Ya Allah yang Maha Agung, ku bersujud kepada-Mu seraya
mengucapkan Alhamdulillah.
Bersyukur karena kau telah menciptakan ku.
Bersyukur karena aku selalu mendapatkan rahmat-Mu.
Bersyukur diriku kepada-Mu Wahai sang Kholik.
Engkau yang mengajarkan manusia dari ketidaktahuan.

Kepada kedua orang tuaku.
Seperti udara… kasih yang engkau berikan.
Tak cukup ucapan terimkasihku.
Jika kelak nanti ayah ibu sudah lanjut usia,
aku kan menjadi tongkatmu.
Ku mohon doa restu darimu.

Seperti sebutir pasir di tepi pantai
Bak bintang di tengah hamparan malam nan kelam.
Aku hanyalah seorang manusia yang tiada daya dalam kesendirian.
Di tengah perjalanan, kuperlukan pertolongan saudara-saudara ku tercinta.

Kepada Allah, ayah bunda dan saudara-saudaraku tercinta
kupersembahkan karya ini.

PENENTUAN PELUANG BERTAHAN SUATU NAMA KELUARGA DENGAN *BRANCHING PROCESSES*

RIA ANDRIANA

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004

RINGKASAN

Branching processes menyediakan suatu model sederhana untuk mempelajari populasi dari berbagai tipe individu dari satu generasi ke generasi berikutnya. Oleh karena itu *branching processes* digunakan untuk menyelesaikan model pertumbuhan suatu populasi, dimana pertumbuhan populasi ini merupakan suatu proses acak yang terkait dengan aturan-aturan peluang. Salah satu contohnya adalah penggunaan *branching processes* dalam menentukan peluang bertahan suatu nama keluarga.

Peluang bertahan suatu nama keluarga pada generasi tertentu dapat ditentukan jika kita mengetahui jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tersebut dan sebaran peluang setiap individu untuk menghasilkan sejumlah keturunan pada akhir masa hidupnya.

Karya ilmiah ini mengkaji sifat-sifat stokastik dari jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu serta penentuan peluang bertahan suatu nama keluarga.

PENENTUAN PELUANG BERTAHAN SUATU NAMA KELUARGA DENGAN *BRANCHING PROCESSES*

RIA ANDRIANA

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Departemen Matematika

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004

Judul : Penentuan Peluang Bertahan suatu Nama Keluarga dengan *Branching Processes*

Nama : Ria Andriana

Nrp : G05400029

Departemen : Matematika

Menyetujui,

Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc.
Pembimbing I

Dr. Ir. Endar H. Nugrahani, MS.
Pembimbing II

Mengetahui,

Dr. Ir. Amril Aman, MSc.
Ketua Jurusan

Tanggal Lulus :

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Bogor pada tahun 1981 sebagai puteri sulung dari 2 bersaudara, anak dari pasangan Bapak Isak dan Ibu Resmiati.

Setelah lulus dari SMU Negeri I Ciawi pada tahun 2000, penulis melanjutkan kuliah ke IPB melalui jalur USMI di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Selanjutnya penulis memilih bidang minat Matematika Ekonomi, yang kemudian memperoleh gelar Sarjana Sains pada tahun 2004.

Selama mengikuti perkuliahan, penulis pernah menjadi asisten mata kuliah Pengantar Matematika, Matematika Dasar, Kalkulus dan Kalkulus I. Selain itu penulis juga aktif di Gumatika dan pernah menjadi anggota Departemen Kewirausahaan. Kemudian pada tahun 2003 penulis menjadi pengajar SLTP di bimbingan belajar Prestasi IPB.

KATA PENGANTAR

Tidak terasa waktu berlalu begitu cepat. Rasanya baru kemarin penulis menapakkan kaki di Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor. Rangkaian proses belajar selama menjadi mahasiswa penulis lalui dengan penuh rasa suka cita. Tibalah saat bagi penulis untuk membuat sebuah karya ilmiah yang merupakan syarat kelulusan untuk menjadi sarjana. Dengan segala usaha dan doa, penulis akhirnya dapat menyelesaikan karya ilmiah ini.

Rasa syukur sudah selayaknya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena rahmat dan karunia yang diberikan-Nya penulis dapat menyelesaikan semua dengan baik.

Penulis hanyalah seorang insan biasa yang penuh dengan kelemahan, sehingga perlu bagi penulis mencari pertolongan kepada orang-orang yang siap membantu dalam menyelesaikan masalah-masalah yang selalu menghadang. Ucapan terimakasih penulis haturkan kepada :

1. Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc selaku dosen pembimbing I (terimakasih atas ilmu, bimbingan dan kesabarannya selama ini, saya tidak akan lulus secepat ini tanpa bantuan dari bapak). Dr. Ir. Endar H. Nugrahani, MS selaku dosen pembimbing II (terimakasih atas bimbingan dan masukannya). Ir. Retno Budiarti, MS selaku dosen penguji (terimakasih atas saran dan masukannya).
2. *Mamah*, makasih untuk dukungan dan do'anya... mamah tempat ia berkeluh kesah, mamah selalu membuat hati ia tenang. Ia gak akan jadi seperti ini tanpa perhatian dan kasih sayang mamah... maafin ia selama ini selalu nyusahin mamah... *Bapa*, makasih karena selalu memberikan pandangan-pandangan positif yang akhirnya membuat ia lebih percaya diri. *Ai* (Ari Andriansah) adikku tersayang, rajin belajar yach!!! Biar ai jadi anak pinter, teteh seneng ai dah pinter ngaji... Ai harus nurut sama mamah&bapa, agar jadi anak yang sholeh. Skripsi ini ia persembahkan untuk mamah, bapa dan ai.
3. *Mamah bapa& bapa mamah*, makasih atas perhatian, do'a dan kasih sayangnya selama ini... *Teh lie* (Yuli Kursiyah), makasih selalu mau ngedengerin curhat ia (dalam keadaan apapun...), makasih dah jadi "teteh" untuk non puteri he..he..he... Cuma satu kata yang bisa ia bilang untuk "teteh", ia sayang ma the lie... aa (a Rizal) makasih udah jadi aa yang paling baik dan perhatian sama ia. Satu hal yang pasti ia senang jadi bagian dari keluarga ini....
4. Ema, makasih karena selalu ngedo'ain ia, ia bisa seperti ini berkat do'a dari ema... Untuk semua keluarga besar di Tasik Malaya (bi Iya, mang Kikin, neng Tina, Kiki, dede, Egi, a Yuda, mamah Atang, teh Neng, teh Tini, teh Yani,....), terimakasih karena selalu mendukung dan mendo'akan ia (walaupun dari jauh). Ia sayang kalian semua...
5. Aa (Dedi Supriadi), makasih karena selalu ngasih semangat, selalu sabar ngehadapin ia 'n dah setia nungguin ia selama seminar&sidang. Karena perhatian dan kasih sayang aa... ia jadi ngerti artinya berbagi&menyayangi. Makasih karena aa selalu ada disaat ia sedih...disaat ia membutuhkan bantuan, dan semua yang aa berikan untuk ia... amat berarti dan menjadi bagian terpenting dalam hidup ia. Satu lagi... makasih karena sudah mewarnai hari-hari ia dengan keceriaan.
6. (Echi, Nita, Uun, Choy, Santi, Yuyun, Yuan), makasih untuk persahabatan yang indah ini... *Echi*, sohib ia ini dah kayak si mamah. Dideket echi ia selalu senang dan ia ngerasa aman karena echi selalu ngejagain ia, he..he..smangatttt yach!!!! *Nita*, orangnya gak pernah capek, enerjik dan aktif. Nita enak diajak tuker pikiran, abis pinter sich!! Nit, mana yang duluan nich!! Seminar or me....?? *Uun*, emang sosok "penghibur sejati" ia seneng curhat ma uun. Semangat yach!! Jangan loyo, kan ada pembimbing spiritual, he..he..*Choy* yang baik dan imut-imut...jangan nyerah yach!!! Kejar terus referensinya, OK!! *Santi*, sumber informasi anak-anak '37, rajin-rajin ke kampus yach!!! Biar kita gak ketinggalan berita, he..he.. Tetep Smangatttt!!!! *Yuyun* yang imut tapi sekarang pendiam, makasih yach kamar yuyun dah kayak kamar ia sendiri. Dah nyampe pembimbing 2 kan!! Kapan seminar???? *Yuan*, cewe imut tapi lincah...ia seneng kalo ngobrol ma yuan, nyambung!!! Oh iya gimana kabar teoremanya????
7. (Made, Arif, Adi, Lucky, O-chay, Ade, Rhesa, Beni), tanpa kalian matematika '37 gak akan rame&solid, bareng-bareng kalian ia jadi ngerti indahnya kebersamaan....*Made*, makasih dah bantuin ia klo kesusahan buktiin teorema. *Arif*, yang "cute" jangan pacaran melulu, he..he.. kapan seminar??? Ditunggu undangannya!! *Adi* yang "cool" sory yach ia suka nyuruh-nyuruh adi, jaga

terus semangatnya, jangan sampe turun, OK!! *O-chay* 'n the red car, makasih selalu ngebantuin ia 'n mobilnya selalu ada saat dibutuhkan. Maaf yach ia suka berani nyuruh-nyuruh o-chay, semangat yach ngerjain skripsinya!!! *Ade* yang I"ucu" tetep semangat yach!! Jangan down duluan sebelum mencoba &berusaha, OK!! *Beni*, ia salut sama keuletan beni, kayaknya bisa cepet seminar nich!!! *Resha*, makasih yach selalu ngasih masukan-masukan untuk ia, ia jadi lebih percaya diri kalo dah ngobrol ma resha. Resha enak diajak ngobrol tentang apa aja... apalagi tentang yang jayus-jayus, he..he.. *Lucky* yang "funky" walaupun orangnya cuek tapi lucky rajin ngadep dosen, mo cepet-cepet ..... yach?? Undang-undang yee...

8. *Pipit*, ia seneng dengerin pipit cerita apalagi kalo dah ngasih petuah atau nasehat, menyejukkan hati... Sebenernya pipit salah satu inspirasi ia sehingga akhirnya ia bisa lulus dengan cepat, makasih yach!! *Meiza* (temen satu bimbingan), ayo!!! Rajin-rajin ngadep dosen ye... biar cepet-cepet dilamar, he..he.. *Mike*, ia salut dengan kesabaran dan ketabahan mike, good luck yach!! *Krisna* yang "lugu" makasih yach ia sering pinjem kamar krisna, kapan nich diresmikan ma si kakak?? *Ida*, temen curhat yang asyik...betah ngobrol lama-lama sama ida. *Rani*, temenku yang satu ini... kemana aza sich??? Ia kangen pengen curhat nich!! btw sukses yach nie....
9. *Cecep*, makasih dah mau bantuin ia...cep, maaf yach ia suka berani nyuruh-nyuruh. Eh gimana balapannya??? Kapan nyusul nich!!! *Rudi & Ribut*, makasih suka bantuin ia di lab. Sukses yach!!
10. Kakak-kakak kelas '36 (K'Barkat, K'Tomi, K'Mansur, K'Eko, K'Bina,The Fitri), makasih selalu mau ia repotin... tetep smangat & sukses yach!!!
11. Adik-adik kelas '38, '39, '40. Rajin-rajin belajar yach!!! Jangan pernah menyia-nyiakan waktu dan kesempatan yang ada. *Nita & Indra* ('39), tetep semangat kuliahnya 'n jangan pernah lupain SMUN 1 Ciawi, OK!!!
12. *Mas Bono*, dengan keceriaannya.... membuat matematika jadi beda!!! *Mas Yono*, ia kagum sama mas Yono, rajin banget!!!! makasih yach OHP-nya. *Bu Ade*, ia seneng kalo ngobrol sama ibu kayak sama mamah sendiri, makasih bu dah mau repot-repot ngurusin semuanya!!! *Mas Deni* yang baik... makasih selalu mau nungguin ia ampe lab tutup, eh salah... ampe selesai ia ngetik baru lab ditutup he..he.. thx yach!!!

Rasanya masih banyak pihak yang sudah membantu penulis tetapi tak dapat disebutkan satu per satu. Kepada mereka penulis ucapkan terimakasih semoga Allah SWT senantiasa meridhoi setiap kebaikan kita.

Mudah-mudahan apa yang ada didalam karya ilmiah ini dapat membawa manfaat bagi siapa saja yang membutuhkannya

Penulis,
Ria Andriana

DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Waktu memainkan peranan penting dalam dunia, sehingga banyak permasalahan dalam kehidupan sehari-hari merupakan proses yang berkembang secara acak dengan berlalunya waktu (Proses Stokastik). Proses stokastik terkait dengan aturan-aturan peluang, artinya kita tidak dapat mengetahui secara pasti dan tepat mengenai kejadian pada waktu yang akan datang. Proses stokastik salah satunya dapat dilihat pada pertumbuhan suatu populasi, tetapi model untuk pertumbuhan populasi ini dikenal sulit untuk diatasi. Oleh karena itu diperlukan suatu model yang akurat dan sederhana sehingga lebih mudah untuk dikerjakan. Model ini dikenal dengan *branching processes.*

Branching processes menyediakan suatu model sederhana untuk mempelajari populasi dari berbagai tipe individu dari satu generasi ke generasi berikutnya. Individu-individu ini dapat berupa foton dalam photo-multiplier, partikel-partikel dalam kamar kabut, mikroorganisme atau manusia dalam suatu keluarga.

Sudah sejak lama *branching processes* digunakan untuk mengatasi masalah kepunahan nama keluarga atau keberadaan nama keluarga. Nama keluarga penting bagi sebagian masyarakat di negara kita, karena nama keluarga merupakan identitas atau ciri khas bagi setiap individu dalam bersosialisasi dengan individu lain dalam suatu populasi. Biasanya nama keluarga hanya diturunkan dan diwariskan pada anak laki-laki.

Misalkan setiap individu mempunyai peluang p_k untuk memiliki k keturunan laki-laki, maka dari satu individu tersebut akan diperoleh keturunan generasi ke-1, ke-2,..., ke-n. Jadi yang sangat mempengaruhi berapa besar peluang bertahan suatu nama keluarga adalah jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu dan sebaran peluang setiap individu untuk menghasilkan sejumlah keturunan pada akhir masa hidupnya. Jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu merupakan penjumlahan acak dari peubah acak-peubah acak. Untuk penyederhanaan analisis, tanpa mengurangi keumuman penerapannya, diasumsikan bahwa populasi terdiri atas individu-individu yang dapat bereproduksi, dimana populasi awal hanya terdiri atas satu individu. Setiap individu dan keturunannya pada akhir masa hidupnya menghasilkan keturunan dengan sebaran peluang yang sama. Serta waktu hidup setiap individu dan keturunannya sama Yang akan dibahas dalam tulisan ini adalah menentukan sifat-sifat stokastik dari jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu dan menentukan peluang bertahan suatu nama keluarga.

Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan karya ilmiah ini adalah sebagai berikut:

1. Menentukan sifat-sifat stokastik dari jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu;
2. Menentukan peluang bertahan suatu nama keluarga.

Metode dan Sistematika Penulisan

Metode penulisan karya ilmiah ini adalah studi literatur dan materi karya ilmiah ini diambil dari pustaka-pustaka yang terkait dengan tulisan ini.

Karya ilmiah ini terdiri atas empat bagian. Bagian pertama menjelaskan latar belakang masalah, tujuan serta metode dan sistematika penulisan. Bagian kedua menyajikan landasan teori berupa defenisi dan teorema yang diperlukan pada bagian berikutnya. Bagian ketiga menyajikan hasil dan pembahasan dan bagian terakhir menyajikan kesimpulan.

LANDASAN TEORI

Ruang Contoh, Kejadian dan Peluang

Dalam suatu percobaan seringkali dilakukan pengulangan, yang biasanya dilakukan dalam kondisi yang sama. Walaupun kita dapat mengetahui semua kemungkinan hasil yang akan muncul, tetapi hasil pada percobaan berikutnya tidak dapat diduga dengan tepat. Percobaan semacam ini yang dapat diulang dalam kondisi yang sama disebut percobaan acak.

[Hogg dan Craig,1995]

Definisi 1 (Ruang Contoh)
Himpunan dari semua kemungkinan hasil dari suatu percobaan disebut ruang contoh, dinotasikan dengan Ω.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 2 (Kejadian)
Suatu kejadian A adalah subset atau anak gugus dari ruang contoh Ω.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 3 (Medan-σ)
Suatu himpunan $\mathcal{F}$ yang anggotanya terdiri atas anak gugus ruang contoh Ω, disebut medan-σ jika memenuhi kondisi berikut :

1. $\phi \in \mathcal{F}$
2. Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
3. Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ maka $A^c \in \mathcal{F}$.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 4 (Ukuran peluang)
Suatu ukuran peluang **P** pada $(\Omega, \mathcal{F})$ merupakan suatu fungsi $\mathbf{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ yang memenuhi :

1. $\mathbf{P}(\phi) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.
2. Jika $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ adalah himpunan-himpunan yang saling lepas, yaitu $A_i \cap A_j = \phi$ untuk setiap pasangan *i,j* dimana $i \neq j$, maka

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i).$$

Pasangan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ disebut ruang peluang.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 5 (Kejadian Bebas)
Kejadian A dan B dikatakan saling bebas jika

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Secara umum himpunan kejadian $\{A_i, i \in I\}$ dikatakan saling bebas jika

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in J} A_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(A_i),$$

untuk setiap anak gugus berhingga J dari I.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Peubah Acak dan Fungsi Sebaran

Definisi 6 (Peubah Acak)
Suatu peubah acak X adalah suatu fungsi $X : \Omega \to \mathrm{R}$ dengan sifat bahwa $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ untuk setiap $x \in \mathrm{R}$.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 7 (Fungsi Sebaran)
Fungsi sebaran dari suatu peubah acak X adalah suatu fungsi $F : \mathrm{R} \to [0,1]$ yang didefinisikan oleh

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x).$$

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 8 (Peubah Acak Diskret)
Peubah acak X dikatakan diskret jika nilainya hanya pada anak gugus yang tercacah $\{x_1, x_2, \ldots\}$ dari R.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Suatu gugus bilangan $\mathcal{A}$ disebut tercacah jika $\mathcal{A}$ terdiri dari bilangan berhingga atau anggota $\mathcal{A}$ dapat dikorespondensikan 1-1 dengan bilangan bulat positif.

Definisi 9 (Fungsi Kerapatan Peluang)
Fungsi kerapatan peluang dari peubah acak diskret X adalah fungsi $p : \mathrm{R} \to [0,1]$ yang diberikan oleh
$$p_X(x) = \mathbf{P}(X = x).$$
[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 10 (Peubah Acak Kontinu)
Suatu peubah acak X disebut kontinu jika fungsi sebarannya dapat dinyatakan sebagai
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)du, \quad x \in \mathrm{R}$$
dengan $f : \mathrm{R} \to [0,\infty]$ adalah fungsi yang terintegralkan. Fungsi f disebut fungsi kepekatan peluang dari peubah acak X.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 11 (Sebaran Geometrik)
Misalkan X adalah peubah acak diskret yang menyatakan banyaknya percobaan sampai keberhasilan pertama terjadi. Jika peluang keberhasilan adalah p dan peluang kegagalan adalah $1 - p$, maka fungsi kerapatan peluang bagi peubah acak X adalah
$$\mathbf{P}(X = x) = (1 - p)^{x-1} p, \quad x = 1,2,3,\ldots.$$
Peubah acak ini disebut peubah acak yang menyebar geometrik dengan parameter p.
[Ghahramani, 2000]

Nilai Harapan dan Ragam

Definisi 12 (Nilai Harapan)

a) Misalkan X adalah peubah acak diskret dengan fungsi kerapatan peluang $p_X(x) = \mathbf{P}(X = x)$. Nilai harapan dari X, dinotasikan dengan $\mathbf{E}[X]$, adalah
$$\mathbf{E}[X] = \sum_x x\mathbf{P}(X = x) = \sum_x x p_X(x),$$
jika jumlah di atas konvergen.

b) Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$. Nilai harapan dari X adalah
$$\mathbf{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx,$$
jika integral di atas konvergen mutlak.

[Hogg dan Craig, 1995]

Beberapa sifat dari nilai harapan, antara lain :

1. Jika k suatu konstanta, maka $\mathbf{E}[k] = k$.
2. Jika k suatu konstanta dan V adalah peubah acak, maka $\mathbf{E}[kV] = k\mathbf{E}[V]$.
3. Jika k_1,k_2 adalah konstanta dan V_1,V_2 peubah acak, maka $\mathbf{E}[k_1V_1 + k_2V_2] = k_1\mathbf{E}[V_1] + k_2\mathbf{E}[V_2]$.

Secara umum, jika $k_1,k_2,\ldots,k_n$ adalah konstanta dan $V_1,V_2,\ldots,V_n$ adalah peubah acak, maka
$$\mathbf{E}[k_1V_1 + k_2V_2 + \ldots + k_nV_n] = k_1\mathbf{E}[V_1] + k_2\mathbf{E}[V_2] + \ldots + k_n\mathbf{E}[V_n].$$

Definisi 13 (Ragam)
Ragam dari peubah acak X adalah nilai harapan dari kuadrat selisih antara X dengan nilai harapannya, dinotasikan dengan σ_X^2. Secara matematis dapat dinyatakan sebagai
$$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right].$$
Cara lain menentukan ragam, yaitu
$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] = \mathbf{E}\left[X^2 - 2\mathbf{E}[X]X + (\mathbf{E}[X])^2\right]$$
Karena $\mathbf{E}$ adalah operator linear maka
$$\begin{aligned}\sigma_X^2 &= \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[X] + (\mathbf{E}[X])^2\\ &= \mathbf{E}[X^2] - 2(\mathbf{E}[X])^2 + (\mathbf{E}[X])^2\\ &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.\end{aligned}$$
Akar kuadrat dari σ_X^2 yaitu σ_X, disebut simpangan baku atau standar deviasi dari X.
[Hogg dan Craig, 1995]

Lema 1.1
Jika X dan Y adalah dua peubah acak, maka nilai harapan dari X dapat ditentukan lewat nilai harapan X dengan syarat Y sebagai berikut :
$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]].$$
Bukti: Lihat Lampiran 1.

Teorema 1.2
Jika X adalah suatu peubah acak yang memiliki sebaran geometrik dengan parameter p, $0 < p < 1$ maka

(a) Nilai harapan dari X adalah $\frac{1}{p}$.

(b) Ragam dari X adalah $\frac{(1-p)}{p^2}$.

Bukti: Lihat Lampiran 2.

Lema 1.3
Misalkan E adalah suatu kejadian dan Y suatu peubah acak. Maka peluang dari E dapat ditentukan lewat peluang E dengan syarat Y sebagai berikut:

(a) Jika Y adalah peubah acak diskret, maka

$$\mathrm{P}(E)=\sum_{y}\mathrm{P}(E\mid Y=y)\mathrm{P}(Y=y).$$

(b) Jika Y peubah acak kontinu, maka

$$\mathrm{P}(E)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{P}(E\mid Y=y)f_Y(y)dy.$$

Bukti : Lihat Lampiran 3.

Fungsi Pembangkit Peluang

Definisi 14 (Fungsi Pembangkit)
Suatu barisan bilangan real $a=\{a_i, i=0,1,2,\ldots\}$ berisi banyak informasi. Satu cara singkat untuk menceritakan semua informasi yang ada pada bilangan-bilangan tersebut secara bersamaan, dinyatakan dalam suatu fungsi pembangkit. Jadi fungsi pembangkit dari barisan a adalah fungsi G_a, yang didefinisikan oleh

$$G_a(s)=\sum_{i=0}^{\infty}a_i s^i \text{ , untuk } s\in\mathrm{R}$$

jika jumlah di atas konvergen.
Barisan a dapat dibentuk dari fungsi G_a, dengan membuat $a_i=\dfrac{G_a^{(i)}(0)}{i!}$, dimana fungsi $G_a^{(i)}$ adalah turunan ke-i dari fungsi G.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Definisi 15 (Fungsi Pembangkit Peluang)
Misalkan X peubah acak diskret yang nilainya berupa bilangan bulat tak negatif {0,1,2…}, dan fungsi kerapatan peluangnya diberikan oleh barisan peluang $\mathrm{P}(X=i)=P_i$. Fungsi pembangkit peluang dari peubah acak X didefinisikan oleh $G(s)=\mathrm{E}(s^X)$, yaitu

$$\mathrm{E}(s^X)=\sum_{i=0}^{\infty}s^i\mathrm{P}(X=i)=\sum_{i=0}^{\infty}s^iP_i.$$

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Beberapa contoh fungsi pembangkit peluang :

1. Peubah konstanta
   Jika $\mathrm{P}(X=c)=1$, maka $\mathrm{G(s)}=\mathrm{E}(\mathrm{s}^{\mathrm{X}})=s^c$.
2. Peubah Bernoulli
   Jika $\mathrm{P}(X=1)=p$ dan $\mathrm{P}(X=0)=1-p$, maka

$$G(s)=\mathrm{E}(s^X)=(1-p)+ps.$$

3. Sebaran Poisson
   Jika X menyebar Poisson dengan parameter λ, maka

$$G(s)=\mathrm{E}(s^X)=\sum_{i=0}^{\infty}s^i\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\exp[\lambda(s-1)]$$

Teorema 1.4
Jika X adalah peubah acak diskret yang mempunyai fungsi pembangkit peluang $G(s)$, maka

(a) $\mathrm{E}[X]=G'(1)$.

(b) $Var(X)=G''(1)+G'(1)-(G'(1))^2$.

Bukti : Lihat Lampiran 4.

Teorema 1.5
Jika X dan Y adalah peubah acak yang saling bebas dengan fungsi pembangkit peluang berturut-turut adalah G_X dan G_Y, maka fungsi pembangkit peluang dari $X+Y$ adalah

$$G_{X+Y}(s)=G_X(s)G_Y(s)$$

Bukti : Lihat Lampiran 5.

Rantai Markov

Definisi 16 (Proses Stokastik)
Proses Stokastik $\{X(t), t\in T\}$ adalah suatu koleksi (gugus, himpunan, kumpulan) dari peubah acak yang memetakan suatu ruang contoh Ω ke ruang state S.

[Ross, 1996]

Definisi 17 (Rantai Markov dengan waktu diskret)
Proses Stokastik $\{X_n, n=0,1,2\ldots\}$ dengan ruang state $\{0,1,2\ldots\}$, disebut rantai Markov dengan waktu diskret jika untuk setiap $n=\{0,1,2\ldots\}$ berlaku :

$$\mathrm{P}(X_{n+1}=j\mid X_n=i, X_{n-1}=i-1,\ldots,X_0=i_0)$$
$$=\mathrm{P}(X_{n+1}=j\mid X_n=i).$$

[Ross, 1996]

Barisan dan Deret Tak Hingga

Definisi 18 (Kekonvergenan Barisan Tak Hingga)

Barisan tak hingga $\{a_n\}$ dinamakan konvergen menuju L dan ditulis sebagai

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \mathrm{L}$$

apabila untuk setiap bilangan positif ε, ada bilangan positif N sehingga jika $n \geq N$ maka $|a_n - \mathrm{L}| < \varepsilon$.

[Browder, 1996]

Definisi 19 (Kekonvergenan Deret Tak Hingga)

Misalkan $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ adalah jumlah parsial. Jika barisan jumlah-jumlah parsial $\{S_n\}$ konvergen menuju S, maka deret tak hingga $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergen dan mempunyai jumlah *S*.

[Lay, 1986]

Lema 1.6

Jika $|r| < 1$ maka deret geometri tak hingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$$

adalah konvergen (memiliki jumlah) dan jumlahnya adalah

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Bukti : Lihat Lampiran 6.

Lema 1.7

Jika $|x| < 1$, maka :

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Bukti : Lihat Lampiran 7

Deret Pangkat

Definisi 20 (Deret Pangkat)

Deret pangkat adalah deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

dengan x adalah suatu peubah dan c_n adalah koefisien dari deret tersebut. Secara umum, deret yang berbentuk

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots,$$

disebut deret pangkat yang berpusat di *a* atau deret pangkat di sekitar *a*. Jari-jari kekonvergenan dari suatu deret pangkat adalah ρ , didefinisikan sebagai

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Teorema 1.8

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ mempunyai jari-jari kekonvergenan ρ > 0, maka fungsi *f* yang didefinisikan oleh

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

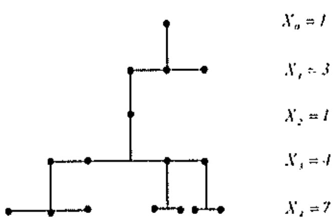
dapat diturunkan pada selang $(a-\rho, a+\rho)$.

Bukti: Lihat Lampiran 8.

HASIL DAN PEMBAHASAN

PENGERTIAN *BRANCHING PROCESSES*

Branching Processes adalah suatu rantai Markov $\{X_n, n = 0,1,2...\}$ yang ruang *state*nya adalah himpunan bilangan bulat tak negatif. Pada proses ini X_n disebut sebagai ukuran populasi pada generasi ke-n. Pada waktu $n = 0$ hanya ada satu individu. Individu ini hidup untuk satu unit waktu, kemudian pada waktu $n = 1$ meninggal dalam proses reproduksi (menghasilkan keturunan) dan digantikan oleh keturunan-keturunannya. Keturunan-keturunan yang dihasilkan ini mempunyai riwayat hidup yang sama, masing-masing hanya hidup sampai waktu $n = 2$, kemudian meninggal dan digantikan oleh keturunan-keturunan yang selanjutnya. Demikian seterusnya proses ini berlangsung untuk waktu $n = 3,4,...$. Berikut ini adalah sebuah bagan yang menggambarkan garis keturunan dalam suatu keluarga.



Gambar 1. Garis Keturunan Suatu Keluarga

[Grimmett dan Stirzaker (1992),Taylor dan Karlin (1984)]

Pada generasi pertama, X_1 individu-individu menghasilkan keturunan $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{X_1}$, dimana Z_i adalah peubah acak yang saling bebas dan memiliki sebaran peluang yang sama. Sehingga jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-2 adalah

$$X_2 = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_{X_1}$$
$$= \sum_{i=1}^{X_1} Z_i$$

dimana Z_i adalah jumlah keturunan dari individu ke-i pada generasi ke-1.

Secara umum pada generasi ke-(n-1), individu-individu menghasilkan keturunan $Z_1, Z_2, Z_3, ..., Z_{X_{n-1}}$. Sehingga jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n adalah

$$X_n = Z_1 + Z_2 + Z_3 + ... + Z_{X_{n-1}}$$
$$= \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i,$$

dimana Z_i adalah jumlah keturunan dari individu ke-i pada generasi ke-(n-1).

Misalkan μ dan σ^2 berturut-turut menyatakan nilai harapan dan ragam dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu. Dengan $P_j = \mathbf{P}(Z_1 = j)$, maka

$$\mu = \mathbf{E}[Z_1] = \sum_{j=0}^{\infty} jP_j,$$

$$\sigma^2 = Var(Z_1) = \sum_{j=0}^{\infty} (j-\mu)^2 P_j.$$

[Grimmet dan Stirzaker (1992), Ross (1970), Ross (2000)]

PENENTUAN NILAI HARAPAN DAN RAGAM DARI X_n

Lema 1

Misalkan $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$ menyatakan jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n serta μ menyatakan nilai harapan dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu. Maka

$$\mathbf{E}[X_n] = \mu \mathbf{E}[X_{n-1}].$$

Bukti :

Nilai harapan dari peubah acak X_n adalah

$$\mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \middle| X_{n-1}\right]\right].$$

Pertama kita tentukan nilai harapan X_n dengan syarat $X_{n-1} = x_{n-1}$, yaitu

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \middle| X_{n-1} = x_{n-1}\right] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i \middle| X_{n-1} = x_{n-1}\right]$$

$$= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i\right] = x_{n-1}\mathbf{E}[Z_1].$$

Dari hasil di atas kita simpulkan

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1}\right] = X_{n-1}\mathbf{E}[Z_1].$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i \,\middle|\, X_{n-1}\right]\right]\\ &= \mathbf{E}[X_{n-1}\mathbf{E}[Z_1]]\\ &= \mathbf{E}[Z_1]\ \mathbf{E}[X_{n-1}]\\ &= \mu\mathbf{E}[X_{n-1}].\end{aligned}$$

Jadi **Lema 1** terbukti. ∎

Teorema 1

Misalkan $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$ menyatakan jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n serta μ adalah nilai harapan dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu. Maka

$$\mathbf{E}[X_n] = \mu^n .$$

Bukti :

Karena ukuran populasi awal $X_0 = 1$, maka

$$\mathbf{E}[X_0] = 1 .$$

Sehingga berdasarkan **Lema 1**, maka

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[X_n] &= \mu\mathbf{E}[X_{n-1}]\\ &= \mu^2\mathbf{E}[X_{n-2}]\\ &\ \ \vdots\\ &= \mu^n\mathbf{E}[X_0]\\ &= \mu^n .\end{aligned}$$

Jadi **Teorema 1** terbukti. ∎

Lema 2

Misalkan $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$ menyatakan jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n serta σ^2 adalah ragam dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu. Maka

$$Var(X_n) = \mu^{n-1}\sigma^2 + \mu^2 Var(X_{n-1}).$$

Bukti :

Ragam dari peubah acak X_n adalah

$$\begin{aligned}Var(X_n) &= Var\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2\right] - \left(\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right]\right)^2 .\end{aligned}$$

Pertama kita tentukan $\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2\right]$, yaitu

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2\right] = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2 \,\middle|\, X_{n-1}\right]\right].$$

Jika $X_{n-1} = x_{n-1}$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2 \,\middle|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right] &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i\right)^2 \,\middle|\, X_{n-1} = x_{n-1}\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{x_{n-1}} Z_i\right)^2\right]\\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{x_{n-1}}\sum_{j=1}^{x_{n-1}} Z_i Z_j\right]\\ &= \sum_{i=1}^{x_{n-1}}\sum_{j=1}^{x_{n-1}} \mathbf{E}[Z_i Z_j]\\ &= \sum_{i=1}^{x_{n-1}} \mathbf{E}[Z_i^2] + \sum_{i=1}^{x_{n-1}}\sum_{j=1}^{x_{n-1}} \mathbf{E}[Z_i]\mathbf{E}[Z_j]\\ &= x_{n-1}\mathbf{E}[Z_1^2] + (x_{n-1}^2 - x_{n-1})(\mathbf{E}[Z_1])^2 .\end{aligned}$$

Dari hasil di atas kita simpulkan

$$\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2 \,\middle|\, X_{n-1}\right] = X_{n-1}\mathbf{E}[Z_1^2] + \left(X_{n-1}^2 - X_{n-1}(\mathbf{E}[Z_1])^2 .\right)$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i\right)^2 \,\middle|\, X_{n-1}\right]\right] &= \mathbf{E}\left[[X_{n-l}]\mathbf{E}[Z_1^2] + (X_{n-1}^2 - X_n)(\mathbf{E}[Z_1])^2\right]\\ &= \mathbf{E}[X_{n-1}]\mathbf{E}[Z_1^2] + \mathbf{E}[X_{n-1}^2](\mathbf{E}[Z_1])^2 - \mathbf{E}[X_n](\mathbf{E}[Z_1])^2\end{aligned}$$

Jadi

$$\begin{aligned}Var(X_n) &= \mathbf{E}[X_{n-1}]\mathbf{E}[Z_1^2] + \mathbf{E}[X_{n-1}^2](\mathbf{E}[Z_1])^2\\ &\quad - \mathbf{E}[X_{n-1}](\mathbf{E}[Z_1])^2 - (\mathbf{E}[X_{n-1}]\mathbf{E}[Z_1])^2\\ &= \mathbf{E}[X_{n-1}]\mathbf{E}[Z_1^2] - (\mathbf{E}[Z_1])^2\\ &\quad + (\mathbf{E}[Z_1])^2\left(\mathbf{E}[X_{n-1}^2] - (\mathbf{E}[X_{n-1}])^2\right)\\ &= \mathbf{E}[X_{n-1}]Var(Z_1) + (\mathbf{E}[Z_1])^2 Var(X_{n-1})\\ &= \mu^{n-1}\sigma^2 + \mu^2 Var(X_{n-1}).\end{aligned}$$

Jadi **Lema 2** terbukti. ∎

Teorema 2

Misalkan $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$ menyatakan jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi ke-n serta dan σ^2 menyatakan ragam dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu. Maka

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Bukti :

Akan dibuktikan

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Karena ukuran populasi awal $X_0 = 1$, maka

$$Var(X_0) = 0.$$

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.

(i). Untuk $n = 1$, maka berdasarkan **Lema 2**

- Jika $\mu = 1$,

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= \sigma^2 1^{n-1} + 1^2 Var(X_0) \\ &= \sigma^2 1 + 1.0 \\ &= \sigma^2. \end{aligned}$$

- Jika $\mu \neq 1$,

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= \sigma^2 \mu^{n-1} + \mu^2 Var(X_0) \\ &= \sigma^2 \mu + \mu^2 .0 \\ &= \sigma^2, \end{aligned}$$

Jadi benar bahwa $Var(X_1) = \sigma^2$.

(ii) Andaikan benar untuk $n = k$, sehingga berdasarkan **Lema 2**

- Jika $\mu = 1$, maka

$$Var(X_k) = \sigma^2 k.$$

- Jika $\mu \neq 1$, maka

$$Var(X_k) = \sigma^2 \mu^{k-1}\left(\frac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right).$$

Jadi

$$Var(X_k) = \begin{cases} \sigma^2 k & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{k-1}\left(\dfrac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

(iii) Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k + 1$, berlaku :

$$Var(X_{k+1}) = \begin{cases} \sigma^2 (k+1) & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{k}\left(\dfrac{\mu^{k+1} - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

- Jika $\mu = 1$, maka berdasarkan **Lema 2**

$$\begin{aligned} Var(X_{k+1}) &= \sigma^2 1^{(k+1)-1} + 1^2 Var(X_{(k+1)-1}) \\ &= \sigma^2 1^k + 1^2 Var(X_k). \end{aligned}$$

Substitusikan $Var(X_k) = \sigma^2 k$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Var(X_{k+1}) &= \sigma^2 1^k + 1^2(\sigma^2 k) \\ &= \sigma^2 1 + 1(\sigma^2 k) \\ &= \sigma^2 (k+1). \end{aligned}$$

- Jika $\mu \neq 1$, maka berdasarkan **Lema 2**

$$\begin{aligned} Var(X_{k+1}) &= \sigma^2 \mu^{(k+1)-1} + \mu^2 Var(X_{(k+1)-1}) \\ &= \sigma^2 \mu^k + \mu^2 Var(X_k). \end{aligned}$$

Substitusikan $Var(X_k) = \sigma^2 \mu^{k-1}\left(\dfrac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right)$,

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} Var(X_{k+1}) &= \sigma^2 \mu^k + \mu^2\left(\sigma^2 \mu^{k-1}\left(\frac{\mu^k - 1}{\mu - 1}\right)\right) \\ &= \sigma^2 \mu^k + \frac{\sigma^2 \mu^{k+1} \mu^k}{\mu - 1} - \frac{\sigma^2 \mu^{k+1}}{\mu - 1} \\ &= \frac{\sigma^2 \mu^{k+1} - \sigma^2 \mu^k + \sigma^2 \mu^{k+1} \mu^k - \sigma^2 \mu^{k+1}}{\mu - 1} \\ &= \frac{\sigma^2 \mu^{k+1} \mu^k - \sigma^2 \mu^k}{\mu - 1} \\ &= \sigma^2 \mu^k \left(\frac{\mu^{k+1} - 1}{\mu - 1}\right). \end{aligned}$$

Jadi

$$Var(X_{k+1}) = \begin{cases} \sigma^2 (k+1) & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{k}\left(\dfrac{\mu^{k+1} - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Dari (i),(ii) dan (iii) terbukti bahwa

$$Var(X_n) = \begin{cases} \sigma^2 n & ;\ \text{jika } \mu = 1 \\ \sigma^2 \mu^{n-1}\left(\dfrac{\mu^n - 1}{\mu - 1}\right) & ;\ \text{jika } \mu \neq 1. \end{cases}$$

Jadi **Teorema 2** terbukti. □

FUNGSI PEMBANGKIT PELUANG

Pada akhir masa hidupnya, setiap individu akan menghasilkan j keturunan dengan sebaran peluang $\mathbf{P}(Z=j)=P_j$, untuk $j=0,1,2,\ldots$

dimana $P_j \geq 0$ dan $\sum_{j=0}^{\infty} P_j = 1$. **(1)**

Setiap keturunan yang dihasilkan oleh individu-individu tersebut, saling bebas satu sama lain. Dan pada akhir masa hidupnya setiap keturunan tadi akan menghasilkan sejumlah keturunan baru berdasarkan sebaran peluang (1).

Peubah acak $X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} Z_i$, maka untuk menghitung penjumlahan acak dari peubah acak-peubah acak tersebut lebih mudah menggunakan fungsi pembangkit peluang dibandingkan dengan fungsi sebaran. Oleh karena itu didefinisikan fungsi $G(s)$, yaitu fungsi pembangkit peluang dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu sebagai berikut :

$$G_Z(s) = \mathbf{E}\left(s^Z\right)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} s^j P_j .$$

Sehingga fungsi pembangkit peluang dari peubah acak X_n adalah

$$G_n(s) = \mathbf{E}\left(s^{X_n}\right).$$

[Taylor dan Karlin (1984), Ross (1970)]

Berdasarkan **Lema 1.1**, maka fungsi pembangkit peluang dari peubah acak X_n dapat dihitung sebagai berikut :

$$G_n(s) = \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[s^{X_n} \mid X_{n-1}\right]\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[\mathbf{E}\left[s^{Z_1+Z_2+Z_3+\ldots+Z_{X_{n-1}}} \mid X_{n-1}\right]\right]$$

Karena $Z_1, Z_2, Z_3, \ldots, Z_{X_{n-1}}$ adalah peubah acak i.i.d, maka

$$G_n(s) = \mathbf{E}\left[\left(\mathbf{E}\left[s^{Z_1}\right]\right)^{X_{n-1}}\right]$$
$$= \mathbf{E}\left[(G(s))^{X_{n-1}}\right]$$
$$= G_{n-1}(G(s)).$$

Teorema berikut menggambarkan G_n dalam bentuk G.

Teorema 3

Jika $G, G_0, G_1, G_2, \ldots$ adalah fungsi pembangkit peluang, dimana $G_0(s) = s$ dan $G_n(s) = G_{n-1}(G(s))$, untuk setiap $n = 1,2,\ldots$ maka G_n merupakan iterasi ke-n dari G, yaitu $G_n(s) = G(G(\ldots G(s)\ldots))$ untuk $n = 0,1,2,\ldots$.

Bukti :

Ukuran populasi awal $X_0 = 1$, jadi $G_0(s) = E\left(s^1\right) = s$.

$$X_n = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \ldots + Z_{X_{n-1}}$$
$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s))$$
$$= G_{n-2}(G(G(s)))$$
$$= G_{n-3}(G(G(G(s))))$$
$$\vdots$$
$$= G_{n-n}\underbrace{(G(G(\ldots G(s)\ldots)))}_{n\ iterasi}$$
$$= G_0(G(G\ldots G(s)\ldots)).$$

Karena $G_0(s) = s$, maka

$$G_n(s) = G(G(\ldots G(s)\ldots)).$$

Sehingga G_n merupakan iterasi ke-n dari G.

Jadi **Teorema 3** terbukti. □

Lema 3

Misalkan $G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j$ terdefinisi pada [0,1], maka fungsi G pada [0,1] adalah fungsi kontinu.

Bukti :

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j$$

adalah suatu deret tak hingga. Untuk membuktikan G adalah fungsi kontinu, kita harus mencari jari-jari kekonvergenan deret tersebut. Jari-jari kekonvergenan dari deret

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j \text{ adalah } \rho = \lim_{j\to\infty} \frac{|P_j|}{|P_{j+1}|}.$$

Selanjutnya untuk nilai j yang sangat besar diasumsikan bahwa peluang individu untuk memiliki j keturunan, adalah tidak lebih kecil dibandingkan dengan peluang individu tersebut untuk memiliki $j+1$ keturunan. Misalkan P_j : peluang individu memiliki j keturunan dan P_{j+1} :

peluang individu memiliki $j+1$ keturunan, dengan $j \ge j+1$, maka $P_j \ge P_{j+1}$.

Sehingga diperoleh $\dfrac{P_j}{P_{j+1}} \ge 1$.

Oleh karena itu

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{j\to\infty} \frac{P_j}{P_{j+1}} \\ &\ge \lim_{j\to\infty} 1 \\ &= 1.\end{aligned}$$

Jadi jari-jari kekonvergenan dari deret

$$G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j \ \text{ adalah } \rho \ge 1.$$

Berdasarkan **Teorema 1.8**, maka (untuk $\rho = 1$) *G(x)* dapat diturunkan pada interval (-1,1). Oleh karena itu *G(x)* kontinu pada [0,1].
Jadi Lema 3 terbukti. ∎

Lema 4

Misalkan $G(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j$ terdefinisi pada [0,1], maka fungsi *G* pada [0,1] adalah fungsi tak turun.
Bukti :

$$\begin{aligned}G(x) &= \sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j \\ &= P_0 + xP_1 + x^2 P_2 + \ldots\end{aligned}$$

Turunan pertama dari *G(x)* adalah

$$\begin{aligned}G'(x) &= D_X\left[\sum_{j=0}^{\infty} x^j P_j\right] \\ &= D_X\left[P_0 + xP_1 + x^2 P_2 + \ldots\right] \\ &= P_1 + 2xP_2 + 3x^2 P_3 + \ldots \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} j x^{j-1} P_j \\ &\ge 0 .\end{aligned}$$

Karena $G'(x) \ge 0$ maka *G(x)* fungsi tak turun pada [0,1].
Jadi **Lema 4** terbukti. ∎

PENENTUAN PELUANG BERTAHAN SUATU NAMA KELUARGA

Sebelum kita menghitung peluang bertahan suatu nama keluarga terlebih dahulu didefinisikan peluang kepunahan, karena ***peluang bertahan* = 1 - *peluang kepunahan*.** Kepunahan suatu populasi terjadi jika dan hanya jika ukuran populasi menurun menuju 0. Waktu acak kepunahan *N* adalah *n* waktu pertama dimana berlaku $X_n = 0$, sehingga

$$X_k = 0 \text{ untuk } k \ge N.$$

Maka didefinisikan π_n adalah peluang kepunahan pada atau sebelum generasi ke-n, sebagai berikut :

$$\pi_n = \mathbf{P}\{N = n\} = \mathbf{P}\{X_n = 0\}.$$

Misalkan π menyatakan peluang populasi benar-benar punah. Dengan asumsi $X_0 = 1$, maka

$$\begin{aligned}\pi &= \lim_{n\to\infty} \pi_n \qquad (2)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\{X_n = 0 \mid X_0 = 1\}.\end{aligned}$$

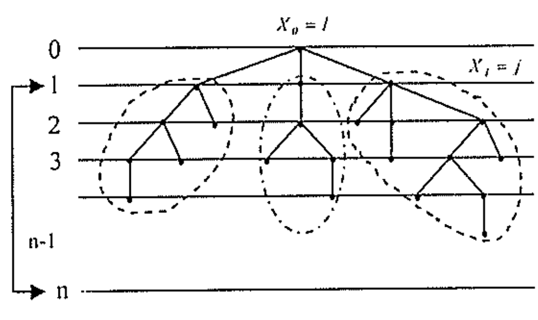
Karena ukuran populasi awal $X_0 = 1$ memberikan j keturunan, maka $X_1 = j$. Sehingga peluang populasi punah jika diberikan $X_1 = j$ adalah

$$\pi_n = \mathbf{P}\{\text{Populasi punah} \mid X_1 = j\}.$$

Berdasarkan **Lema 1.3**, maka

$$\pi_n = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\text{Populasi punah} \mid X_1 = j\} P_j . \qquad (3)$$

Masing-masing dari j keturunan ini menghasilkan keturunan-keturunan baru, sehingga terbentuk j subpopulasi (keluarga). Dimana j keluarga atau subpopulasi ini dihasilkan dari individu-individu yang saling bebas dan mempunyai sifat statistik yang sama dengan keturunan yang dihasilkannya. Berikut ini adalah sebuah bagan yang menggambarkan *j* subpopulasi (keluarga) tersebut.



Gambar 2. *j* keluarga atau *j* subpopulasi
[Grimmet dan Welsh (1986)]

Populasi akan punah jika dan hanya jika masing-masing dari j keluarga (subpopulasi), dimulai dengan anggota dari generasi pertama punah. Karena masing-masing keluarga diasumsikan saling bebas dan peluang salah satu (sembarang) keluarga punah dalam n-1 generasi adalah π_{n-1}, maka peluang semua j keluarga (subpopulasi) punah dalam n-1 generasi adalah

$$P\{Populasi\ punah \mid X_1 = j\} = [\pi_{n-1}]^j .$$

Sehingga persamaan (3) menjadi

$$\pi_n = \sum_{j=0}^{\infty} [\pi_{n-1}]^j P_j \quad \text{untuk setiap } n = 1,2,3,\ldots,$$

dimana $\pi_0 = 0$. Atau peluang kepunahan dapat dituliskan dalam bentuk fungsi pembangkit peluang sebagai berikut

$$\pi_n = G(\pi_{n-1}). \qquad (4)$$

Lema 5

Misalkan π_n menyatakan populasi punah pada atau sebelum generasi ke-n dan misalkan pula η adalah akar tak negatif dari persamaan $x = G(x)$. Maka $\pi_n \leq \eta$, untuk n = 1,2,... .

Bukti :

Berdasarkan **Lema 4**, maka $G(x)$ adalah fungsi tak turun pada $[0,1]$.

Pembuktian dilakukan dengan menggunakan induksi matematika.

(i). Untuk $n = 1$, maka berdasarkan persamaan (4)

$$\pi_1 = G(\pi_0) = G(0) \leq G(\eta) = \eta .$$

jadi benar bahwa $\pi_1 \leq \eta$.

(ii). Andaikan benar untuk $n = k$, sehingga

$$\pi_k \leq \eta .$$

(iii). Akan ditunjukkan bahwa untuk $n = k+1$, berlaku

$$\pi_{k+1} \leq \eta .$$

Bukti :

Berdasarkan persamaan (4), maka

$$\pi_{k+1} = G(\pi_{(k+1)-1}) = G(\pi_k).$$

Berdasarkan (ii) dan **Lema 4**, maka diperoleh

$$\pi_{k+1} \leq G(\eta) = \eta .$$

Dari (i), (ii) dan (iii) terbukti bahwa $\pi_n \leq \eta$, untuk $n = 1,2,\ldots$.

Jadi **Lema 5** terbukti. ∎

Teorema 4

Misalkan fungsi G terdefinisi pada $[0,1]$. Jika π menyatakan peluang populasi benar-benar punah, maka :

(a) π adalah akar terkecil tak negatif dari persamaan $x = G(x)$.

(b) Jika $\mu < 1$, dimana μ adalah nilai harapan dari jumlah keturunan yang dihasilkan oleh satu individu, maka $\pi = 1$.

Bukti :

(a) Akan dibuktikan π adalah akar terkecil tak negatif dari persamaan $x = G(x)$.

$$G_n(s) = G_{n-1}(G(s)) = G(G(\ldots G(s)\ldots)) .$$

Berdasarkan **Teorema 3**, maka

$$G_n(s) = G(G_{n-1}(s)). \qquad (5)$$

Berdasarkan persamaan (4), maka

$\pi_n = G(\pi_{n-1})$, dengan $\pi_0 = 0$ maka

$$\pi_1 = G(\pi_0) = G(0),$$
$$\pi_2 = G(\pi_1) = G(G(0)).$$
$$\vdots$$

Secara umum diperoleh

$$\pi_n = G(\pi_{n-1}) = G(G(\ldots G(0)\ldots)) = G_n(0).$$

Jadi

$$\pi_n = G_n(0). \qquad (6)$$

Karena $\pi_n = G(\pi_{n-1})$ sehingga dari persamaan (2), jika $\eta \to \infty$ maka $\pi_n \to \pi$. Dan berdasarkan **Lema 3** $G(x)$ adalah fungsi kontinu pada $[0,1]$, sehingga $\pi = G(\pi)$.

Misalkan η akar tak negatif dari $x = G(x)$, maka berdasarkan **Lema 5**

$$\pi_n \leq \eta, \text{ untuk } n = 1,2,\ldots .$$

Sehingga

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \pi_n \leq \lim_{n\to\infty} \eta = \eta.$$

Jadi terbukti bahwa π adalah akar terkecil dari persamaan $x = G(x)$.

(b) Akan dibuktikan jika $\mu < 1$, maka $\pi = 1$.

$$\mu^n = E[X_n] = \sum_{j=1}^{\infty} j P\{X_n = j\} \geq \sum_{j=1}^{\infty} 1 P\{X_n = j\} = P\{X_n \geq 1\}.$$

Ketika $\mu < 1$, $\mu^n \to 0$ untuk $n \to \infty$. Sehingga

$P\{X_n \geq 1\} \to 0$, oleh karena itu

$\mathrm{P}\{X_n = 0\} \to 1$, jika $n \to \infty$.

Karena $\mathrm{P}\{X_n = 0\} = \pi_n$ maka untuk $n \to \infty$, $\pi \to 1$.

Jadi terbukti bahwa

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}\{X_n = 0\} = 1.$$

Sehingga populasi benar-benar akan punah jika $\mu < 1$.

Jadi **Teorema 4** terbukti. ∎

CONTOH PERHITUNGAN

Contoh 1 : Menentukan peluang kepunahan berdasarkan fungsi kerapatan peluang.

1. Misalkan individu dalam suatu keluarga menghasilkan keturunan dengan sebaran peluang $\mathrm{P}(Z = j) = P_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Tentukan peluang kepunahan dari keluarga tersebut.

Jawab :

Diketahui $P_j = \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$, $j = 0,1,2,\ldots$.

Maka fungsi pembangkit peluangnya adalah

$$G(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j \left(\frac{1}{2}\right)^{j+1}$$

$$= \frac{1}{2} + s\left(\frac{1}{2}\right)^2 + s^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + s\frac{1}{4} + s^2\frac{1}{8} + \ldots$$

Jadi $G(s)$ adalah suatu deret geometri, dengan suku awal $= \frac{1}{2}$ dan rasio $= \frac{s}{2}$. Deret tersebut adalah konvergen (memiliki jumlah) jika $\left|\frac{s}{2}\right| < 1$ atau $|s| < 2$ (lihat **Lema 1.6**). Sehingga, berdasarkan **Lema 1.6** jumlah dari deret geometri tersebut adalah

$$G(s) = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{s}{2}}, \text{ untuk } |s| < 2$$

$$= \frac{1}{2 - s}.$$

Maka $G_1(s) = G(s) = \frac{1}{2 - s}$.

Berdasarkan persamaan (5), maka

$$G_2(s) = G(G(s))$$

$$= \frac{1}{2 - \left(\frac{1}{2 - s}\right)}$$

$$= \frac{2 - s}{3 - 2s}, \text{ jika } |s| \le 1.$$

$$G_3(s) = G(G_2(s))$$

$$= \frac{1}{2 - \left[\frac{2 - s}{3 - 2s}\right]}$$

$$= \frac{3 - 2s}{4 - 3s}, \text{ jika } |s| \le 1$$

$$\vdots$$

Sehingga diperoleh

$$G_n(s) = G(G_{n-1}(s))$$

$$= \frac{n - (n-1)s}{n + 1 - ns}, \text{ jika } |s| \le 1.$$

Untuk $s = 0$, maka

$$G_n(0) = \frac{n}{n+1}.$$

Sehingga berdasarkan persamaan (6),

$$\pi_n = G_n(0)$$

$$= \frac{n}{n+1}.$$

Jadi

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \pi_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= 1.$$

Artinya keluarga ini cepat atau lambat akan benar-benar punah dengan peluang 1.

Contoh 2 : Menentukan peluang bertahan berdasarkan **Teorema 4,**

2. Diketahui didalam suatu keluarga bahwa setiap individu tidak mungkin memiliki lebih dari 2 keturunan.
   (a). Misalkan peluang Joni Siregar memiliki keurunan laki-laki adalah $\frac{1}{2}$, serta peluang memiliki 1 dan 2 keturunan laki-

laki adalah $\frac{1}{3}$ dan $\frac{1}{6}$. Tentukan peluang bertahan nama keluarga Siregar.

(b). Misalkan peluang Viktor Hutabarat tidak memiliki keturunan laki-laki adalah $\frac{1}{5}$, serta peluang memiliki 1 dan 2 keturunan laki-laki adalah $\frac{1}{5}$ dan $\frac{3}{5}$. Tentukan peluang bertahan nama keluarga Hutabarat.

Jawab :

(a) Diketahui

$$P_0 = \frac{1}{2}, P_1 = \frac{1}{3} \text{ dan } P_2 = \frac{1}{6}.$$

Maka fungsi pembangkit peluangnya adalah

$$G(s) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s^2.$$

Karena $s = G(s)$, maka

$$s = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}s + \frac{1}{6}s^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}s^2 - \frac{2}{3}s + \frac{1}{2} = 0,$$

$$\Leftrightarrow s^2 - 4s + 3 = 0.$$

Maka solusinya adalah

$$s = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}.$$

$$s_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{2} = 3$$

$$s_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{2} = 1.$$

Berdasarkan **Teorema 4 (a)**, π adalah akar terkecil tak negatif dari persamaan $s = G(s)$, yaitu $\pi = 1$.

Jadi peluang bertahan keluarga Siregar adalah 0, artinya kepunahan pasti terjadi.

Cara lain menentukan π, yaitu menentukan μ. Jika $\mu < 1$ maka $\pi = 1$ (sesuai dengan **Teorema 4 (b)**).

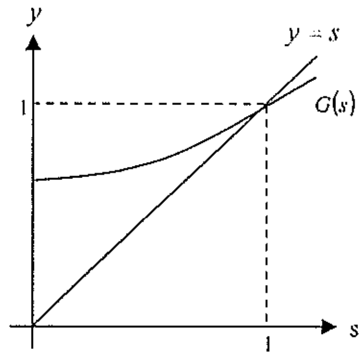
$$G'(s) = \frac{1}{3} + \frac{2}{6}s,$$

$$G'(1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{6}(1) = \frac{2}{3}.$$

$$\mu = G'(1)$$

$$\mu = \frac{2}{3} < 1, \text{ maka } \pi = 1.$$

Berikut ini grafik yang menggambarkan kepunahan keluarga pasti terjadi.



Gambar 3. Kepunahan keluarga pasti terjadi.

(b). Diketahui

$$P_0 = \frac{1}{5}, P_1 = \frac{1}{5} \, dan P_2 = \frac{3}{5}.$$

Maka fungsi pembangkit peluangnya adalah

$$G(s) = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}s + \frac{3}{5}s^2.$$

Karena $s = G(s)$, maka

$$s = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}s + \frac{3}{5}s^2.$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{5}s^2 - \frac{4}{5}s + \frac{1}{5} = 0,$$

$$\Leftrightarrow 3s^2 - 4s + 1 = 0.$$

Maka solusinya adalah

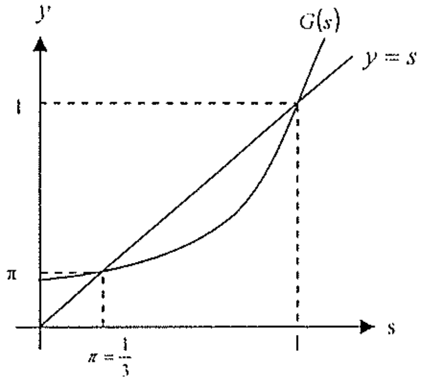
$$s = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6}.$$

$$s_1 = \frac{4+\sqrt{4}}{6} = 1$$

$$s_2 = \frac{4-\sqrt{4}}{6} = \frac{1}{3}.$$

Berdasarkan **Teorema 4 (a)**, π adalah akar terkecil tak negatif dari persamaan $s = G(s)$, yaitu $\pi = \frac{1}{3}$.

Jadi peluang bertahan nama keluarga Hutabarat adalah $\frac{2}{3}$, artinya kepunahan tidak pasti terjadi dan keluarga tumbuh tidak terbatas dengan peluang positif. Berikut ini grafik yang menggambarkan kepunahan keluarga tidak pasti terjadi.



Gambar 4. Kepunahan keluarga tidak pasti terjadi.

KESIMPULAN

Branching processes memberikan solusi untuk menyelesaikan model pertumbuhan populasi, dimana pertumbuhan populasi ini merupakan suatu proses acak yang terkait dengan aturan-aturan peluang. Sebagai contoh adalah penggunaan *branching processes* dalam menentukan peluang bertahan suatu nama keluarga.

Peluang bertahan suatu nama kelurga dalam generasi tertentu sangat dipengaruhi oleh jumlah individu pada generasi tersebut. Dan individu-individu ini merupakan peubah acak *i.i.d.* Sebelum menentukan peluang bertahan suatu nama keluarga, terlebih dahulu menentukan peluang kepunahannya. Dalam menentukan peluang kepunahan suatu nama keluarga, diperlukan suatu fungsi yang dinamakan fungsi pembangkit peluang. Jadi peluang bertahan suatu nama keluarga pada generasi tertentu dapat ditentukan jika kita mengetahui jumlah keturunan yang dihasilkan pada generasi tertentu dan sebaran peluang setiap individu untuk menghasilkan sejumlah keturunan pada akhir masa hidupnya.

Pada karya ilmiah ini telah dikaji sifat-sifat stokastik dari jumlah individu pada sembarang generasi ke-n, serta penentuan peluang bertahan suatu nama keluarga berdasarkan peluang kepunahannya.

DAFTAR PUSTAKA

Browder, A. 1996. *Mathematical Analysis.* Springer-Verlag. New York.

Ghahramani, S. 2000. *Fundamentals of Probability.* Ed. Ke-2. Prentice Hall. New Jersey.

Grimmett, G.R. dan **D. Welsh.** 1986. *Probability An Introduction.* Oxford University. New York.

Grimmett, G.R. dan **D.R. Stirzaker.** 1992. *Probability and Random Processes.* Ed. Ke-2. Clarendon Press. Oxford.

Hogg, R.V. dan **A.T. Craig.** 1995. *Introduction to Mathematical Statistic.* Ed. Ke-5. Prentice Hall. New Jersey.

Lay, S.R. 1986. *Analysis: an Introduction to Proof.* Prentice Hall. New Jersey.

Ross, S.M. 1970. *Applied Probability Models With Optimazation Applications.* Dover Publications, Inc. New York.

Ross, S.M. 1996. *Stochastic Processes.* Ed. Ke-2. John Wiley & Sons. New York.

Ross, S.M. 2000. *Introduction to Probability Model.* Ed. Ke-7. Academic Press. San Diego.

Taylor, H.M. dan **S. Karlin.** 1984. *An Introduction to Stochastic Modelling.* Academic Press Inc. Orlando, Florida.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Pembuktian Lema 1.1 :

Lema 1.1
Jika X dan Y adalah dua peubah acak, maka nilai harapan dari X dapat ditentukan lewat nilai harapan X dengan syarat Y sebagai berikut :

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]].$$

Bukti :
Pembuktian dilakukan dari arah kanan.

➢ Jika X dan Y peubah acak diskret, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] &= \sum_{y} \mathbf{E}[X \mid Y = y]\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_{y}\sum_{x} x\mathbf{P}(X = x \mid Y = y)\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_{y}\sum_{x} x\frac{\mathbf{P}(X = x, Y = y)}{\mathbf{P}(Y = y)}\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_{x}\sum_{y} x\mathbf{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x} x\sum_{y} \mathbf{P}(X = x, Y = y) \\
&= \sum_{x} x\mathbf{P}(X = x) \\
&= \mathbf{E}[X]
\end{aligned}$$

➢ Jika X dan Y peubah acak kontinu, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}[X \mid Y = y] f_Y(y)dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y) f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{f_{XY}(x, y)}{f_Y(y)} f_Y(y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{XY}(x, y)dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y)dydx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \\
&= \mathbf{E}[X]
\end{aligned}$$

➢ Jika X kontinu dan Y diskret, maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] &= \sum_y \mathbf{E}[X \mid Y = y]\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x, y)\,dx\,\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \sum_y \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{XY}(x, y)}{\mathbf{P}(Y = y)}\,dx\,\mathbf{P}(Y = y) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_y f_{XY}(x, y)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx \\
&= \mathbf{E}[X]
\end{aligned}$$

Untuk kasus X diskret dan Y kontinu dapat dibuktikan dengan cara serupa dengan kasus X kontinu dan Y diskret.

Jadi **Lema 1.1** terbukti. □

Lampiran 2. **Pembuktian Teorema 1.2 :**

Teorema 1.2

Jika X adalah suatu peubah acak yang memiliki sebaran geometrik dengan parameter p, $0 < p < 1$ maka

(a). Nilai harapan dari X adalah $\frac{1}{p}$.

(b). Ragam dari X adalah $\frac{(1-p)}{p^2}$.

Bukti :

Diketahui X menyebar geometrik.

(a) Akan dibuktikan nilai harapan dari X adalah $\frac{1}{p}$.

Nilai harapan dari X adalah

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{x=1}^{\infty} xp(1-p)^{x-1}$$

$$= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})} \sum_{x=1}^{\infty} x(1-p)^{x-1}.$$

Berdasarkan **Lemma 1.7 (a)**, maka

$$\mathrm{E}[X] = \frac{p}{(1-p)}\left[\frac{(1-p)}{(1-(1-p))^2}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})}\left[\frac{(1-p)}{p^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mathrm{p}}.$$

Terbukti bahwa nilai harapan dari X adalah $\frac{1}{p}$.

(b) Akan dibuktikan ragam dari X adalah $\frac{(1-p)}{p^2}$.

Ragam dari X adalah

$$Var(X) = \mathrm{E}[X^2] - (\mathrm{E}[X])^2.$$

Pertama kita tentukan nilai harapan dari X^2, yaitu

$$\mathrm{E}[X^2] = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^{x-1}$$

$$= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})} \sum_{x=1}^{\infty} x^2(1-p)^{x-1}.$$

Berdasarkan **Lema 1.7 (b)**, maka

$$\mathrm{E}[X^2] = \frac{p}{(1-p)}\left[\frac{(1-p)(1+(1-p))}{(1-(1-p))^3}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{p}}{(1-\mathrm{p})}\left[\frac{(1-p)(2-p)}{p^3}\right]$$

$$= \frac{(2-\mathrm{p})}{\mathrm{p}^2}.$$

Sehingga diperoleh

$$Var(X) = \frac{(2-p)}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2$$

$$= \frac{(2-p)}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$

$$= \frac{(1-p)}{p^2}.$$

Terbukti bahwa ragam dari X adalah $\frac{(1-p)}{p^2}$.

Jadi **Teorema 1.2** terbukti. □

Lampiran 3. Pembuktian Lema 1.3 :

Lema 1.3
Misalkan E adalah suatu kejadian dan Y suatu peubah acak. Maka peluang dari E dapat ditentukan lewat peluang E dengan syarat Y sebagai berikut:

(a) Jika Y adalah peubah acak diskret, maka

$$\mathbf{P}(E) = \sum_y \mathbf{P}(E \mid Y = y)\mathbf{P}(Y = y).$$

(b) Jika Y peubah acak kontinu, maka

$$\mathbf{P}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(E \mid Y = y) f_Y(y)dy.$$

Bukti :
Diketahui E suatu kejadian dan Y suatu peubah acak.

Misalkan $X = \begin{cases} 1; \text{ bila kejadian E terjadi} \\ 0; \text{ bila kejadian E tidak terjadi}, \end{cases}$

$$\mathbf{P}(\mathrm{E}) = \mathbf{E}[\mathrm{X}],$$
$$\mathbf{P}(\mathrm{E} \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}) = \mathbf{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y} = \mathrm{y}],$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[\mathrm{X} \mid \mathrm{Y}]] = \mathbf{E}[\mathrm{X}] \qquad \text{berdasarkan } \textbf{Lema 1.1}$$

(a) Akan dibuktikan

$$\mathbf{P}(E) = \sum_y \mathbf{P}(E \mid Y = y)\mathbf{P}(Y = y).$$

Pembuktian dilakukan dari arah kanan.

$$\begin{aligned}\sum_y \mathbf{P}(E \mid Y = y)\mathbf{P}(Y = y) &= \sum_y \mathbf{E}[X \mid Y = y]\mathbf{P}(Y = y) \\ &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] \\ &= \mathbf{E}[X] \\ &= \mathbf{P}(E),\end{aligned}$$

dimana :

$$\mathbf{P}(E \mid Y = y) = \mathbf{E}[X \mid Y = y],$$
$$\mathbf{P}(E) = \mathbf{E}[X],$$
$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X \mid Y]] = \mathbf{E}[X], \qquad \text{berdasarkan } \textbf{Lema 1.1}$$

(b) Akan dibuktikan

$$\mathbf{P}(E) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{P}(E \mid Y = y) f_Y(y)dy.$$

Pembuktian dilakukan dari arah kanan.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{P}(E \mid Y = y) fY(y)dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{E}[X \mid Y = y] fY(y)dy \\ &= \mathrm{E}[\mathrm{E}[X \mid Y]] \\ &= \mathrm{E}[X] \\ &= \mathrm{P}(E).\end{aligned}$$

Lampiran 4. Pembuktian Teorema 1.4 :

Teorema 1. 4
Jika X adalah peubah acak diskret yang mempunyai fungsi pembangkit peluang $G(s)$, maka

(a) $\mathbf{E}[X] = G'(1)$.

(b) $Var(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$.

Bukti :
Fungsi pembangkit peluang $G(s)$ adalah

$$G(s) = P_0 + P_1 s + P_2 s^2 + P_3 s^3 + \dots ,$$
$$G(0) = P_0 .$$

Pembuktian dilakukan dari arah kanan

(a) Akan dibuktikan $\mathbf{E}[X] = G'(1)$

Turunan pertama dari fungsi $G(s)$ adalah

$$G'(s) = P_1 + 2P_2 s + 3P_3 s^2 + \dots$$
$$G'(1) = P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} iP_i$$
$$= \mathbf{E}[X]$$

(b) Akan dibuktikan $Var(X) = G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2$

Turunan kedua dari fungsi $G(s)$ adalah

$$G''(s) = 2P_2 + 3(2)P_3 s + 4(3)P_4 s^2 + \dots$$
$$G''(1) = 2P_2 + 3(2)P_3 s + 4(3)P_4 + \dots$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)P_i$$
$$= \mathbf{E}[X[X-1]]$$
$$= \mathbf{E}[X^2] - \mathbf{E}[X]$$
$$\mathbf{E}[X^2] = G''(1) + \mathbf{E}[X]$$
$$= G''(1) + G'(1).$$

Jadi

$$Var(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2$$
$$= G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2.$$

Jadi **Teorema 1.4** terbukti. □

Lampiran 5. Pembuktian Teorema 1.5 :

Teorema 1.5

Jika X dan Y adalah peubah acak yang saling bebas dengan fungsi pembangkit peluang berturut-turut adalah G_X dan G_Y, maka fungsi pembangkit peluang dari $X+Y$ adalah

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Bukti :

Misalkan $g(x) = s^X$ dan $h(y) = s^Y$.

Fungsi pembangkit peluang dari X+Y adalah

$$\begin{aligned} G_{X+Y} &= \mathbf{E}\left(s^{X+Y}\right) \\ &= \mathbf{E}\left(s^X s^Y\right) \\ &= \mathbf{E}(g(x)h(y)). \end{aligned}$$

Karena diasumsikan X dan Y saling bebas, maka

$$\begin{aligned} G_{X+Y} &= \mathbf{E}[g(x)]\mathbf{E}[h(y)] \\ &= \mathbf{E}\left(s^X\right)\mathbf{E}\left(s^Y\right) \\ &= G_X(s)G_Y(s). \end{aligned}$$

Sehingga terbukti bahwa

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s).$$

Jadi **Teorema 1.5** terbukti. ☐

Lampiran 6. Pembuktian Lema 1. 6 :

Lema 1.6

Jika $|r| < 1$ maka deret geometri tak hingga

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \ldots$$

adalah konvergen (memiliki jumlah) dan jumlahnya adalah

$$S = \frac{a}{1-r}.$$

Bukti :

Misalkan S_n adalah jumlah-jumlah parsial yang disefinisikan sebagai berikut :

$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1}$.

Jika $r \neq 1$, maka

$$S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots + ar^{n-1},$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \ldots + ar^n.$$

Sehingga

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r}$$

$$S_n = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}.$$

Jika $|r| < 1$, maka

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-r}\right) - \lim_{n\to\infty}\left(\frac{ar^n}{1-r}\right) \\
&= \frac{a}{1-r} - 0 \\
&= \frac{a}{1-r} \\
&= S.
\end{aligned}$$

Berdasarkan **Definisi 18**, maka barisan $\{S_n\}$ konvergen menuju S. Karena $\{S_n\}$ konvergen menuju S, maka berdasarkan **Definisi 19** deret tak hingga $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ konvergen dan mempunyai jumlah S.

Jadi **Lema 1.6** terbukti. □

Lampiran 7. Pembuktian Lema 1.7 :

Lema 1.7

Jika $|x| < 1$, maka :

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = \dfrac{x(1+x)}{(1-x)^3}$.

Bukti :

(a) Berdasarkan **Lema 1. 6**, untuk $a = 1$ dan $r = x$ diperoleh

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \; .$$

Turunan pertama dari deret $\dfrac{1}{1-x}$ adalah

$$D_x\left[\frac{1}{1-x}\right] = D_x\left[1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$$

Sehingga diperoleh

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots$$

$$= \mathrm{x}\left[1 + 2\mathrm{x} + 3\mathrm{x}^2 + 4x^3 + \ldots\right]$$

$$= x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{x}}{(1-\mathrm{x})^2}.$$

(b) Turunan pertama dari deret $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ adalah

$$D_x\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right] = D_x\left[1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \ldots\right]$$

$$\frac{2}{(1-x)^3} = 2 + 6x + 12x^2 + 20x^3 + \ldots.$$

Kedua ruas dibagi 2, sehingga

$$\frac{1}{(1-x)^3} = 1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + \ldots.$$

Maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n &= x + 4x^2 + 9x^3 + 16x^4 + \ldots \\
&= \mathrm{x}\left[1 + 4\mathrm{x} + 9\mathrm{x}^2 + 16x^3 + \ldots\right] \\
&= x\left[\left(1 + 3x + 6x^2 + \ldots\right) + \left(x + 3x^2 + 6x^3 + \ldots\right)\right] \\
&= x\left[\left(1 + 3x + 6x^2 + \ldots\right) + x\left(1 + 3x + 6x^2 + \ldots\right)\right] \\
&= \mathrm{x}\left[\left(\frac{1}{(1-\mathrm{x})^3}\right) + x\left(\frac{1}{(1-x)^3}\right)\right] \\
&= \frac{\mathrm{x}(1+\mathrm{x})}{(1-x)^3}.
\end{aligned}
$$

Jadi **Lemma 1.7** terbukti. □

Lampiran 8. Pembuktian Teorema 1.8 :

Teorema 1.8

Jika deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ mempunyai jari-jari kekonvergenan ρ > 0, maka fungsi *f* yang didefiniskan oleh

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

dapat diturunkan pada selang $(a-\rho, a+\rho)$.

Bukti :

Akan dibuktikan $f'(x)$ ada pada selang kekonvergenan $(a-\rho, a+\rho)$.

$$f'(x) = D_x\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n\right]$$
$$= D_x\left[c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots\right]$$
$$= D_x[c_0] + D_x[c_1(x-a)] + D_x\left[c_2(x-a)^2 + \ldots\right]$$
$$= 0 + c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} nc^n (x-a)^{n-1}.$$

Untuk membuktikan $f'(x)$ ada pada selang $(a-\rho, a+\rho)$, maka terlebih dahulu harus dicari jari-jari kekonvergenan dari $f'(x)$.

Misalkan jari-jari kekonvergenan dari $f'(x)$ adalah δ , yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{|nc_n|}{|(n+1)c_{n+1}|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{n}{n} c_n\right|}{\left|\frac{n}{n} c_{n+1} + \frac{1}{n} c_{n+1}\right|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}}.$$

Deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ mempunyai jari-jari kekonvergenan ρ, dimana $\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$.

Karena jari-jari kekonvergenan dari $f'(x)$ adalah $\delta = \rho$ maka $f'(x)$ terdefinisi pada selang $(a-\rho, a+\rho)$. Sehingga $f'(x)$ ada pada selang $(a-\rho, a+\rho)$.

Jadi **Teorema 1.8** terbukti. □