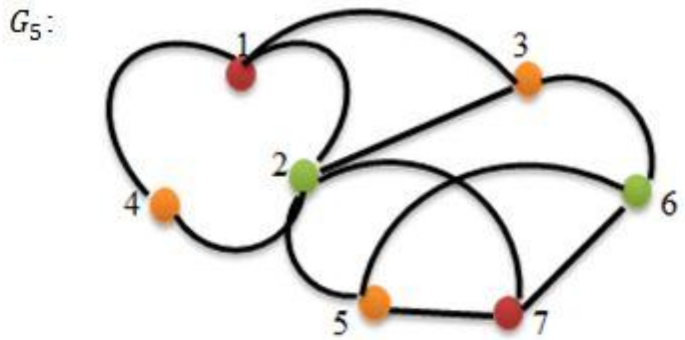
Pada Gambar 6 graf G_5 memiliki pewarnaan sebanyak 7 warna, dengan setiap simpul yang saling *adjacent* tidak diwarnai dengan warna yang sama. Simpul 1 diwarnai degan warna merah, simpul 2 diwarnai dengan warna kuning, simpul 3 diwarnai dengan warna hijau, simpul 4 diwarnai dengan warna biru, simpul 5 diwarnai dengan warna ungu, simpul 6 diwarnai dengan warna jingga, dan simpul 7 diwarnai dengan warna hitam.

Definisi 11 (*k-colorable*)

Graf G yang dapat diwarnai dengan k warna disebut *k-colorable* (Chartrand dan Zhang 2009). Pada Gambar 6 graf G_5 dapat diwarnai dengan tujuh warna, sehingga pewarnaan pada graf G_5 dapat disebut sebagai *7-colorable*.

Definisi 12 (Bilangan Kromatik)

Bilangan kromatik pada graf G adalah nilai minimum dari bilangan bulat positif k sehingga graf G *k-colorable* dan dinotasikan dengan $\chi(G)$ (Chartrand dan Zhang 2009). Perhatikan graf G_5 pada Gambar 6. Pewarnaan graf dapat diminimumkan dengan mengubah warna pada setiap simpul yang tidak *adjacent* seperti pada Gambar 7.



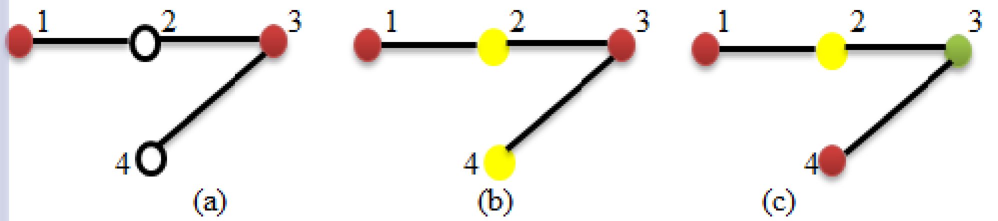
Gambar 7 Bilangan kromatik pada graf G_5

Pada Gambar 7 semua simpul graf G_5 dapat diwarnai dengan minimum 3 warna. Simpul 1 dan 7 diwarnai dengan warna merah, simpul 2 dan 6 diwarnai dengan warna hijau, dan simpul 3, 4, dan 5 diwarnai dengan warna jingga, sehingga graf G_5 adalah 3-*colorable* dan dapat ditulis dengan $\chi(G) = 3$. Akibatnya pada graf G_5 nilai $\chi(G_5) \leq 7$.

Definisi 13 (Warna yang legal)

Misalkan diberikan graf G dengan simpul x dan himpunan warna C. Warna i disebut warna yang legal untuk simpul x yang belum diberi warna, jika simpul x tidak *adjacent* dengan simpul lain yang diwarnai dengan warna i (Chou *et al*. 2001).

Berikut ini diberikan contoh penggunaan warna yang legal pada graf. Misalkan diberikan graf $G_6 = (V, E)$ dengan $V(G_6) = \{1, 2, 3, 4\}, E(G_6) = \{\{1, 2\},\ 2, 3\}, \{3, 4\}$ dan himpunan warna C dengan $C = \{\text{merah}, \text{kuning}, \text{hijau}\}$ (lihat Gambar 8).



Gambar 8 Graf G_6 dengan pewarnaan yang legal

Gambar 8 (a) jika diberikan warna merah pada simpul 1 maka warna merah dikatakan legal pada simpul 3 atau simpul 4. Gambar 8 (b) jika diberikan warna kuning pada simpul 2 maka warna kuning dikatakan legal untuk simpul 4. Gambar 8 (c) jika pada simpul 1 dan simpul 4 diwarnai dengan warna merah dan simpul 2 diwarnai dengan warna kuning, maka simpul 3 tidak boleh diwarnai dengan warna merah atau kuning. Akibatnya warna merah dikatakan legal hanya untuk simpul 1 dan simpul 4, warna kuning hanya dikatakan legal untuk simpul 2 dan warna hijau hanya dikatakan legal untuk simpul 3.

Definisi 14 *(Coloring Game)*

Misalkan diberikan graf G dan himpunan warna C. *Coloring game* adalah sebuah permainan yang dilakukan pada sebuah graf G, dengan menggunakan himpunan warna C. Permainan ini dimainkan oleh dua orang pemain yaitu pemain A dan pemain B. Pemain A memiliki kesempatan untuk mengambil langkah pertama. Pemain A dan pemain B secara bergantian melakukan pewarnaan pada simpul graf G dengan warna dari himpunan warna C, sehingga tidak ada dua simpul yang saling *adjacent* memiliki warna yang sama. Pemain B memenangkan permainan jika tidak ada lagi langkah legal untuk mewarnai suatu simpul bagi pemain A dan pemain A dapat memenangkan permainan ketika semua simpul pada graf G sudah diwarnai dengan benar (Kierstead 2004).

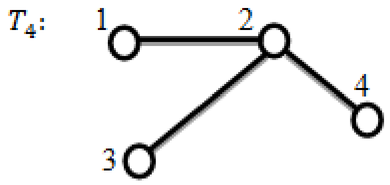
Definisi 15 *(Degree)*

Misalkan diberikan graf G. Nilai *degree* dari simpul v pada graf G adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul v. *Maximum degree* adalah nilai *degree* terbesar di antara setiap simpul dari graf G dan dinotasikan dengan $\Delta(G)$. *Minimum degree* adalah nilai *degree* terkecil di antara setiap simpul dari graf G dan dinotasikan dengan $\delta(G)$(Chartrand dan Zhang 2009). Pada Gambar 8, dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G_6) = 2$ dan *minimum degree* $\delta(G_6) = 1$.

Definisi 16 (*Game Chromatic Number*)

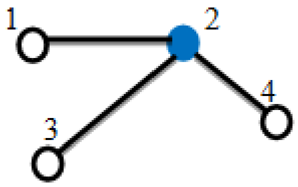
Misalkan diberikan graf G, himpunan warna C, dan *coloring game*. *Game chromatic number* adalah banyaknya warna k terkecil yang digunakan pada permainan pewarnaan dari himpunan warna C dan dinotasikan dengan $\chi_g(G)$, dengan pemain A mempunyai strategi menang untuk mewarnai semua simpul pada graf G (Chou *et al*. 2001).

Berikut ini diberikan contoh *game chromatic number*. Misalkan diberikan graf $T_4 = (V, E)$ dengan $V(T_4) = \{1, 2, 3, 4\}, E(T_4) = \{\{1,2\}, \{2, 4\}, \{2,3\}\}$, himpunan warna C dengan $C = \{\text{biru}, \text{jingga}, \text{merah}\}$ dengan mengacu kepada *coloring game*.



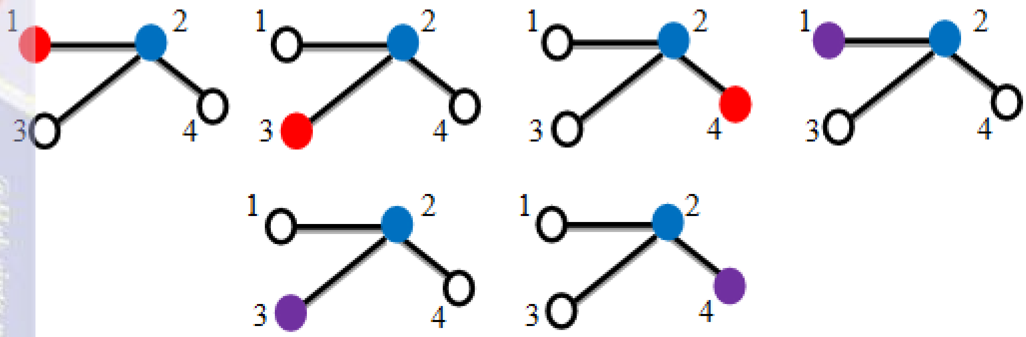
Gambar 9 Ilustrasi *game chromatic number*

Proses ilustrasi untuk memperoleh nilai *game chromatic number* pada Gambar 9 dapat ditunjukkan melalui langkah-langkah berikut ini:
Jika pemain A pada langkah pertama ingin mewarnai simpul yang memiliki *maximum degree* pada Gambar 9, maka pemain A dapat memperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(T_4) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(T_4) = 1$. Akibatnya pemain A dapat memilih simpul 2 dan mewarnai simpul 2 dengan warna biru seperti pada Gambar 10.



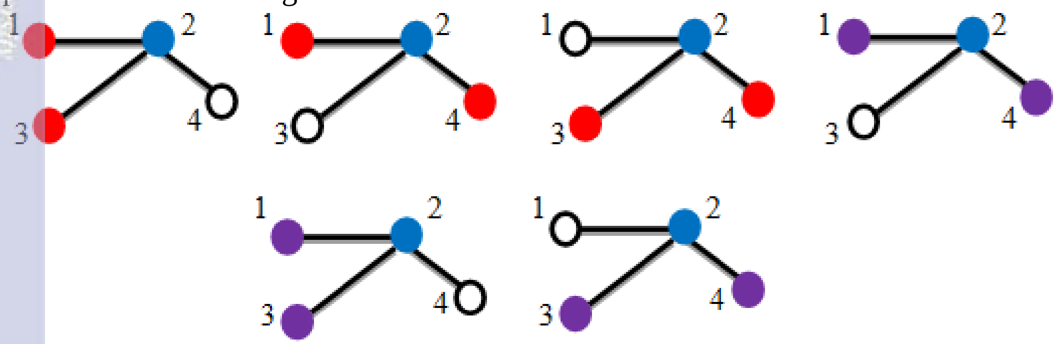
Gambar 10 Pemilihan pewarnaan pertama pada simpul 2

Pewarnaan selanjutnya pemain B dapat mewarnai simpul 1, simpul 3 atau simpul 4 dengan warna lain selain warna biru dengan pewarnaan seperti pada Gambar 11.



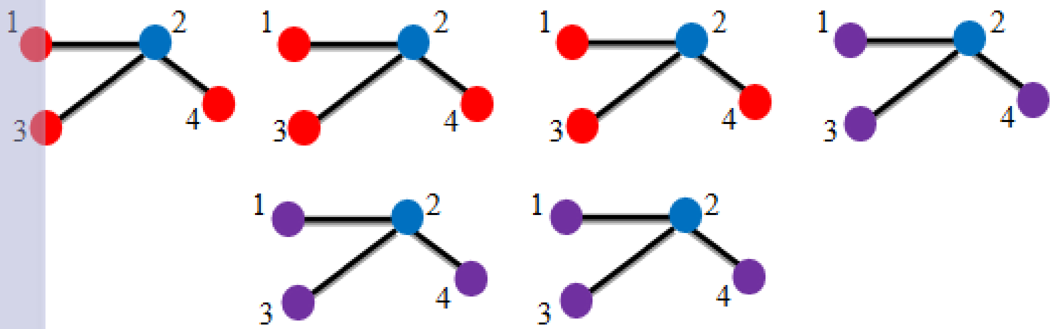
Gambar 11 Pemilihan pewarnaan kedua pada simpul 1,3, atau 4

Selanjutnya pemain A dapat mewarnai simpul lain yang belum diwarnai dengan pemilihan warna sebagai berikut:



Gambar 12 Pemilihan pewarnaan ketiga pada simpul yang belum diwarnai

Tujuan dari *game chromatic number* adalah meminimumkan banyaknya warna k, maka simpul yang tidak *adjacent* dapat diberi warna dengan warna yang sama. Akibatnya pemain B hanya dapat mewarnai simpul yang belum diberi warna dengan warna yang sama pada pemilihan sebelumnya, sehingga pemain B dapat mewarnai simpul selanjutnya dengan pewarnaan sebagai berikut:



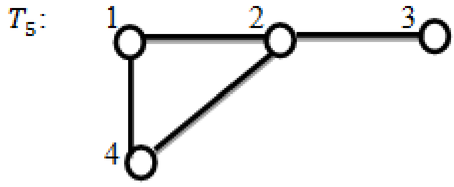
Gambar 13 Pemilihan pewarnaan keempat pada simpul yang belum diwarnai

Jika semua simpul pada Gambar 13 Graf T_4 sudah diwarnai, maka graf T_4 memiliki nilai *game chromatic number* $\chi_g(T_4) = k$ dengan k adalah banyaknya warna terkecil yang digunakan. Warna yang digunakan pada himpunan C untuk mewarnai semua simpul pada graf T_4 sebanyak dua warna dan dinotasikan dengan $\chi_g(T_4) = 2$. Karena semua simpul pada graf T_4 dapat diwarnai, maka pemain A memenangkan permainan.

Definisi 17 (Urutan linear)

Misalkan diberikan graf G dan *coloring game*. Urutan linear (L) adalah urutan pemilihan himpunan simpul dengan pemain A dan pemain B secara bergantian memilih simpul sehingga semua simpul terpilih. Jika simpul x dipilih sebelum simpul y, maka simpul x akan bernilai $x \leq y$ pada urutan linear (L) (Zhu 1998).

Berikut ini diberikan contoh urutan pemilihan pada Gambar 14. Misalkan graf $T_5 = (V, E)$ dengan $V(T_5) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $E(T_5) = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2, 4\}, \{1,4\}\}$



Gambar 14 Graf T_5

Berikut adalah kemungkinan pemilihan urutan linear (L) untuk graf T_5 adalah:

$L_1 = 1 - 2 - 3 - 4$
$L_2 = 1 - 2 - 4 - 3$
$L_3 = 1 - 3 - 2 - 3$
$L_4 = 1 - 3 - 4 - 2$
$L_5 = 1 - 4 - 2 - 3$
$L_6 = 1 - 4 - 3 - 2$
$L_7 = 2 - 1 - 3 - 4$
$L_8 = 2 - 1 - 4 - 3$
$L_9 = 2 - 3 - 1 - 4$
$L_{10} = 2 - 3 - 4 - 1$
$L_{11} = 2 - 4 - 1 - 3$
$L_{12} = 2 - 4 - 3 - 1$
$L_{13} = 3 - 1 - 2 - 4$
$L_{14} = 3 - 1 - 4 - 2$
$L_{15} = 3 - 2 - 1 - 4$
$L_{16} = 3 - 2 - 4 - 1$
$L_{17} = 3 - 4 - 1 - 2$
$L_{18} = 3 - 4 - 2 - 1$
$L_{19} = 4 - 1 - 2 - 3$
$L_{20} = 4 - 1 - 3 - 2$
$L_{21} = 4 - 2 - 1 - 3$
$L_{22} = 4 - 2 - 3 - 1$
$L_{23} = 4 - 3 - 1 - 2$
$L_{24} = 4 - 3 - 2 - 1$

Untuk mendapatkan urutan linear (L) yang optimal, langkah pertama yang dilakukan adalah memilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* dan dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul tujuan yang akan dipilih pada langkah berikutnya. Karena simpul 2 memiliki nilai *degree* yang maksimum maka pilih simpul $B =$ simpul 2. Selanjutnya tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree.* Jika nilai $\Delta(T_5) = 4$ dan $\delta(T_5) = 1$, maka nilai n memiliki dua kemungkinan yaitu $n = 2$ atau $n = 3$. karena nilai $\Delta(T_5) = 3$ dan $\delta(T_5) = 1$ maka nilai $n = 2$. Untuk mendapatkan urutan linear L pilih semua simpul pada graf T_5 dengan semua simpul terpilih tepat satu kali.

Setelah menentukan nilai $n = 2$ pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak dua kali. Selanjutnya pilih simpul B dan pilih simpul yang belum terpilih secara acak, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear (L) untuk graf T_5 adalah $L_1 = 1 - 4 - 2 - 3$ dan $L_2 = 4 - 1 - 2 - 3$. L_1 dikatakan urutan linear karena simpul 1 dipilih sebelum simpul 4, 2, dan 3, simpul 4 dipilih sebelum simpul 2 dan simpul 3, dan simpul 2 dipilih sebelum simpul 3. L_2 dikatakan urutan linear karena simpul 4 dipilih sebelum simpul 1, 2, dan 3, simpul 1 dipilih sebelum simpul 2 dan simpul 3, dan simpul 2 dipilih sebelum simpul 3.

Definisi 18 *(Back degree* dari simpul*)*

Misalkan G adalah graf. *Back degree* dari simpul x relatif terhadap urutan linear L adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul x yang muncul sebelum simpul x pada urutan linear L (Chou *et al*. 2001). Berdasarkan ilustrasi pada Definisi 17, diperoleh hasil urutan linear L dengan $L_1 = 1 - 4 - 2 - 3$ dan $L_2 = 4 - 1 - 2 - 3$ sehingga dapat diperoleh nilai *back degree* pada setiap simpul. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 1 *Back degree* pada setiap simpul dari graf T_5

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	1	0
	2	4	1
	3	2	2
	4	3	1
L_2	1	4	0
	2	1	1
	3	2	2
	4	3	1

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat bahwa nilai *back degree* yang diperoleh untuk setiap urutan linear L mana saja adalah sama.

Definisi 19 *(Back degree* dari urutan linear*)*

Misalkan G adalah graf. *Back degree* dari urutan linear L yang dinotasikan dengan l adalah nilai maksimum dari *back degree* pada setiap simpul di graf G yang bergantung pada urutan linear L (Chou *et al*. 2001).

Berdasarkan Tabel 1 diperoleh nilai *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 2$ dan untuk L_2 adalah $l_2 = 2$. Akibatnya dapat dilihat bahwa nilai $l_1 = l_2$, maka untuk setiap urutan linear L mana saja dapat diperoleh nilai l yang sama dengan $l = l_1 = l_2$.

Definisi 20 *(Game coloring number)*

Game coloring number dari graf G yang dinotasikan $\mathrm{col}_g(G)$ ialah nilai dari $1 + l$. *Game coloring number* dapat didefinisikan melalui *coloring game*, dengan kedua pemain secara bergantian memilih simpul yang ada pada graf G menggunakan strategi yang optimal sehingga membentuk sebuah urutan linear L. (Chou *et al*. 2001). Berdasarkan ilustrasi pada Definisi 19 diperoleh nilai l sehingga diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $col_g(G) = 1 + l$, dan karena $l_1 = l_2 = 2$ maka nilai dari $col_g(T_5) = 1 + \ l \ = 1 + 2 = 3$.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Karya ilmiah ini membahas teorema-teorema mengenai *game coloring number* pada sembarang graf G. Permasalahan utama dalam karya ilmiah ini ialah bagaimana memperoleh nilai *game coloring number* pada sembarang graf dengan kasus yang berbeda dan memperoleh nilai *game chromatic number* yang terkait dengan *game coloring number*.

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul V dan himpunan sisi E. *Game coloring number* $\mathrm{col}_g(G)$ adalah nilai dari $1 + l$, dengan l adalah nilai *maximum back degree* yang diperoleh dari urutan linear L. *Game chromatic number* $\chi_g(G)$ adalah banyaknya warna k terkecil yang digunakan pada permainan pewarnaan untuk mewarnai simpul pada graf G dengan warna yang tersedia pada himpunan C.

Teorema 1

Jika G adalah graf sembarang maka $\mathrm{col}_g(G) \geq \chi_g(G)$.

(Zhu 1998)

Bukti:

Misalkan G adalah sembarang graf terhubung dan diberikan himpunan warna C dengan $C = \{W_1, W_2 \ldots . W_k\}$. Akan dibuktikan bahwa nilai $\mathrm{col}_g(G) \geq \chi_g(G)$. Pembuktian nilai $\mathrm{col}_g(G) \geq \chi_g(G)$ dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai *degree* pada setiap simpul dari sembarang graf G tersebut, sehingga dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G)$dan *minimum degree* $\delta(G)$.
2. Pilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* yang dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul yang dipilih pada langkah berikutnya.
3. Pilih nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree.*
4. Pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan simpul tersebut memiliki *degree* yang maksimum. Ulangi langkah tersebut sebanyak n kali.
5. Pilih simpul B yang sudah dipilih pada langkah 2.
6. Lihat simpul mana yang belum dipilih. Jika masih ada simpul yang belum terpilih tetapi memiliki nilai $degree > n$, maka ulangi langkah 2 dan jadikan simpul tersebut menjadi B_i dengan i adalah pengulangan pemilihan simpul B ke i. Jika ada simpul yang memiliki nilai *degree* yang maksimum dan *adjacent* dengan simpul B_i tetapi sudah dipilih pada langkah sebelumnya maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_i sebanyak $p = n - q$ dengan q adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul B_i yang sudah dipilih pada pemilihan sebelumnya. Jika sudah tidak ada simpul yang memiliki $degree > n$ maka lanjut ke langkah berikutnya.
7. Pilih simpul yang belum terpilih secara acak sehingga semua simpul terpilih.
8. Setelah semua simpul terpilih maka didapatkan urutan linear L saat $L = v_1, v_2, v_3 \ldots\ldots v_i$ dengan v_i adalah simpul yang terpilih pada urutan ke i.

9. Lihat nilai m pada setiap simpul, dengan m adalah *back degree* yang berupa bilangan cacah yang mengacu kepada urutan linear L dan $v_{s,j}$ adalah simpul s yang terpilih pada urutan ke j. Akibatnya untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 2 Nilai *back degree* pada setiap simpul dari sembarang graf G

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_i	v_1	$v_{1,j}$	$m = 0$
	v_2	$v_{2,j}$	.
	v_3	$v_{3,j}$	.
	.	.	.
	.	.	.
	v_s	$v_{s,j}$	$m \neq 0$

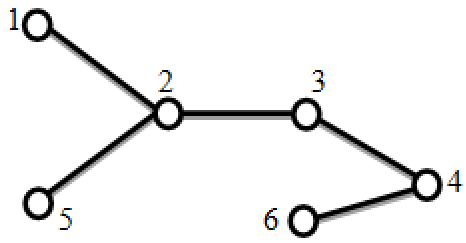
10. Pilih nilai *back degree* terbesar pada graf G, sehingga diperoleh nilai l dengan l adalah nilai *maximum back degree* dengan strategi yang optimal untuk kedua pemain.
11. Setelah didapatkan nilai l maka diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + l$. Nilai l yang diperoleh akan sama dengan nilai n yang diperoleh pada langkah 3 sehingga nilai dari *game coloring number* $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + l$ dengan $n = l$.
12. Untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal, warnai simpul pada graf G berdasarkan urutan linear L yang diperoleh pada langkah 8. Pilih simpul v_1 dan warnai simpul v_1 dengan warna W_1 yang ada pada himpunan $C = \{W_1, W_2, W_3, \ldots W_k\}$.
13. Pilih simpul v_2, jika simpul v_2 *adjacent* dengan simpul v_1 maka warnai simpul v_2 dengan warna W_2. Jika simpul v_2 tidak *adjacent* dengan simpul v_1 maka warnai simpul v_2 dengan warna W_1.
14. Pilih simpul v_3, jika simpul v_3 *adjacent* dengan simpul v_1 dan v_2 maka warnai simpul v_3 dengan warna yang berbeda dengan simpul v_1 dan v_2. Jika simpul v_3 *adjacent* dengan simpul v_1 atau simpul v_2 maka warnai simpul v_3 dengan warna yang berbeda dengan simpul v_1 atau simpul v_2. Jika simpul v_3 tidak *adjacent* dengan simpul v_1 dan v_2 maka warnai simpul v_3 dengan warna yang sama dengan simpul v_1 dan v_2.
15. Ulangi konsep pewarnaan pada langkah 12 hingga semua simpul pada urutan linear L telah dipilih dan diwarnai.
16. Setelah semua simpul terpilih dan diberi warna, maka lihat berapa warna yang digunakan pada himpunan C untuk mewarnai graf G,sehingga diperoleh nilai *game chromatic number* $\chi_g(G) = k$ dengan k adalah banyaknya warna terkecil yang digunakan pada himpunan C.

Berdasarkan langkah-langkah sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa nilai *game coloring number* dan *game chromatic number* memiliki hubungan dengan urutan linear L yang diperoleh pada langkah 8. Akibatnya nilai dari *game coloring number* dan *game chromatic number* yang diperoleh berdasarkan urutan linear L adalah $\mathrm{col}_g(G) \geq \chi_g(G)$. Dengan demikian Teorema 1 terbukti. ∎

Berikut akan diberikan contoh empat kasus dengan kemungkinan yang berbeda untuk memperoleh nilai *game coloring number* untuk mengilustrasikan Teorema 1.

Kasus 1: Nilai $\Delta(G) > \delta(G)$ dan graf G memiliki nilai n tunggal.

Misalkan G_7 adalah graf dengan $V(G_7) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $E(G_7) = \{\{1,2\}, \{2,5\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,6\}\}$.



Gambar 15 Graf G_7

Lihat setiap *degree* pada Gambar 15 graf G_7, sehingga dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G_7) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(G_7) = 1$. Pilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* dan dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul tujuan yang akan dipilih pada langkah berikutnya. Pada graf G_7 pilih simpul 2 yang memiliki nilai *maximum degree* sehingga simpul $B =$ simpul 2. Selanjutnya tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G_7) = 3$ dan $\delta(G_7) = 1$ maka nilai $n = 2$. Untuk memperoleh urutan linear L pilih semua simpul pada graf G_7 dengan pemilihan simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki nilai *degree* yang maksimum.

Untuk nilai $n = 2$, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak dua kali. Karena simpul 3 *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum maka pilih simpul 3 untuk menjadi simpul pertama yang terpilih. Selanjutnya pilih simpul 1 atau simpul 5 lalu pilih simpul B dan pilih simpul mana saja secara acak, sehingga semua simpul sudah terpilih. Pada kasus ini simpul 4 dan simpul 6 tidak boleh dipilih pada dua urutan pemilihan pertama karena simpul 4 dan 6 tidak *adjacent* dengan simpul B, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear L untuk graf G_7 sebagai berikut:

$L_1 = 3 - 1 - 2 - 5 - 4 - 6$
$L_2 = 3 - 1 - 2 - 5 - 6 - 4$
$L_3 = 3 - 1 - 2 - 4 - 5 - 6$
$L_4 = 3 - 1 - 2 - 4 - 6 - 5$
$L_5 = 3 - 1 - 2 - 6 - 4 - 5$
$L_6 = 3 - 1 - 2 - 6 - 5 - 4$
$L_7 = 3 - 5 - 2 - 1 - 4 - 6$
$L_8 = 3 - 5 - 2 - 1 - 6 - 4$
$L_9 = 3 - 5 - 2 - 4 - 1 - 6$
$L_{10} = 3 - 5 - 2 - 4 - 6 - 1$
$L_{11} = 3 - 5 - 2 - 6 - 1 - 4$
$L_{12} = 3 - 5 - 2 - 6 - 4 - 1$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mempermudah melihat nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat Tabel 3. Pada Tabel 3 hanya dipilih empat urutan linear L

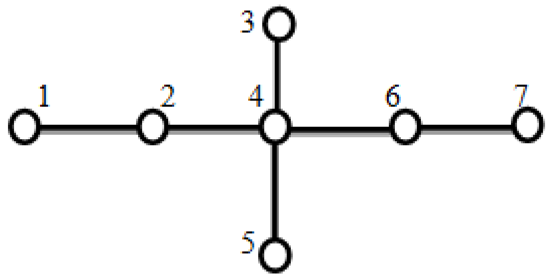
sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 3 dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_7 yang dinotasikan dengan l, sehingga diperoleh nilai *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 2$, L_2 adalah $l_2 = 2$, L_5 adalah $l_5 = 2$, dan L_6 adalah $l_6 = 2$. Akibatnya untuk sembarang urutan linear L pada graf G_7 akan diperoleh nilai l yang sama dengan $l = l_1 = l_2 = l_5 = l_6 = 2$. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\text{col}_g(G) = 1 + l$ dengan $n = 2$ dan $l = 2$, sehingga $\text{col}_g(G_7) = 1 + l = 1 + 2 = 3$.

Tabel 3 Nilai *back degree* pada setiap simpul dari graf G_7

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	3	0
	2	1	0
	3	2	2
	4	5	1
	5	4	1
	6	6	1
L_2	1	3	0
	2	1	0
	3	2	2
	4	5	1
	5	6	0
	6	4	2
L_5	1	3	0
	2	1	0
	3	2	2
	4	6	0
	5	4	2
	6	5	1
L_6	1	3	0
	2	1	0
	3	2	2
	4	6	0
	5	5	1
	6	4	2

Kasus 2: Nilai $\Delta(G) > \delta(G)$ dan graf G memiliki dua kemungkinan nilai n.

Misalkan G_8 adalah graf dengan $V(G_8) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $E(G_8) = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{6,7\}\}$.



Gambar 16 Ilustrasi graf G_8

Lihat setiap *degree* pada Gambar 16 graf G_8, sehingga dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G_8) = 4$ dan *minimum degree* $\delta(G_8) = 1$. Pilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* dan dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul yang akan dipilih pada langkah berikutnya. Pada graf G_8 pilih simpul 4 yang memiliki *maximum degree* sehingga simpul $B =$ simpul 4. Selanjutnya tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G_8) = 4$ dan $\delta(G_8) = 1$, maka nilai $n = 2$ atau $n = 3$. Untuk memperoleh urutan linear L, pilih semua simpul pada graf G_8 dengan pemilihan n simpul pertama yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki nilai *degree* yang maksimum.

Untuk nilai $n = 2$, pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak dua kali. Karena simpul 2 dan 6 *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum, maka pilih simpul 2 dan simpul 6 untuk menjadi dua simpul pertama yang terpilih. Selanjutnya pilih simpul B dan pilih simpul mana saja secara acak, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear L untuk graf G_8 sebagai berikut:

$L_1 = 2-6-4-1-3-5-7$	$L_{22} = 2-6-4-7-3-5-1$
$L_2 = 2-6-4-1-3-7-5$	$L_{23} = 2-6-4-7-5-1-3$
$L_3 = 2-6-4-1-5-3-7$	$L_{24} = 2-6-4-7-5-3-1$
$L_4 = 2-6-4-1-5-7-3$	$L_{25} = 6-2-4-1-3-5-7$
$L_5 = 2-6-4-1-7-5-3$	$L_{26} = 6-2-4-1-3-7-5$
$L_6 = 2-6-4-1-7-3-5$	$L_{27} = 6-2-4-1-5-3-7$
$L_7 = 2-6-4-3-1-5-7$	$L_{28} = 6-2-4-1-5-7-3$
$L_8 = 2-6-4-3-1-7-5$	$L_{29} = 6-2-4-1-7-5-3$
$L_9 = 2-6-4-3-5-1-7$	$L_{30} = 6-2-4-1-7-3-5$
$L_{10} = 2-6-4-3-5-7-1$	$L_{31} = 6-2-4-3-1-5-7$
$L_{11} = 2-6-4-3-7-1-5$	$L_{32} = 6-2-4-3-1-7-5$
$L_{12} = 2-6-4-3-7-5-1$	$L_{33} = 6-2-4-3-5-1-7$
$L_{13} = 2-6-4-5-1-3-7$	$L_{34} = 6-2-4-3-5-7-1$
$L_{14} = 2-6-4-5-1-7-3$	$L_{35} = 6-2-4-3-7-1-5$
$L_{15} = 2-6-4-5-3-1-7$	$L_{36} = 6-2-4-3-7-5-1$
$L_{16} = 2-6-4-5-3-7-1$	$L_{37} = 6-2-4-5-1-3-7$
$L_{17} = 2-6-4-5-7-1-3$	$L_{38} = 6-2-4-5-1-7-3$
$L_{18} = 2-6-4-5-7-3-1$	$L_{39} = 6-2-4-5-3-1-7$
$L_{19} = 2-6-4-7-1-3-5$	$L_{40} = 6-2-4-5-3-7-1$
$L_{20} = 2-6-4-7-1-5-3$	$L_{41} = 6-2-4-5-7-1-3$
$L_{21} = 2-6-4-7-3-1-5$	$L_{42} = 6-2-4-5-7-3-1$

$L_{43} = 6-2-4-7-1-3-5$ $\quad$ $L_{46} = 6-2-4-7-3-5-1$
$L_{44} = 6-2-4-7-1-5-3$ $\quad$ $L_{47} = 6-2-4-7-5-1-3$
$L_{45} = 6-2-4-7-3-1-5$ $\quad$ $L_{48} = 6-2-4-7-5-3-1$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul, dengan memilih urutan linear L secara acak dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 4 Nilai *back degree* pada setiap simpul dari graf G_8 untuk $n = 2$

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	2	0
	2	6	0
	3	4	2
	4	1	1
	5	3	1
	6	5	1
	7	7	1
L_{24}	1	2	0
	2	6	0
	3	4	2
	4	7	1
	5	5	1
	6	3	1
	7	1	1
L_{34}	1	6	0
	2	2	0
	3	4	2
	4	3	1
	5	5	1
	6	7	1
	7	1	1
L_{45}	1	6	0
	2	2	0
	3	4	2
	4	7	1
	5	3	1
	6	1	1
	7	5	1

Pada Tabel 4 hanya dipilih empat urutan linear L sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 4 dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_8 yang dinotasikan dengan l, sehingga nilai *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 2$, L_{24} adalah $l_{24} = 2$, L_{34} adalah $l_{34} = 2$, dan L_{45} adalah $l_{45} = 2$. Akibatnya untuk sembarang urutan linear L pada graf G_8 akan diperoleh nilai l yang sama dengan $l = l_1 = l_{24} = l_{34} = l_{45} = 2$, sehingga dapat disimpulkan bahwa untuk setiap urutan linear L mana saja dengan $n = 2$ akan bernilai sama jika tiga simpul pertama yang dipilih adalah $2-6-4$

atau $6-2-4$ dan simpul selanjutnya dapat dipilih secara acak. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + l$ dengan $n = 2$ dan $l = 2$, sehingga $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 2 = 3$.

Untuk nilai $n = 3$, pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak tiga kali. Karena simpul 2 dan simpul 6 *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum, maka pilih simpul 2 dan simpul 6 untuk menjadi dua simpul pertama yang terpilih. Selanjutnya pilih satu simpul mana saja yang *adjacent* dengan simpul B, lalu pilih simpul B dan pilih simpul mana saja secara acak, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear L sebagai berikut:

$L_1 = 2-6-3-4-1-5-7$ $\quad$ $L_{13} = 6-2-3-4-1-5-7$
$L_2 = 2-6-3-4-1-7-5$ $\quad$ $L_{14} = 6-2-3-4-1-7-5$
$L_3 = 2-6-3-4-5-1-7$ $\quad$ $L_{15} = 6-2-3-4-5-1-7$
$L_4 = 2-6-3-4-5-7-1$ $\quad$ $L_{16} = 6-2-3-4-5-7-1$
$L_5 = 2-6-3-4-7-5-1$ $\quad$ $L_{17} = 6-2-3-4-7-5-1$
$L_6 = 2-6-3-4-7-1-5$ $\quad$ $L_{18} = 6-2-3-4-7-1-5$
$L_7 = 2-6-5-4-1-3-7$ $\quad$ $L_{19} = 6-2-5-4-1-3-7$
$L_8 = 2-6-5-4-1-7-3$ $\quad$ $L_{20} = 6-2-5-4-1-7-3$
$L_9 = 2-6-5-4-3-1-7$ $\quad$ $L_{21} = 6-2-5-4-3-1-7$
$L_{10} = 2-6-5-4-3-7-1$ $\quad$ $L_{22} = 6-2-5-4-3-7-1$
$L_{11} = 2-6-5-4-7-1-3$ $\quad$ $L_{23} = 6-2-5-4-7-1-3$
$L_{12} = 2-6-5-4-7-3-1$ $\quad$ $L_{24} = 6-2-5-4-7-3-1$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat Tabel 5. Pada Tabel 5 hanya dipilih empat urutan linear L sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 5 dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_8 yang dinotasikan dengan l, sehingga nilai *maximum back degree* untuk L_2 adalah $l_2 = 3$, L_{10} adalah $l_{10} = 3$, L_{16} adalah $l_{16} = 3$, dan L_{25} adalah $l_{25} = 3$. Akibatnya untuk setiap urutan linear L pada graf G_8 menghasilkan nilai l yang sama dengan $l = l_2 = l_{10} = l_{16} = l_{25} = 3$. Selanjutnya dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang urutan linear L dengan $n = 3$ akan bernilai sama jika dua simpul pertama yang dipilih adalah $2-6$ atau $6-2$, satu simpul selanjutnya yang dipilih adalah simpul 3 atau 5, lalu pilih simpul B dan simpul selanjutnya dapat dipilih secara acak. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + l$ dengan $n = 3$ dan $l = 3$, sehingga $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 3 = 4$. Pada graf G_8 diperoleh 2 nilai $\mathrm{col}_g(G_8)$ dengan $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 2 = 3$ untuk nilai $n = 2$ dan $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 3 = 4$ untuk nilai $n = 3$.

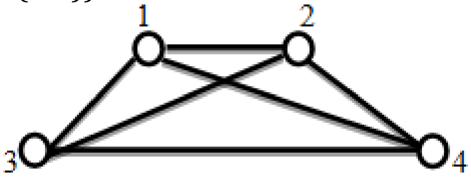
Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G, jika diperoleh dua nilai n yang berbeda maka akan menghasilkan dua nilai l yang berbeda. Akibatnya diperoleh dua nilai dari *game coloring number* yang berbeda.

Tabel 5 Nilai *back degree* pada setiap simpul dari graf G_8 untuk *n* = 3

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_2	1	2	0
	2	6	0
	3	3	0
	4	4	3
	5	1	1
	6	7	1
	7	5	1
L_{10}	1	2	0
	2	6	0
	3	5	0
	4	4	3
	5	3	1
	6	7	1
	7	1	1
L_{16}	1	6	0
	2	2	0
	3	3	0
	4	4	3
	5	5	1
	6	7	1
	7	1	1
L_{25}	1	6	0
	2	2	0
	3	5	0
	4	4	3
	5	7	1
	6	3	1
	7	1	1

Kasus 3: Nilai $\Delta(G) = \delta(G)$

Misalkan G_9 adalah graf dengan $V(G_9) = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $E(G_9) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$.



Gambar 17 Graf G_9

Lihat setiap *degree* pada Gambar 17 graf G_9, sehingga dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G_9) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(G_9) = 3$. Pilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* dan dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul tujuan yang akan dipilih pada langkah berikutnya. Karena semua simpul pada graf G_9 memiliki nilai *degree* yang sama maka dapat dipilih simpul mana saja untuk menjadi simpul B, sehingga simpul $B = 1$, simpul $B = 2$, simpul $B = 3$ atau simpul $B = 4$. Selanjutnya tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G_9) = 3$ dan $\delta(G_9) = 3$ maka nilai $n = 3$. Untuk mendapatkan urutan linear L pilih semua simpul pada graf G_9 dengan pemilihan n simpul pertama yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki nilai *degree* yang maksimum.

Untuk nilai $n = 3$, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak tiga kali. Selanjutnya pilih simpul B dan pilih simpul mana saja secara acak, sehingga diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear L untuk graf G_9 sebagai berikut:

- Untuk simpul B = simpul 1

$L_1 = 2 - 3 - 4 - 1$
$L_2 = 2 - 4 - 3 - 1$
$L_3 = 3 - 2 - 4 - 1$
$L_4 = 3 - 4 - 2 - 1$
$L_5 = 4 - 3 - 2 - 1$
$L_6 = 4 - 2 - 3 - 1$

- Untuk simpul B = simpul 2

$L_7 = 1 - 3 - 4 - 2$
$L_8 = 1 - 4 - 3 - 2$
$L_9 = 3 - 1 - 4 - 2$
$L_{10} = 3 - 4 - 1 - 2$
$L_{11} = 4 - 1 - 3 - 2$
$L_{12} = 4 - 3 - 1 - 2$

- Untuk simpul B = simpul 3

$L_{13} = 1 - 2 - 4 - 3$
$L_{14} = 1 - 4 - 3 - 3$
$L_{15} = 2 - 1 - 4 - 3$
$L_{16} = 2 - 4 - 1 - 3$
$L_{17} = 4 - 1 - 2 - 3$
$L_{18} = 4 - 2 - 1 - 3$

- Untuk simpul B = simpul 4

$L_{19} = 1 - 2 - 3 - 4$
$L_{20} = 1 - 3 - 2 - 4$
$L_{21} = 2 - 1 - 3 - 4$
$L_{22} = 2 - 3 - 1 - 4$
$L_{23} = 3 - 1 - 2 - 4$
$L_{24} = 3 - 2 - 1 - 4$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat tabel sebagai berikut:

Tabel 6 Nilai *back degree* pada setiap simpul dari graf G_9

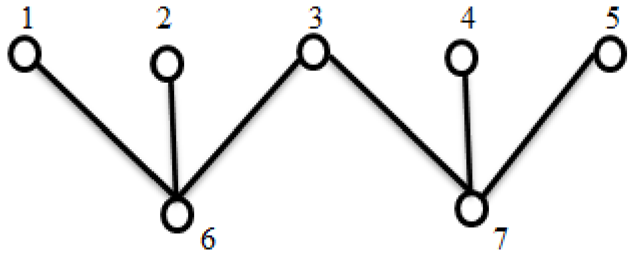
L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	2	0
	2	3	1
	3	4	2
	4	1	3
L_8	1	1	0
	2	4	1
	3	3	2
	4	2	3
L_{15}	1	2	0
	2	1	1
	3	4	2
	4	3	3
L_{22}	1	2	0
	2	3	1
	3	1	2
	4	4	3

Pada Tabel 6 hanya dipilih empat urutan linear L sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 6 dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_9 yang dinotasikan dengan l, sehingga nilai *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 3$, L_8 adalah $l_8 = 3$, L_{15} adalah $l_{15} = 3$, dan L_{22} adalah $l_{22} = 3$. Akibatnya untuk sembarang urutan linear L pada graf G_9 dapat menghasilkan nilai l yang sama dengan $l = l_1 = l_8 = l_{15} = l_{22} = 3$. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + l$ dengan $n = 3$ dan $l = 3$, sehingga $\mathrm{col}_g(G_9) = 1 + l = 1 + 3 = 4$.

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa pada sembarang graf G, jika semua simpulnya memiliki nilai *degree* yang sama maka akan menghasilkan nilai n yang sama dengan nilai *maximum degree* dan *minimum degree* dengan kata lain $\Delta(G) = \delta(G) = n$. Akibatnya pemilihan simpul B tidak berpengaruh kepada nilai *back degree* dan $\mathrm{col}_g(G)$ yang diperoleh.

Kasus 4: Nilai $\Delta(G) > \delta(G)$, serta terdapat lebih dari satu simpul yang memiliki nilai *maximum degree* yang tidak saling *adjacent*.

Misalkan G_{10} adalah graf dengan $V(G_{10}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan $E(G_{10}) = \{\{1,6\}, \{2,6\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{4,7\}, \{5,7\}\}$.



Gambar 18 Graf G_{10}

Lihat setiap *degree* pada Gambar 18 graf G_{10}, sehingga dapat diperoleh nilai *maximum* degree $\Delta(G_{10}) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(G_{10}) = 1$. Pilih salah satu simpul yang memiliki nilai *maximum* de*gree* dan dinotasikan dengan simpul B untuk menjadi simpul tujuan yang akan dipilih pada langkah berikutnya. Pada graf G_{10} pilih simpul 6 atau simpul 7 yang memiliki *maximum degree*, maka simpul B = simpul 6 atau simpul B = simpul 7. Selanjutnya tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*, karena nilai $\Delta(G_{10}) = 3$ dan $\delta(G_{10}) = 1$ maka nilai $n = 2$. Untuk mendapatkan urutan linear L, pilih semua simpul pada graf G_{10} dengan pemilihan n simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki nilai *degree* yang maksimum.

Untuk nilai $n = 2$, pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B dan memiliki *degree* yang maksimum sebanyak dua kali dan selanjutnya pilih simpul B. Setelah tiga simpul terpilih lihat kembali apakah ada simpul yang belum terpilih yang memiliki nilai $degree > n$, jika ada maka pilih kembali simpul yang memiliki nilai $degree > n$ untuk menjadi simpul B_1. Selanjutnya lihat kembali apakah ada simpul yang belum terpilih dan memiliki nilai $degree > n$. Jika ada maka pilih kembali simpul yang memiliki nilai $degree > n$ untuk menjadi simpul B_2. Jika tidak ada maka pilih simpul mana saja secara acak sehingga semua simpul terpilih. Akibatnya diperoleh beberapa kemungkinan urutan linear L untuk graf G_{10} sebagai berikut:

Pada kasus pertama jika simpul B yang dipilih adalah simpul 6, maka untuk tiga simpul pertama yang dapat dipilih saat simpul $B =$ simpul 6 adalah:
$L_{1.1} = 3 - 1 - 6$
$L_{2.1} = 3 - 2 - 6$
Lihat kembali apakah ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$. Pada graf G_{10} karena simpul 7 belum terpilih dan memiliki nilai $degree > n$, maka pilih simpul $B_1 =$ simpul 7. Selanjutnya pilih simpul yang belum terpilih yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak dua kali, lalu pilih simpul B_1. lihat kembali apakah ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$. Karena sudah tidak ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$, maka pilih simpul mana saja yang belum terpilih secara acak. Karena simpul 3 *adjacent* dengan simpul B_1 dan simpul 3 sudah terpilih pada urutan pemilihan sebelumnya, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak $p = n - q$ dengan q adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 yang sudah terpilih pada pemilihan sebelumnya. Selanjutnya diperoleh nilai $p = 2 - 1 = 1$, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak satu kali dan selanjutnya pilih simpul B_1.

Untuk dua simpul selanjutnya yang dapat dipilih setelah tiga simpul sebelumnya saat simpul B_1 = simpul 7 adalah:
$L_{1.2} = 4 - 7$
$L_{2.2} = 5 - 7$
Dari tiga simpul yang dipilih saat simpul $B =$ simpul 6 dan dua simpul selanjutnya yang dipilih saat simpul $B_1 =$ simpul 7, dapat diperoleh lima urutan simpul yang sudah terpilih sehingga dapat diperoleh kemungkinan urutan linear L sebagai berikut:

- Urutan pemilihan $L_{2.1}$dan $L_{1.2}$
  $L_1 = 3 - 2 - 6 - 4 - 7 - 1 - 5$
  $L_2 = 3 - 2 - 6 - 4 - 7 - 5 - 1$
- Urutan pemilihan $L_{2.1}$dan $L_{2.2}$
  $L_3 = 3 - 2 - 6 - 5 - 7 - 1 - 4$
  $L_4 = 3 - 2 - 6 - 5 - 7 - 4 - 1$
- Urutan pemilihan $L_{1.1}$dan $L_{1.2}$
  $L_5 = 3 - 1 - 6 - 4 - 7 - 2 - 5$
  $L_6 = 3 - 1 - 6 - 4 - 7 - 5 - 2$
- Urutan pemilihan $L_{1.1}$dan $L_{2.2}$
  $L_7 = 3 - 1 - 6 - 5 - 7 - 2 - 4$
  $L_8 = 3 - 1 - 6 - 5 - 7 - 4 - 2$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat Tabel 7. Pada Tabel 7 hanya dipilih empat urutan linear L sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 7 dapat dilihat bahwa nilai *back degree* yang diperoleh untuk setiap urutan linear L mana saja adalah sama. Selanjutnya dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_{10} yang dinotasikan dengan l,sehingga diperoleh *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 2$, L_2 adalah $l_2 = 2$, L_3 adalah $l_3 = 2$, dan L_4 adalah $l_4 = 2$. Akibatnya untuk sembarang urutan linear L pada graf G_{10} dapat diperoleh nilai l yang sama dengan $l = l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2$. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\text{col}_g(G) = 1 + l$ dengan $l = 2$, sehingga $\text{col}_g(G_{10}) = 1 + l = 1 + 2 = 3$.

Tabel 7 Nilai *back degree* pada setiap simpul graf G_{10} saat simpul B = simpul 6

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	3	0
	2	2	0
	3	6	2
	4	4	0
	5	7	2
	6	1	1
	7	5	1
L_2	1	3	0
	2	2	0
	3	6	2
	4	4	0
	5	7	2
	6	5	1
	7	1	1
L_3	1	3	0
	2	2	0
	3	6	2
	4	5	0
	5	7	2
	6	1	1
	7	4	1
L_4	1	3	0
	2	2	0
	3	6	2
	4	5	0
	5	7	2
	6	4	1
	7	1	1

Pada kasus kedua jika simpul B yang dipilih adalah simpul 7, maka untuk tiga simpul pertama yang dapat dipilih saat simpul $B =$ simpul 7 adalah:

$L_{1.1} = 3 - 4 - 7$

$L_{2.1} = 3 - 5 - 7$

Lihat kembali apakah ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$. Pada graf G_{10} karena simpul 6 belum terpilih dan memiliki nilai $degree > n$, maka pilih simpul $B_1 =$ simpul 6. Selanjutnya pilih simpul yang belum terpilih yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak dua kali, lalu pilih simpul B_1. Lihat kembali apakah ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$. Karena sudah tidak ada simpul yang memiliki nilai $degree > n$, maka pilih simpul mana saja yang belum terpilih secara acak. Karena simpul 3 *adjacent* dengan simpul B_1 dan simpul 3 sudah terpilih pada urutan pemilihan sebelumnya, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak $p = n - q$ dengan q adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 yang sudah terpilih pada pemilihan sebelumnya. Selanjutnya diperoleh nilai $p = 2 - 1 = 1$, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_1 sebanyak satu kali dan selanjutnya pilih simpul B_1.

Untuk dua simpul selanjutnya yang dapat dipilih setelah tiga simpul sebelumnya saat simpul $B_1 =$ simpul 6 adalah:
$L_{1.2} = 1 - 6$
$L_{2.2} = 2 - 6$

Berdasarkan tiga simpul yang dipilih saat simpul $B =$ simpul 7 dan dua simpul selanjutnya yang dipilih saat simpul $B_1 =$ simpul 6, dapat diperoleh lima uruta simpul yang sudah terpilih sehingga dapat diperoleh kemungkinan urutan linear L sebagai berikut:

- Urutan pemilihan $L_{2.1}$ dan $L_{1.2}$
  $L_1 = 3 - 5 - 7 - 1 - 6 - 2 - 4$
  $L_2 = 3 - 5 - 7 - 1 - 6 - 4 - 2$
- Urutan pemilihan $L_{2.1}$ dan $L_{2.2}$
  $L_3 = 3 - 5 - 7 - 2 - 6 - 1 - 4$
  $L_4 = 3 - 5 - 7 - 2 - 6 - 4 - 1$
- Urutan pemilihan $L_{1.1}$ dan $L_{1.2}$
  $L_5 = 3 - 4 - 7 - 1 - 6 - 2 - 5$
  $L_6 = 3 - 4 - 7 - 1 - 6 - 5 - 2$
- Urutan pemilihan $L_{1.1}$ dan $L_{2.2}$
  $L_7 = 3 - 4 - 7 - 2 - 6 - 1 - 5$
  $L_8 = 3 - 4 - 7 - 2 - 6 - 5 - 1$

Selanjutnya lihat nilai *back degree* pada setiap simpul dengan mengacu kepada urutan linear L. Untuk mengetahui nilai *back degree* pada setiap simpul dapat dibuat Tabel 8. Pada Tabel 8 hanya dipilih empat urutan linear L sebagai ilustrasi untuk mendapatkan nilai *back degree*. Berdasarkan Tabel 8 dapat diperoleh nilai *maximum back degree* pada graf G_{10} yang dinotasikan dengan l, sehingga nilai *maximum back degree* untuk L_1 adalah $l_1 = 2$, L_2 adalah $l_2 = 2$, L_3 adalah $l_3 = 2$, dan L_4 adalah $l_4 = 2$. Akibatnya untuk sembarang urutan linear L pada graf G_{10} dapat diperoleh l yang sama dengan $l = l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2$. Setelah diperoleh nilai l maka dapat diperoleh nilai dari *game coloring number* dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + l$ dan $l = 2$, sehingga $\mathrm{col}_g(G_{10}) = 1 + l = 1 + 2 = 3$. Akibatnya dapat disimpulkan bahwa untuk setiap simpul B dan B_1 mana saja yang dipilih akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(G)$ yang sama.

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa pada sembarang graf G, jika ada dua simpul atau lebih yang memiliki nilai *maximum degree* dan simpul tersebut tidak saling *adjacent* maka pilih simpul B_i dengan i adalah banyaknya simpul yang memiliki *maximum degree* dan tidak saling *adjacent* dengan simpul B. Jika ada simpul yang *adjacent* dengan simpul B atau B_{i-1} yang sudah dipilih pada pemilihan n kali sebelumnya, maka pilih simpul yang *adjacent* dengan simpul B_i sebanyak $p = n - q$ dengan q adalah banyaknya simpul yang *adjacent* dengan simpul B_i yang sudah terpilih pada pemilihan sebelumnya. Selanjutnya dapat diperoleh urutan linear L dan akan menghasilkan nilai l yang sama. Akibatnya untuk setiap pemilihan simpul B dan B_i mana saja akan menghasilkan nilai *game coloring number* $\mathrm{col}_g(G)$ yang tunggal.

Berdasarkan empat ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G pada urutan linear L mana saja akan menghasilkan nilai l yang sama, sehingga dapat diprediksi nilai l yang akan diperoleh dengan nilai $n = l$. Akibatnya untuk sembarang graf G, nilai dari $\mathrm{col}_g(G)$ dapat dilihat dengan mudah dengan $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + l$.

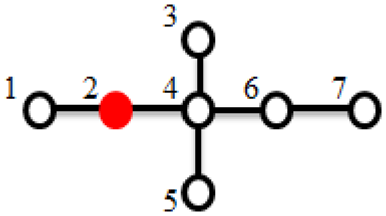
Tabel 8 Nilai back *degree* pada setiap simpul graf G_{10} saat simpul B = simpul 7

L_i	Urutan pemilihan	Simpul terpilih	*Back degree*
L_1	1	3	0
	2	5	0
	3	7	2
	4	1	0
	5	6	2
	6	2	1
	7	4	1
L_2	1	3	0
	2	5	0
	3	7	2
	4	1	0
	5	6	2
	6	4	1
	7	2	1
L_3	1	3	0
	2	5	0
	3	7	2
	4	2	0
	5	6	2
	6	1	1
	7	4	1
L_4	1	3	0
	2	5	0
	3	7	2
	4	2	0
	5	6	2
	6	4	1
	7	1	1

Misalkan G adalah graf dengan himpunan simpul V dan sisi E. *Game chromatic number* adalah banyaknya k warna terkecil yang digunakan pada permainan pewarnaan untuk mewarnai simpul pada graf G dengan warna yang tersedia pada himpunan C. Berikut akan diberikan contoh tiga kasus untuk memperoleh nilai *game chromatic number* pada graf sebelumnya untuk mengilustrasikan Teorema 1.

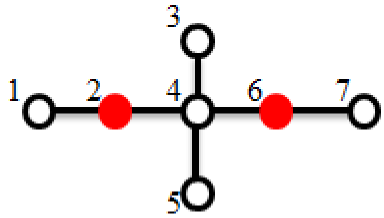
Kasus 1: Graf G memiliki kemungkinan nilai *game chromatic number* yang tunggal.

Berdasarkan Gambar 16, untuk memperoleh nilai dari *game chromatic number* pada graf G_8 maka langkah yang harus dilakukan adalah mewarnai semua simpul pada graf G_8 dengan warna yang tersedia pada himpunan C. Untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal, warnai simpul tersebut berdasarkan sembarang urutan linear L. Misalkan pada graf G_8 dengan memilih urutan linear $L_1 = 2-6-4-1-3-5-7$ dan $C = \{\text{merah}, \text{ungu}, \text{hijau}, \text{biru}, \text{kuning}\}$ maka pemilihan pertama adalah mewarnai simpul 2 dengan warna merah, ungu, hijau, biru atau kuning. Gambar 19 adalah pewarnaan simpul 2 jika memilih untuk mewarnai simpul 2 dengan warna merah.



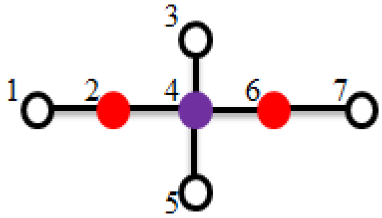
Gambar 19 Pewarnaan simpul 2 dengan warna merah pada graf G_8

Pemilihan kedua, warnai simpul 6 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 6 tidak *adjacent* dengan simpul 2 dan untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal warnai simpul yang tidak saling *adjacent* dengan warna yang sudah digunakan, maka warnai simpul 6 dengan warna merah seperti pada Gambar 20.



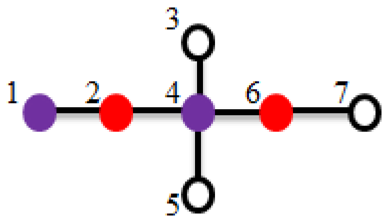
Gambar 20 Pewarnaan simpul 6 dengan warna merah pada graf G_8

Pemilihan ketiga, warnai simpul 4 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 4 *adjacent* dengan simpul 2 dan simpul 6, maka warnai simpul 4 dengan warna baru. Gambar 21 adalah pewarnaan simpul 4 jika memilih untuk mewarnai simpul 4 dengan warna ungu.



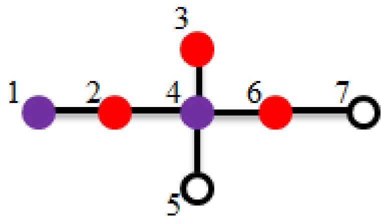
Gambar 21 Pewarnaan simpul 4 dengan warna ungu pada graf G_8

Pemilihan keempat, warnai simpul 1 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 1 *adjacent* dengan simpul 2 maka simpul 1 tidak boleh diwarnai dengan warna merah. Karena simpul 1 tidak *adjacent* dengan simpul 4 maka simpul 1 dapat diwarnai dengan warna ungu seperti pada Gambar 22.



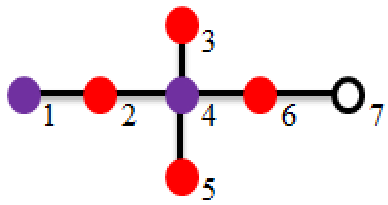
Gambar 22 Pewarnaan simpul 1 dengan warna ungu pada graf G_8

Pemilihan kelima, warnai simpul 3. Karena simpul 3 *adjacent* dengan simpul 4 maka simpul 3 tidak boleh diwarnai dengan warna ungu. Karena simpul 3 tidak *adjacent* dengan simpul 2 dan simpul 6 maka simpul 3 dapat diwarnai dengan warna merah seperti pada Gambar 23.



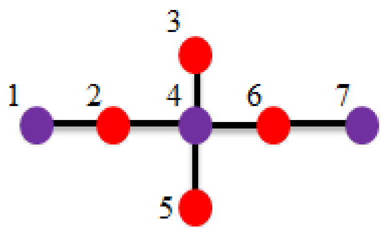
Gambar 23 Pewarnaan simpul 3 dengan warna merah pada graf G_8

Pemilihan keenam, warnai simpul 5. Karena simpul 5 *adjacent* dengan simpul 4 maka simpul 5 tidak boleh diwarnai dengan warna ungu. Karena simpul 5 tidak *adjacent* dengan simpul 2, 3 dan 6 maka simpul 5 dapat diwarnai dengan warna merah seperti pada Gambar 24.



Gambar 24 Pewarnaan simpul 5 dengan warna merah pada graf G_8

Pemilihan ketujuh, warnai simpul 7. Karena simpul 7 *adjacent* dengan simpul 6 maka simpul 7 tidak boleh diwarnai dengan warna merah. Karena simpul 7 tidak *adjacent* dengan simpul 1 dan 4 maka simpul 7 dapat diwarnai dengan warna ungu seperti pada Gambar 25.



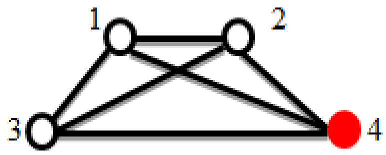
Gambar 25 Pewarnaan simpul 7 dengan warna ungu pada graf G_8

Pada Gambar 25 semua simpul graf G_8 sudah diwarnai, sehingga nilai dari *game chromatic number* $\chi_g(G_8) = k = 2$ dengan k adalah banyaknya warna terkecil yang digunanakan pada himpunan C.

Berdasarkan urutan linear L dapat diperoleh nilai $\chi_g(G_8) = 2$. Berdasarkan bahasan sebelumnya diperoleh 2 nilai $\mathrm{col}_g(G_8)$ dengan $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 2 = 3$ untuk nilai $n = 2$ dan $\mathrm{col}_g(G_8) = 1 + l = 1 + 3 = 4$ untuk nilai $n = 3$, sehingga diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G_8) > \chi_g(G_8)$.

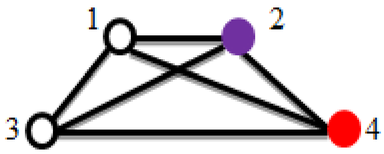
Kasus 2: Semua simpul pada graf G saling terhubung sehingga menghasilkan nilai *game chromatic number* yang akan sama dengan banyaknya simpul.

Berdasarkan Gambar 17, untuk memperoleh nilai dari *game chromatic number* pada graf G_9 maka langkah yang harus dilakukan adalah mewarnai semua simpul pada graf G_9 dengan warna yang tersedia pada himpunan C. Untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal, warnai simpul tersebut berdasarkan urutan linear L mana saja. Misalkan pada graf G_9 dengan memilih urutan linear L dengan $L_6 = 4 - 2 - 3 - 1$ dan $C = \{\text{merah}, \text{ungu}, \text{hijau}, \text{biru}, \text{kuning}\}$ maka pemilihan pertama adalah mewarnai simpul 4 dengan warna merah, ungu, hijau, biru atau kuning. Gambar 26 adalah pewarnaan simpul 4 jika memilih untuk mewarnai simpul 4 dengan warna merah.



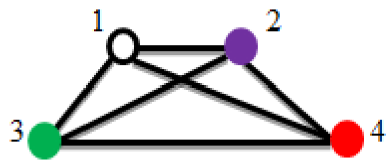
Gambar 26 Pewarnaan simpul 4 dengan warna merah pada graf G_9

Pemilihan kedua, warnai simpul 2 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 2 *adjacent* dengan simpul 4 maka warnai simpul 2 dengan warna baru. Gambar 27 adalah pewarnaan simpul 2 jika memilih untuk mewarnai simpul 2 dengan warna ungu.



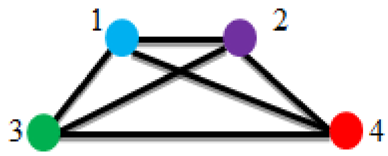
Gambar 27 Pewarnaan simpul 2 dengan warna ungu pada graf G_9

Pemilihan ketiga, warnai simpul 3 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 3 *adjacent* dengan simpul 2 dan simpul 4 maka warnai simpul 3 dengan warna baru selain warna merah dan ungu. Gambar 28 adalah pewarnaan simpul 3 jika memilih untuk mewarnai simpul 3 dengan warna hijau.



Gambar 28 Pewarnaan simpul 3 dengan warna hijau pada graf G_9

Pemilihan keempat, warnai simpul 1 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 1 *adjacent* dengan simpul 2, 3 dan 4 maka simpul 1 tidak boleh diwarnai dengan warna merah, ungu dan hijau. Akibatnya warnai simpul 1 dengan warna baru. Gambar 29 adalah pewarnaan simpul 1 jika memilih untuk mewarnai simpul 1 dengan warna biru.



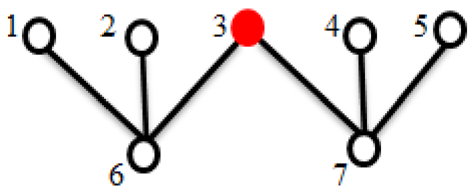
Gambar 29 Pewarnaan simpul 1 dengan warna biru pada graf G_9

Pada Gambar 29 semua simpul graf G_9 sudah diwarnai, sehingga nilai dari *game chromatic number* $\chi_g(G_9) = k = 4$ dengan k adalah banyaknya warna terkecil yang digunakan pada himpunan C.

Berdasarkan urutan linear L dapat diperoleh nilai $\chi_g(G_9) = 4$. Berdasarkan bahasan sebelumnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G_9)$ dengan $\mathrm{col}_g(G_9) = 1 + l = 1 + 3 = 4$, sehingga diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G_9) = \chi_g(G_9)$.

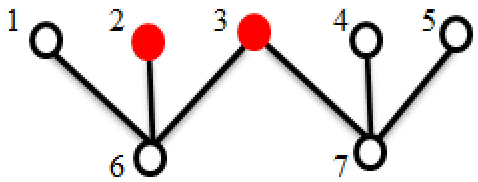
Kasus 3: Jika banyaknya warna yang digunakan adalah k dengan $k > 1$ maka nilai *game chromatic number* adalah banyaknya warna yang minimum.

Berdasarkan Gambar 18, untuk memperoleh nilai dari *game chromatic number* pada graf G_{10} maka langkah yang harus dilakukan adalah mewarnai semua simpul pada graf G_{10} dengan warna yang tersedia pada himpunan C. Untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal, warnai simpul tersebut berdasarkan urutan linear L mana saja. Misalkan pada graf G_{10} dengan memilih urutan linear L saat simpul $B = 6$ dan simpul $B_1 = 7$ dengan $L_3 = 3 - 2 - 6 - 5 - 7 - 1 - 4$ dan $C = \{\text{merah}, \text{ungu}, \text{hijau}, \text{biru}, \text{kuning}\}$ maka pemilihan pertama adalah mewarnai simpul 3 dengan warna merah, ungu, hijau, biru atau kuning. Gambar 30 adalah pewarnaan simpul 3 jika memilih untuk mewarnai simpul 3 dengan warna merah.



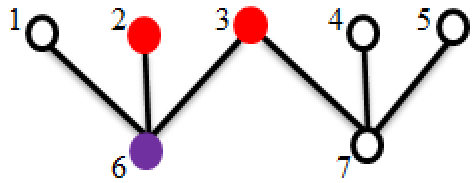
Gambar 30 Pewarnaan simpul 3 dengan warna merah pada graf G_{10}

Pemilihan kedua, warnai simpul 2 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 2 tidak *adjacent* dengan simpul 3 dan untuk memperoleh nilai *game chromatic number* yang optimal warnai simpul yang tidak saling *adjacent* dengan warna yang sudah digunakan, maka warnai simpul 2 dengan warna merah seperti pada Gambar 31.



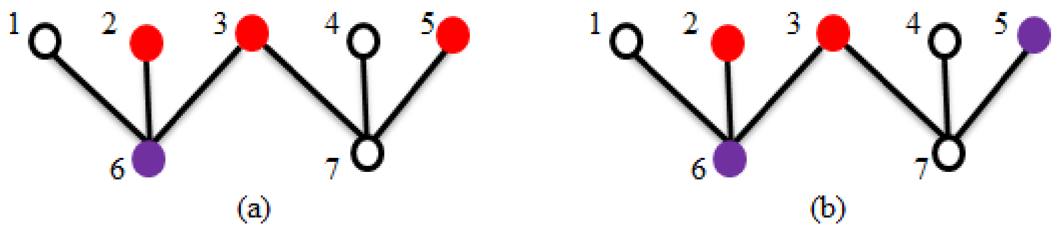
Gambar 31 Pewarnaan simpul 2 dengan warna merah pada graf G_{10}

Pemilihan ketiga, warnai simpul 6 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 6 *adjacent* dengan simpul 2 dan simpul 3 maka warnai simpul 6 dengan warna baru. Gambar 32 adalah pewarnaan simpul 6 jika memilih untuk mewarnai simpul 6 dengan warna ungu.



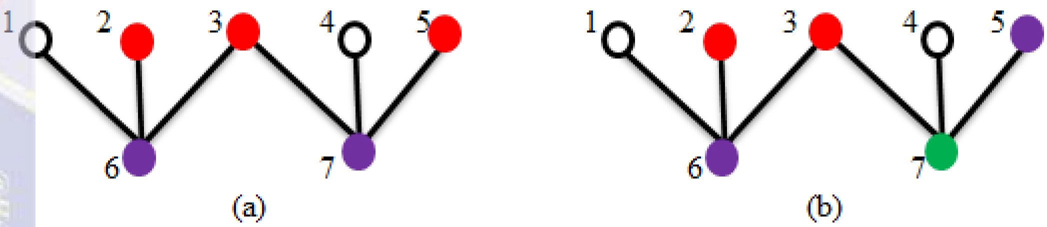
Gambar 32 Pewarnaan simpul 6 dengan warna ungu pada graf G_{10}

Pemilihan keempat, warnai simpul 5 dengan warna pada himpunan C. Karena simpul 5 tidak *adjacent* dengan simpul 2, 3 dan 6 maka simpul 5 dapat diwarnai dengan warna merah atau ungu. Gambar 33 adalah pewarnaan simpul 5 (a) jika memilih untuk mewarnai simpul 5 dengan warna merah dan (b) jika memilih untuk mewarnai simpul 5 dengan warna ungu.



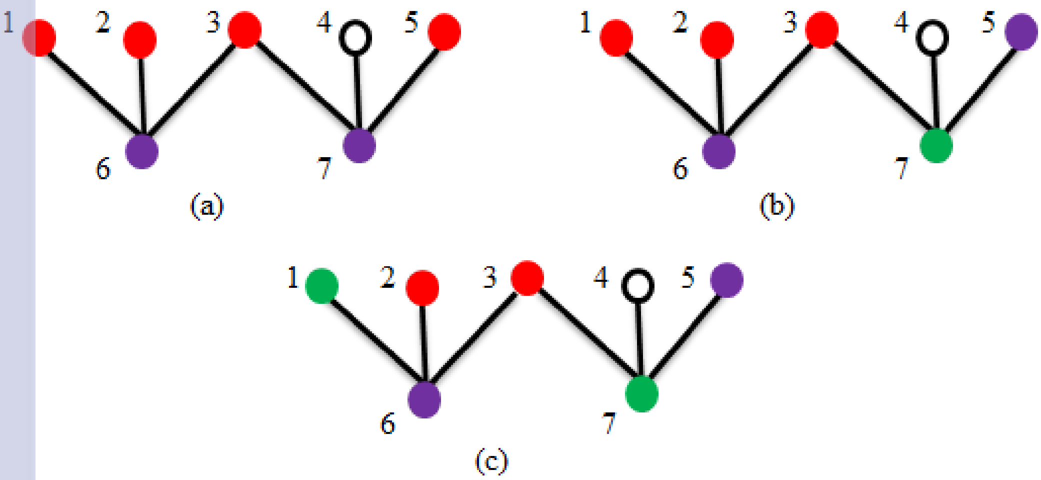
Gambar 33 Pewarnaan simpul 5 dengan warna merah atau ungu pada graf G_{10}

Pemilihan kelima, warnai simpul 7. Karena simpul 7 *adjacent* dengan simpul 3 dan simpul 5 maka simpul 7 tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama dengan simpul 3 dan simpul 5. Pada Gambar 33 (a) karena simpul 7 tidak *adjacent* dengan simpul 6 maka warnai simpul 7 dengan warna ungu. Pada Gambar 33 (b) karena simpul 3 sudah diwarnai dengan warna merah dan simpul 5 sudah diwarnai dengan warna ungu maka warnai simpul 7 dengan warna baru. Gambar 34 adalah pewarnaan pada simpul 7 (a) jika memilih mewarnai simpul 7 dengan warna ungu dan (b) jika memilih mewarnai simpul 7 dengan warna hijau.



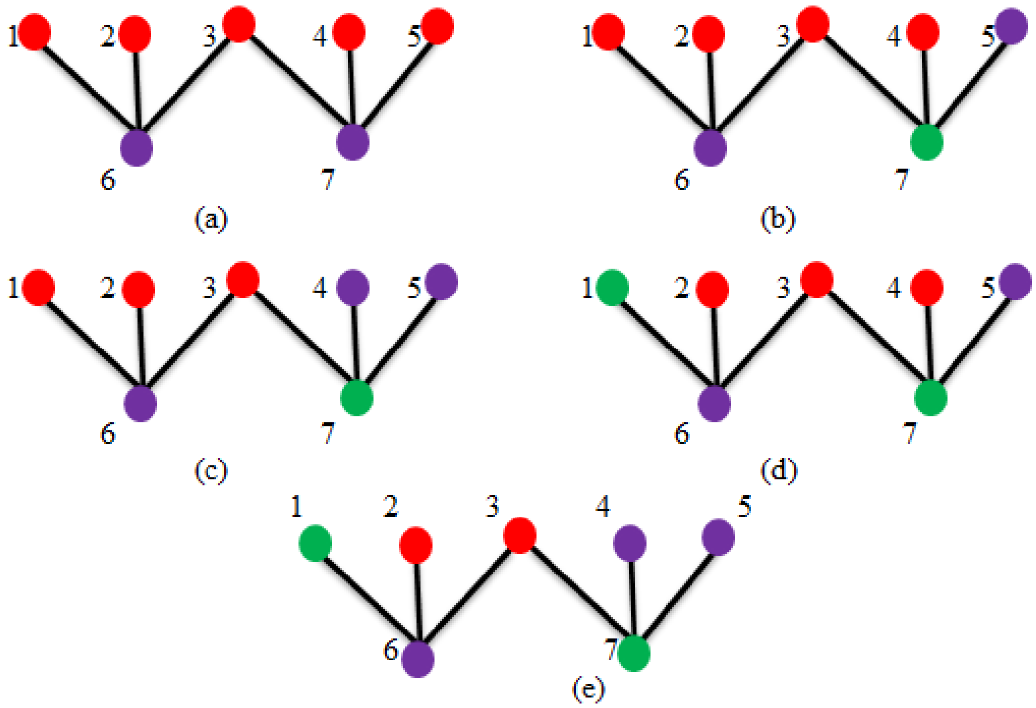
Gambar 34 Pewarnaan simpul 7 dengan warna ungu dan hijau pada graf G_{10}

Pemilihan keenam, warnai simpul 1. Karena simpul 1 *adjacent* dengan simpul 6 maka simpul 1 tidak boleh diwarnai dengan warna ungu. Karena simpul 1 tidak *adjacent* dengan simpul 2, 3, 5 dan 7 maka simpul 1 dapat diwarnai dengan warna merah atau hijau. Pada Gambar 34 (a) simpul 1 dapat diwarnai dengan warna merah dan pada Gambar 34 (b) simpul 1 dapat diwarnai dengan warna merah atau hijau. Gambar 35 adalah pewarnaan simpul 1 (a) jika memilih mewarnai simpul 1 pada Gambar 34 (a) dengan warna merah, (b) jika memilih mewarnai simpul 1 pada Gambar 34 (b) dengan warna merah, (c) jika memilih mewarnai simpul 1 pada Gambar 34 (b) dengan warna hijau.



Gambar 35 Pewarnaan simpul 1 dengan warna merah atau hijau pada graf G_{10}

Pemilihan ketujuh, warnai simpul 4. Karena simpul 4 *adjacent* dengan simpul 7 maka simpul 4 tidak boleh diwarnai dengan warna yang sama pada simpul 7. Pada Gambar 35 (a) simpul 4 dapat diwarnai dengan warna merah dan pada Gambar 35 (b) dan (c) simpul 4 dapat diwarnai dengan warna merah atau ungu.



Gambar 36 Pewarnaan simpul 4 dengan warna merah atau ungu pada graf G_{10}

Gambar 36 adalah pewarnaan simpul 4 (a) dengan warna merah pada Gambar 35 (a), (b) dengan warna merah pada Gambar 35 (b), (c) dengan warna ungu pada Gambar 35 (b), (d) dengan warna merah pada Gambar 35 (c) , (e) dengan warna ungu pada Gambar 35 (c). Pada Gambar 36 semua simpul sudah diwarnai, maka diperoleh nilai *game chromatic number* $\chi_g(G_{10}) = k$ dengan k adalah banyaknya warna terkecil yang digunakan pada himpunan C. Berdasarkan Gambar 36 (a) banyaknya warna yang digunakan adalah dua warna dan pada Gambar 36 (b), (c), (d) dan (e) banyaknya warna yang digunakan adalah tiga warna. Akibatnya banyaknya warna terkecil yang digunakan untuk mewarnai semua simpul pada graf G_{10} adalah sebanyak dua warna sehingga nilai $\chi_g(G_{10}) = 2$.

Berdasarkan urutan linear dapat diperoleh nilai $\chi_g(G_{10}) = 2$. Berdasarkan bahasan sebelumnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G_{10})$ dengan $\mathrm{col}_g(G_{10}) = 1 + l = 1 + 2 = 3$, sehingga diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G_{10}) > \chi_g(G_{10})$.

Teorema 2

Jika diberikan graf $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ dengan $E = E_1 \cup E_2$, maka diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) \leq \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$, dengan $\Delta(G_2)$ adalah *maximum degree* dari graf G_2.

(Zhu 1998)

Bukti:

Misalkan diberikan graf $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ dengan $E = E_1 \cup E_2$. Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang graf G nilai dari $\text{col}_g(G) \leq \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$, sehingga akan dilihat 3 kasus berikut.

Kasus 1 ($\Delta(\text{G}) = \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) = \delta(G_1)$)

Jika nilai dari $\Delta(G) = \Delta(G_1) = a$ dan $\delta(G) = \delta(G_1) = b$ pada graf G dan G_1 dengan a dan b adalah bilangan asli, maka akan diperoleh nilai n yang sama pada graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Setelah mendapatkan nilai n, maka dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* pada graf G dan G_1. Selanjutnya dapat diperoleh nilai dari $\text{col}_g(G) = \text{col}_g(G_1) = 1 + l$ dan nilai dari $\Delta(G_2)$paling minimum adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) – \Delta(G_1) = 0$. Akibatnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ untuk $\Delta(G_2) = 0$ dan $\text{col}_g(G) < \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ untuk $\Delta(G_2) > 0$.

Kasus 2 ($\Delta(\text{G}) > \Delta(G_1)$ atau $\delta(G) > \delta(G_1)$)

Jika nilai dari $\Delta(G) > \Delta(G_1)$ atau $\delta(G) > \delta(G_1)$ pada graf G dan graf G_1, maka akan diperoleh kemungkinan nilai n yang sama atau berbeda untuk setiap graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree* pada setiap graf. Setelah mendapatkan nilai n dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* untuk setiap graf G dan G_1. Selanjutnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = 1 + l$ untuk graf G dan $\text{col}_g(G_1) = 1 + l$ untuk graf G_1, sehingga $\text{col}_g(G) \geq \text{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2)$ paling minimum adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$. Akibatnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) \leq \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\Delta(G_2) > 0$.

Kasus 3 ($\Delta(\text{G}) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) > \delta(G_1)$)

Jika nilai dari $\Delta(\text{G}) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) > \delta(G_1)$ pada graf G dan graf G_1, maka akan diperoleh nilai n yang berbeda untuk setiap graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree* pada setiap graf. Setelah mendapatkan nilai n dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* untuk setiap graf G dan G_1. Selanjutnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = 1 + l$ untuk graf G dan $\text{col}_g(G_1) = 1 + l$ untuk graf G_1, sehingga $\text{col}_g(G) > \text{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2)$ paling minimum adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$. Akibatnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) \leq \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\Delta(G_2) > 0$.

Berdasarkan kasus 1, kasus 2, dan kasus 3 dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G dengan graf G_1dan G_2 adalah *spanning subgraph* dari graf G dan $E = E_1 \cup E_2$. Jika graf G dan G_1 memiliki himpunan sisi $E = E_1$ maka himpunan sisi pada E_2 paling sedikit adalah $E_2 = \{\}$, sehingga diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan nilai $\Delta(G_2) = 0$. Jika graf G dan G_1

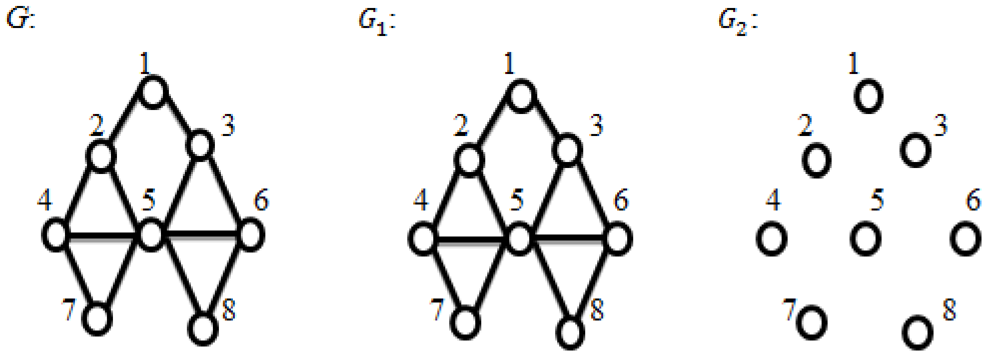
memiliki himpunan sisi $E \neq E_1$ maka himpunan sisi pada $E_2 = \emptyset$, sehingga diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) \leq \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$. Dengan demikian Teorema 2 terbukti.

$\blacksquare$

Teorema 2 berikut digunakan untuk melihat hubungan antara graf G, G_1 dan G_2 melalui nilai *game coloring number* dan nilai *maximum degree* dengan graf G_1 dan G_2 merupakan *spanning subgraph* dari graf G. Berikut akan diberikan contoh empat kasus dengan kemungkinan yang berbeda untuk membuktikan Teorema 2 dengan memperoleh nilai *game coloring number* pada graf G dan G_1.

Kasus 1 ($\Delta(G) = \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) = \delta(G_1)$)

Misalkan $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ adalah graf dengan $E = E_1 \cup E_2$ saat $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$, $E_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E_2 = \{\}$.



Gambar 37 Graf G_1 dan G_2 adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 1

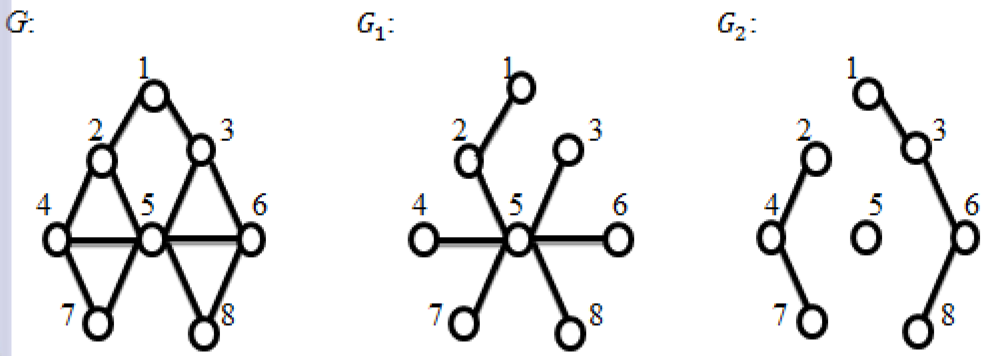
Degree setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Gambar 37 dapat dilihat di Tabel 9. Pada Tabel 9 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(G_1) = 6$, $\Delta(G_2) = 0$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(G_1) = 2$, $\delta(G_2) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan G_1, maka tentukan nilai n untuk graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$, $\delta(G) = 2$, $\Delta(G_1) = 6$ dan $\delta(G_1) = 2$, maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$ dan untuk graf G_1 adalah $n = 4$. Berdasarkan Teorema 1, nilai dari $n = l$ dengan l adalah nilai *maximum back degree* yang diperoleh dari urutan linear L. Selanjutnya dapat diperoleh nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G_1 adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 4 = 5$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 0$ akibatnya nilai dari $\mathrm{col}_g(G) = \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\mathrm{col}_g(G) = 5$, $\mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 5 + 0 = 5$.

Tabel 9 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Kasus 1

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
G_1	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
G_2	1	0
	2	0
	3	0
	4	0
	5	0
	6	0
	7	0
	8	0

Kasus 2 ($\Delta(G) = \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) \neq \delta(G_1)$ dengan $\delta(G) > \delta(G_1)$)

Misalkan $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ adalah graf dengan $E = E_1 \cup E_2$ saat $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$, $E_1 = \{\{1,2\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\}\}$ dan $E_2 = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{3,6\}, \{4,7\}, \{6,8\}\}$.



Gambar 38 Graf G_1 dan G_2 adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 2

Degree setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Gambar 38 dapat dilihat di Tabel 10.

Tabel 10 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Kasus 2

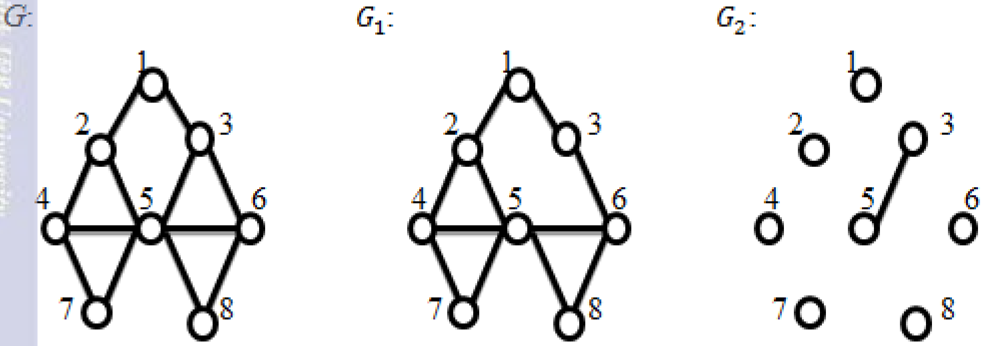
Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
G_1	1	1
	2	2
	3	1
	4	1
	5	6
	6	1
	7	1
	8	1
G_2	1	1
	2	1
	3	2
	4	2
	5	0
	6	2
	7	1
	8	1

Pada Tabel 10 dapat diperoleh nilai *maximum* de*gree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(G_1) = 6$, $\Delta(G_2) = 2$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(G_1) = 1$, $\delta(G_2) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan G_1, maka tentukan nilai n untuk graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(G_1) = 6$ dan $\delta(G_1) = 1$ maka nilai n untuk graf G_1 adalah $n = 3$ atau $n = 4$. Nilai *game coloring number* untuk graf G_1 saat $n = 3$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 3 = 4$ dan untuk graf graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(G) > \mathrm{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 2$ maka nilai dari $\mathrm{col}_g(G) < \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\mathrm{col}_g(G) = 5$, $\mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 4 + 2 = 6$. Nilai *game coloring number* untuk graf G_1 saat $n = 4$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(G) = \mathrm{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 2$ maka nilai dari $\mathrm{col}_g(G) < \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\mathrm{col}_g(G) = 5$, $\mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 5 + 2 = 7$.

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa, jika graf G dan G_1 memiliki nilai $\Delta(G) = \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) \neq \delta(G_1)$ dengan $\delta(G) > \delta(G_1)$ maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* $\mathrm{col}_g(G) \geq \mathrm{col}_g(G_1)$. Akibatnya akan diperoleh nilai dari $\mathrm{col}_g(G) \leq \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan nilai $\Delta(G_2)$ paling minimum untuk graf G_2 adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$.

Kasus 3 ($\Delta(\mathrm{G}) \neq \Delta(G_1)$ dengan $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) = \delta(G_1)$)

Misalkan $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ adalah graf dengan $E = E_1 \cup E_2$ saat $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$, $E_1 = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E_2 = \{\{3,5\}\}$.



Gambar 39 Graf G_1 dan G_2 adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 3

Degree setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Gambar 39 dapat dilihat di Tabel 11. Pada Tabel 11 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(G_1) = 5$, $\Delta(G_2) = 1$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(G_1) = 2$, $\delta(G_2) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan G_1 maka tentukan nilai n untuk graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$, maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(G_1) = 5$ dan $\delta(G_1) = 2$, maka nilai n untuk graf G_1 adalah $n = 3$ atau $n = 4$. Nilai *game coloring number* untuk graf G_1 saat $n = 3$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 3 = 4$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(G) > \mathrm{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 2$ maka nilai dari $\mathrm{col}_g(G) < \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\mathrm{col}_g(G) = 5$, $\mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 4 + 2 = 6$. Nilai *game coloring number* untuk graf G_1 saat $n = 4$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(G) = \mathrm{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 2$ maka nilai dari $\mathrm{col}_g(G) < \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $\mathrm{col}_g(G) = 5$, $\mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 5 + 2 = 7$.

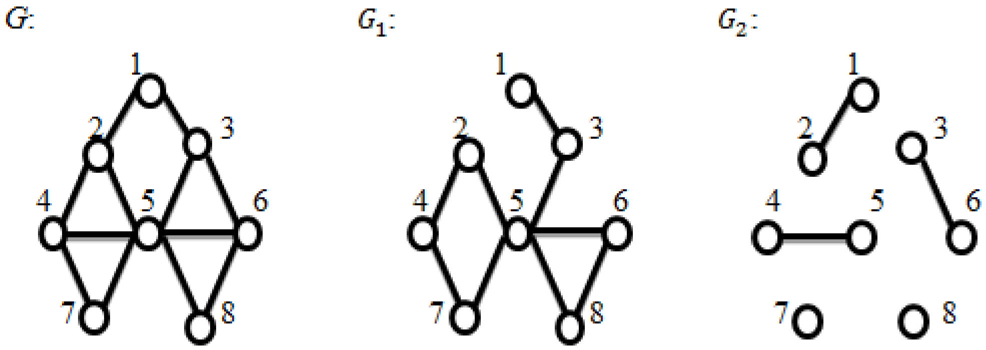
Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa, jika graf G dan G_1 memiliki nilai $\Delta(\mathrm{G}) \neq \Delta(G_1)$ dengan $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) = \delta(G_1)$ maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* $\mathrm{col}_g(G) \geq \mathrm{col}_g(G_1)$. Akibatnya akan diperoleh nilai dari $\mathrm{col}_g(G) \leq \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan nilai $\Delta(G_2)$ paling minimum untuk graf G_2 adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$.

Tabel 11 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Kasus 3

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
G_1	1	2
	2	3
	3	2
	4	3
	5	5
	6	3
	7	2
	8	2
G_2	1	0
	2	0
	3	1
	4	0
	5	1
	6	0
	7	0
	8	0

Kasus 4 ($\Delta(G) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) > \delta(G_1)$)

Misalkan $G = (V, E)$, $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ adalah graf dengan $E = E_1 \cup E_2$ saat $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$, $E_1 = \{\{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E_2 = \{\{1,2\}, \{3,6\}, \{4,5\}\}$.



Gambar 40 Graf G_1 dan G_2 adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 4

Degree setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Gambar 40 dapat dilihat di Tabel 12.

Tabel 12 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G, G_1, dan G_2 pada Kasus 4

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
G_1	1	1
	2	2
	3	2
	4	2
	5	5
	6	2
	7	2
	8	2
G_2	1	1
	2	1
	3	1
	4	1
	5	1
	6	1
	7	0
	8	0

Pada Tabel 12 dapat diperoleh nilai *maximum* de*gree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(G_1) = 5$, $\Delta(G_2) = 1$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(G_1) = 1$, $\delta(G_2) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan G_1 maka tentukan nilai n untuk graf G dan G_1 dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$, maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(G_1) = 5$ dan $\delta(G_1) = 1$, maka nilai n untuk graf G_1 adalah $n = 3$, sehingga nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G_1 adalah $\text{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 3 = 4$. Akibatnya nilai dari $\text{col}_g(G) > \text{col}_g(G_1)$. Nilai dari $\Delta(G_2) = 1$ maka nilai dari $\text{col}_g(G) = \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan $col_g(G) = 5$ dan $\text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2) = 4 + 1 = 5$.

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa, jika graf G dan G_1 memiliki nilai $\Delta(\mathrm{G}) \neq \Delta(G_1)$ dengan $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(G_1)$ dan $\delta(G) = \delta(G_1)$ dengan $\delta(G) > \delta(G_1)$ maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* $\text{col}_g(G) > \text{col}_g(G_1)$. Akibatnya akan diperoleh nilai dari $\text{col}_g(G) \leq \text{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan nilai nilai $\Delta(G_2)$ paling minimum untuk graf G_2 adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$.

Berdasarkan ilustrasi pada kasus 2, kasus 3 dan kasus 4 dapat disimpulkan bahwa, jika graf G dan G_1 memiliki nilai $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(G_1)$ dan atau $\delta(G) > \delta(G_1)$ maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* $\mathrm{col}_g(G) \geq \mathrm{col}_g(G_1)$. Akibatnya akan diperoleh nilai dari $\mathrm{col}_g(G) \geq \mathrm{col}_g(G_1) + \Delta(G_2)$ dengan nilai nilai $\Delta(G_2)$ paling minimum untuk graf G_2 adalah $\Delta(G_2) = \Delta(G) - \Delta(G_1)$.

Teorema 3

Jika H adalah subgraf dari G, maka $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$.

(Zhu 1998)

Bukti:

Misalkan $G = (V, E)$ adalah sembarang graf terhubung dan H subgraf dari graf G. Akan dibuktikan bahwa untuk sembarang graf H dengan graf H merupakan subgraf dari graf G maka nilai dari $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$, sehingga akan dilihat 3 kasus berikut.

Kasus 1 ($\Delta(\mathrm{G}) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$)

Jika nilai dari $\Delta(\mathrm{G}) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$ pada graf G dan H, maka akan diperoleh nilai n yang sama untuk graf G dan graf H dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Setelah mendapatkan nilai n, maka dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* pada graf G dan H. Akibatnya diperoleh nilai dari $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G) = 1 + l = 1 + n$.

Kasus 2 ($\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(H)$ atau $\delta(G) > \delta(H)$)

Jika nilai dari $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(H)$ atau $\delta(G) > \delta(H)$ pada graf G dan graf H, maka akan diperoleh nilai n yang berbeda untuk graf G dan H dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree* pada setiap graf. Setelah mendapatkan nilai n dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* untuk graf G dan H. Jika nilai n pada graf G atau graf H memiliki dua kemungkinan, maka untuk nilai n yang sama pada graf G dan graf H akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(G) = \mathrm{col}_g(H)$. Jika nilai n pada graf G atau graf H memiliki dua kemungkinan, maka untuk nilai n yang berbeda pada graf G dan graf H akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$. Akibatnya nilai dari *game coloring number* adalah $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$.

Kasus 3 ($\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(H)$ dan $\delta(G) > \delta(H)$)

Jika nilai dari $\Delta(\mathrm{G}) > \Delta(H)$ dan $\delta(G) > \delta(H)$ pada graf G dan graf H, maka akan diperoleh nilai n yang berbeda untuk graf G dan H dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree* pada setiap graf. Setelah mendapatkan nilai n dapat diperoleh nilai l dengan $n = l$ dan l adalah *maximum back degree* untuk graf G dan H, sehingga nilai n untuk graf G dan graf

H akan berbeda dan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$. Akibatnya nilai dari *game coloring number* adalah $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$.

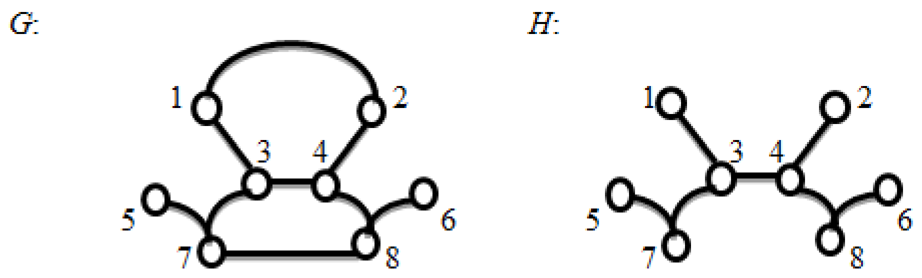
Teorema 3 berikut digunakan untuk melihat hubungan antara graf G dan graf H dengan graf H merupakan subgraf dari graf G melalui nilai *game coloring number*. Berdasarkan kasus 1, kasus 2 dan kasus 3 untuk sembarang graf H dengan graf H merupakan subgraf dari graf G. Jika graf G dan graf H memiliki nilai *maximum degree* dan *minimum degree* yang sama, maka akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G)$. Jika graf G dan graf H memiliki dua nilai n dengan salah satu nilai n nya sama, maka akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(H) \le \mathrm{col}_g(G)$. Jika graf G dan graf H memiliki nilai *maximum degree* dan *minimum degree* yang berbeda, maka akan menghasilkan nilai $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$. Dengan demikian Teorema 3 terbukti.

■

Berikut akan diberikan contoh empat kasus dengan kemungkinan yang berbeda untuk membuktikan Teorema 3 dengan memperoleh nilai *game coloring number* pada graf G dan graf H.

Kasus 1.1 ($\Delta(\mathrm{G}) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah *spanning subgraph* dari G dengan $V(G) = V(H) = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $E(G) = \{\{1,2\},\{1,3\},\{2,4\},\{3,7\},\{3,4\},\{4,8\},\{5,7\},\{6,8\},\{7,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,3\},\{2,4\},\{3,7\},\{3,4\},\{4,8\},\{5,7\},\{6,8\}\}$.



Gambar 41 Graf H adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 1.1

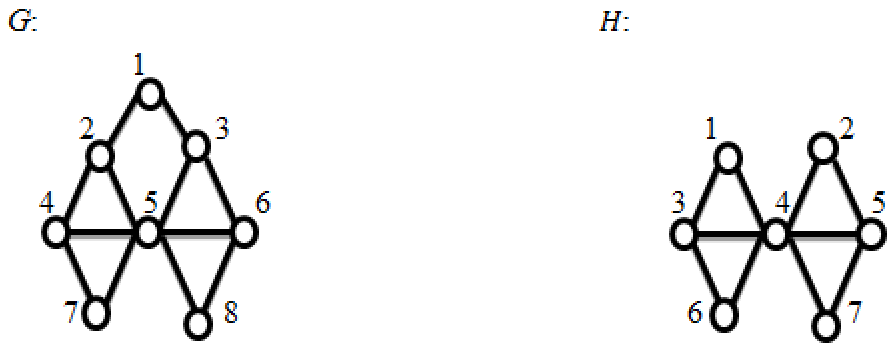
Degree setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 41 dapat dilihat di Tabel 13. Pada Tabel 13 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 3$, $\Delta(H) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 1$, $\delta(H) = 1$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 1$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 2$. Karena nilai $\Delta(H) = 3$ dan $\delta(H) = 1$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 2$. Selanjutnya dapat diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$, sehingga nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$ dan untuk graf H adalah $\mathrm{col}_g(H) = 1 + n = 1 + 2 = 3$. Akibatnya nilai dari $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G)$.

Tabel 13 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 1.1

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	2
	3	3
	4	3
	5	1
	6	1
	7	3
	8	3
H	1	1
	2	1
	3	3
	4	3
	5	1
	6	1
	7	2
	8	2

Kasus 1.2 ($\Delta(G) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah subgraf dari G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,6\}, \{4,5\}, \{2,4\}, \{4,7\}, \{2,5\}, \{5,7\}\}$.



Gambar 42 Graf H adalah subgraf dari graf G pada kasus 1.2

D*egree* setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 42 dapat dilihat di Tabel 14. Pada Tabel 14 dapat diperoleh nilai *maximum* de*gree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(H) = 6$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(H) = 2$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$, maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(H) = 6$ dan $\delta(H) = 2$, maka nilai n untuk graf H adalah $n = 4$. Selanjutnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$, sehingga nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf H adalah $col_g(H) = 1 + n = 1 + 4 = 5$. Akibatnya nilai dari $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G)$.

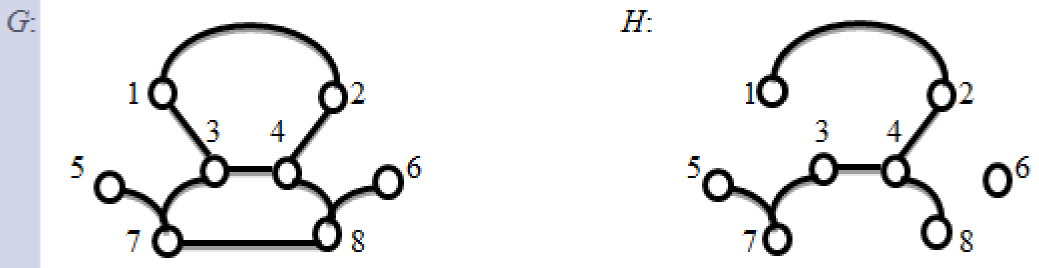
Tabel 14 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 1.2

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
H	1	2
	2	2
	3	3
	4	6
	5	3
	6	2
	7	2

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G dan H, jika memiliki nilai *maximum degree* dan *minimum degree* yang sama maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* dengan nilai $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G)$.

Kasus 2.1 ($\Delta(G) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) \neq \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah *spanning subgraph* dari G dengan $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,7\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{3,7\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{5,7\}\}$.



Gambar 43 Graf H adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 2.1

Degree setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 43 dapat dilihat di Tabel 15. Pada Tabel 15 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 3$, $\Delta(H) = 3$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 1$, $\delta(H) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*.

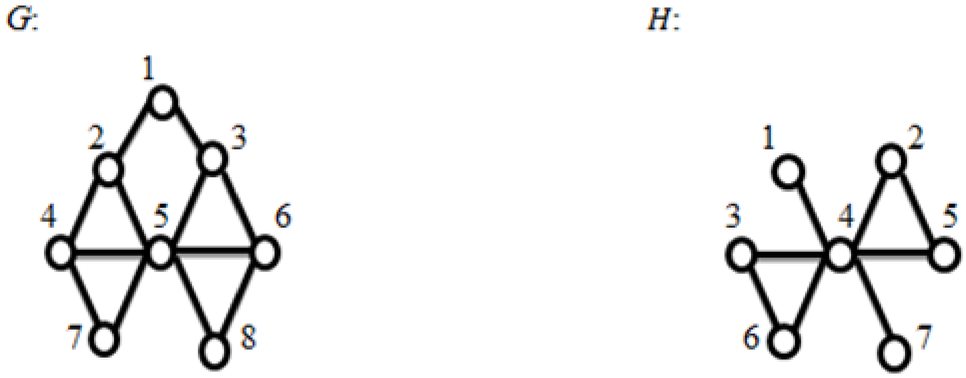
Karena nilai $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 1$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 2$. Karena nilai $\Delta(H) = 3$ dan $\delta(H) = 0$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 1$ atau $n = 2$. Selanjutnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 1$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 1 = 2$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 2$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 2 = 3$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(H) = \mathrm{col}_g(G)$. Akibatnya nilai dari $\mathrm{col}_g(H) \le \mathrm{col}_g(G)$.

Tabel 15 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 2.1

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	2
	3	3
	4	3
	5	1
	6	1
	7	3
	8	3
H	1	1
	2	2
	3	2
	4	3
	5	1
	6	0
	7	2
	8	1

Kasus 2.2 ($\Delta(G) = \Delta(H)$ dan $\delta(G) \neq \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah subgraf dari G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,4\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,6\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{2,4\}, \{2,5\}\}$.



Gambar 44 Graf H adalah subgraf dari graf G pada kasus 2.2

D*egree* setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 44 dapat dilihat di Tabel 16. Pada Tabel 16 dapat diperoleh nilai *maximum* de*gree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(H) = 6$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(H) = 1$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(H) = 6$ dan $\delta(H) = 1$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 3$ atau $n = 4$. Selanjutnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 3$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 3 = 4$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(H) < \mathrm{col}_g(G)$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 4$ adalah $\mathrm{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\mathrm{col}_g(H) = col_g(G)$. Akibatnya nilai dari $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$.

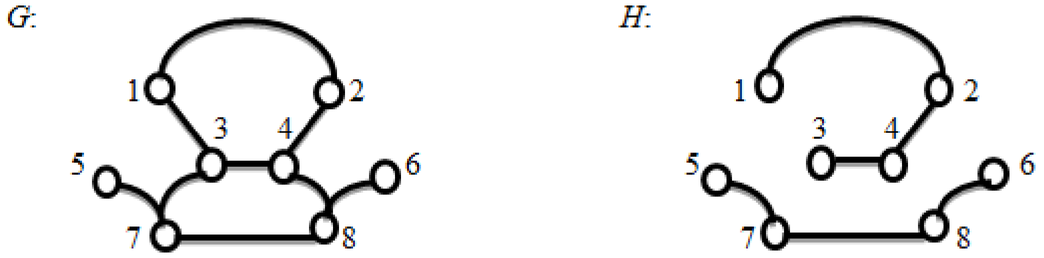
Tabel 16 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 2.2

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
H	1	1
	2	2
	3	3
	4	6
	5	2
	6	2
	7	1

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G dan H, jika memiliki *maximum degree* yang berbeda dan *minimum degree* yang sama maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* dengan nilai $\mathrm{col}_g(H) \leq \mathrm{col}_g(G)$.

Kasus 3.1 ($\Delta(G) \neq \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah *spanning subgraph* dari G dengan $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,7\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,2\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}\}$.



Gambar 45 Graf H adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 3.1

Degree setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 45 dapat dilihat di Tabel 17.

Tabel 17 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 3.1

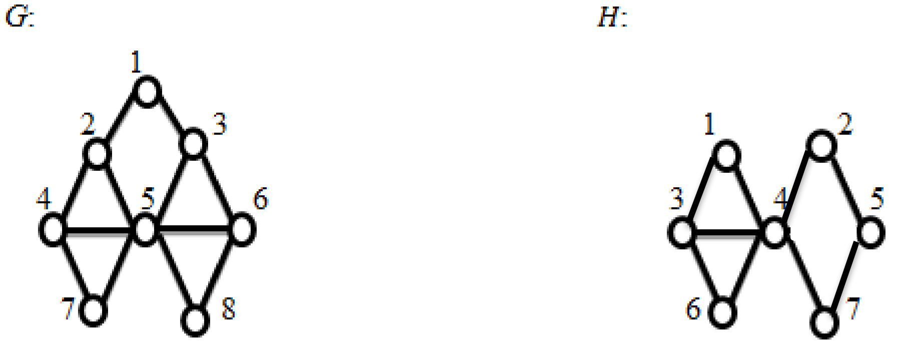
Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	2
	3	3
	4	3
	5	1
	6	1
	7	3
	8	3
H	1	1
	2	2
	3	1
	4	2
	5	1
	6	1
	7	2
	8	2

Pada Tabel 17 dapat diperoleh nilai *maximum* degree $\Delta(G) = 3$, $\Delta(H) = 2$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 1$, $\delta(H) = 1$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 1$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 2$. Karena nilai $\Delta(H) = 2$ dan $\delta(H) = 1$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 1$ atau $n = 2$.

Selanjutnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 1$ adalah $\text{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 1 = 2$ dan untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$, sehingga nilai dari $\text{col}_g(H) < \text{col}_g(G)$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 2$ adalah $\text{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 2 = 3$ dan untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$, sehingga nilai dari $\text{col}_g(H) = \text{col}_g(G)$. Akibatnya nilai dari $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$.

Kasus 3.2 ($\Delta(G) \neq \Delta(H)$ dan $\delta(G) = \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah subgraf dari G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,4\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{4,6\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{2,4\}, \{2,5\}\}$.



Gambar 46 Graf H adalah subgraf dari graf G pada kasus 3.2

Degree setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 46 dapat dilihat di Tabel 18.

Tabel 18 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 3.2

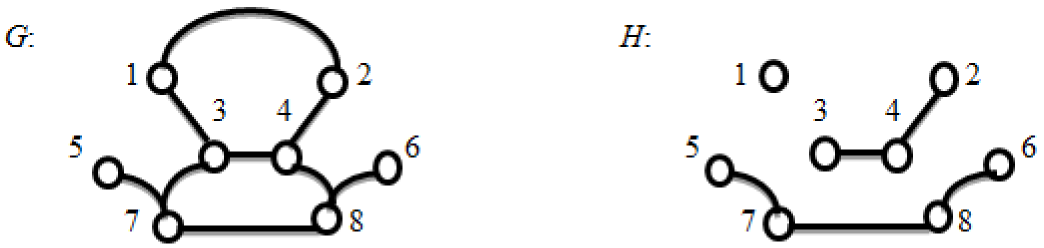
Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
H	1	2
	2	2
	3	3
	4	5
	5	2
	6	2
	7	2

Pada Tabel 18 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 6$, $\Delta(H) = 5$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(H) = 2$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena nilai $\Delta(H) = 5$ dan $\delta(H) = 1$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 3$ atau $n = 4$. Selanjutnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 3$ adalah $\text{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 3 = 4$ dan untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\text{col}_g(H) < \text{col}_g(G)$. Nilai *game coloring number* untuk graf H saat $n = 4$ adalah $\text{col}_g(G_1) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$, sehingga nilai dari $\text{col}_g(H) = \text{col}_g(G)$. Akibatnya nilai dari $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$.

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G dan H, jika memiliki *maximum degree* yang berbeda dan *minimum degree* yang sama maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* dengan nilai $\text{col}_g(H) \leq \text{col}_g(G)$.

Kasus 4.1 ($\Delta(G) \neq \Delta(H)$ dan $\delta(G) \neq \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah *spanning subgraph* dari G dengan $V(G) = V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{3,7\}, \{3,4\}, \{4,8\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{2,4\}, \{3,4\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{7,8\}\}$.



Gambar 47 Graf H adalah *spanning subgraph* dari graf G pada kasus 4.1

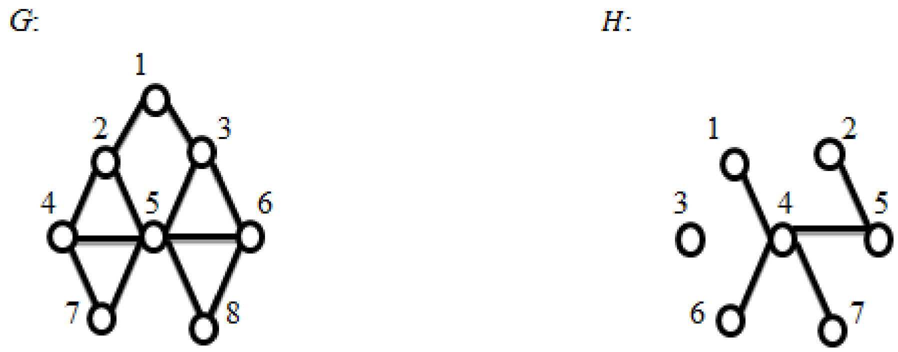
Degree setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 47 dapat dilihat di Tabel 19. Pada Tabel 19 dapat diperoleh nilai *maximum degree* $\Delta(G) = 3$, $\Delta(H) = 2$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 1$, $\delta(H) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n untuk graf G dan H dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 3$ dan $\delta(G) = 1$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 2$. Karena $\Delta(H) = 2$ dan $\delta(H) = 0$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 1$. Selanjutnya diperoleh nilai $\text{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$, sehingga nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\text{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 2 = 3$ dan untuk graf H adalah $\text{col}_g(H) = 1 + n = 1 + 1 = 2$. Akibatnya nilai dari $\text{col}_g(H) < \text{col}_g(G)$.

Tabel 19 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 4.1

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	2
	3	3
	4	3
	5	1
	6	1
	7	3
	8	3
H	1	0
	2	1
	3	1
	4	2
	5	1
	6	1
	7	2
	8	2

Kasus 4.2 ($\Delta(G) \neq \Delta(H)$ dan $\delta(G) \neq \delta(H)$)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf dan H adalah subgraf dari G dengan $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $E(G) = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{4,7\}, \{5,7\}, \{5,8\}, \{6,8\}\}$ dan $E(H) = \{\{1,4\}, \{4,6\}, \{4,5\}, \{4,7\}, \{2,5\}\}$.



Gambar 48 Graf H adalah subgraf dari graf G pada kasus 4.2

D*egree* setiap simpul dari graf G dan H pada Gambar 48 dapat dilihat di Tabel 20. Pada Tabel 20 dapat diperoleh nilai *maximum* degree $\Delta(G) = 6$, $\Delta(H) = 4$ dan *minimum degree* $\delta(G) = 2$, $\delta(H) = 0$. Selanjutnya untuk mendapatkan nilai dari *game coloring number* pada graf G dan H maka tentukan nilai n dengan n adalah nilai tengah antara *maximum degree* dan *minimum degree*. Karena nilai $\Delta(G) = 6$ dan $\delta(G) = 2$ maka nilai n untuk graf G adalah $n = 4$. Karena $\Delta(H) = 4$ dan $\delta(H) = 0$ maka nilai n untuk graf H adalah $n = 2$. Selanjutnya diperoleh nilai $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n$ dengan nilai $n = l$, sehingga nilai *game coloring number* untuk graf G adalah $\mathrm{col}_g(G) = 1 + n = 1 + 4 = 5$ dan untuk graf H adalah $\text{col}_g(H) = 1 + n = 1 + 2 = 3$. Akibatnya nilai dari $\text{col}_g(H) < \text{col}_g(G)$.

Tabel 20 Nilai *degree* setiap simpul dari graf G dan H pada Kasus 4.2

Graf	Simpul	*Degree*
G	1	2
	2	3
	3	3
	4	3
	5	6
	6	3
	7	2
	8	2
H	1	1
	2	2
	3	0
	4	4
	5	2
	6	1
	7	1

Berdasarkan ilustrasi di atas dapat disimpulkan bahwa untuk sembarang graf G dan H, jika memiliki *maximum degree* dan *minimum degree* yang berbeda maka akan menghasilkan nilai *game coloring number* dengan nilai $\text{col}_g(H) < \text{col}_g(G)$.

SIMPULAN DAN SARAN

Simpulan

Dalam karya ilmiah ini telah dibuktikan tiga teorema yang berhubungan dengan *game coloring number* pada sembarang graf G. Pertama, nilai *game coloring number* yang diperoleh pada sembarang graf bernilai lebih besar atau sama dengan nilai *game chromatic number*, dengan $\text{col}_g(G)$ dan $\chi_g(G)$ memiliki hubungan dengan *back degree*. Kemudian yang kedua, misalkan $G = (V, E)$ merupakan graf sembarang. Jika terdapat graf $G_1 = (V, E_1)$ dan $G_2 = (V, E_2)$ dengan $E = E_1 \cup E_2$, maka nilai penjumlahan dari *game coloring number* pada graf G_1 dengan nilai *maximum degree* pada graf G_2 bernilai lebih besar atau sama dengan nilai *game coloring number* pada graf G. Selanjutnya yang terakhir, jika terdapat graf H yang merupakan subgraf atau *spanning subgraph* dari graf G dengan H dan G merupakan graf sembarang, maka nilai dari *game coloring number* pada graf H bernilai lebih kecil atau sama dengan nilai dari *game coloring number* pada graf G.

Saran

Dalam karya ilmiah ini telah dibahas mengenai *game chromatic number* dan *game coloring number*. Untuk penelitian selanjutnya dapat digunakan graf *tree* untuk mencari nilai *game chromatic number* dan *game coloring number*.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand G, Zhang P. 2009. *Chromatic Graph Theory*. London (GB): CRC Pr.

Chou C, Wang W, Zhu X. 2001. Relaxed game chromatic number of graphs. *Discrete Mathematics*. 262(1):89-98.doi:10.1016/S0012-365X(02)00521-6.

Hartsfield N, Ringel G. 1990. *Pearls in Graph Theory*: *A Comprehensive introduction*. New York (US): Academic Press.

Kierstead HA. 2005. Asymmetric graph coloring games. *Discrete Mathematics*. 48(3):169-185.doi:10.1002/jgt.20049.

Lipschutz S, Lipson ML. 2007. *Discrete Mathematics*. Ed Ke-3. New York City (US): McGRAW-HILL.

Zhu X. 1998. The game coloring number of planar graphs. *Combinatorial Theory*. 75(2):245-258.doi:10.1006/jctb.1998.1878.

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Bandung pada tanggal 09 Juli 1993. Penulis merupakan putri kedua dari tiga bersaudara dari Bapak Wawan Darmawan dan Ibu Oneng Mulyani. Tahun 2011 penulis lulus dari SMAN 21 Bandung dan pada tahun yang sama penulis diterima sebagai mahasiswi Institut Pertanian Bogor (IPB) melalui jalur Ujian Talenta Mandiri IPB (UTM). Penulis tercatat sebagai mahasiswi Departemen Matematika. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA).

Selama mengikuti perkuliahan, penulis aktif di berbagai kegiatan organisasi dan kepanitiaan. Penulis aktif tergabung dalam kepengurusan Gugus Mahasiswa Matematika (Gumatika) Divisi Informasi dan Komunikasi pada tahun 2013. Penulis tergabung sebagai Bendahara Divisi Informasi dan Komunikasi. Selain itu, penulis juga aktif dalam kegiatan kepanitiaan, di antaranya menjadi anggota divisi kreatif pada acara *Welcome Ceremony Mathematics* 49, anggota divisi acara dalam acara IPB *Mathematics Challenge*, serta berbagai acara lainnya.