ATURAN KEPUTUSAN BAYES PADA PENDUGAAN TITIK DAN ANALISIS KELAYAKANNYA

MEIZA PRATIWI

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004

RINGKASAN

MEIZA PRATIWI. Aturan Keputusan Bayes pada Pendugaan Titik dan Analisis Kelayakannya. Dibimbing oleh **I WAYAN MANGKU** dan **I GUSTI PUTU PURNABA**

Aturan keputusan Bayes sebagai bagian dari teori keputusan merupakan suatu fungsi yang digunakan dalam menduga suatu parameter populasi dimana parameter tersebut merupakan bilangan yang tidak diketahui. Prinsip-prinsip yang dipakai untuk menduga parameter dalam aturan keputusan Bayes membuat aturan Bayes selalu digunakan dalam kehidupan sehari-hari. Hal ini disebabkan karena aturan keputusan Bayes dapat meminimumkan nilai kerugian sekecil mugkin.

Analisis kelayakan dari aturan-aturan keputusan juga merupakan bagian dari teori keputusan. Melalui analisis kelayakan dapat dipilah-pilah aturan-aturan keputusan yang tepat dalam menduga suatu parameter.

Karya ilmiah ini mengkaji aturan keputusan Bayes yang tepat dalam masalah pendugaan titik dan menentukan kelayakan dari aturan keputusan Bayes yang telah dipilih.

ATURAN KEPUTUSAN BAYES PADA PENDUGAAN TITIK DAN ANALISIS KELAYAKANNYA

MEIZA PRATIWI

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Departemen Matematika

DEPARTEMEN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004

Judul : Aturan Keputusan Bayes pada Pendugaan Titik dan Analisis Kelayakannya
Nama : Meiza Pratiwi
Nrp : G05400045
Departemen : Matematika

Menyetujui,

Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc
Pembimbing I

Dr. Ir. I Gusti Putu Purnaba, DEA
Pembimbing II

Mengetahui,

Dr. Ir. M. Nur Aidi, MS
Ketua Departemen

Tanggal Lulus : 08 SEPTEMBER 2004

RIWAYAT HIDUP

Penulis lahir di Tanjungpinang pada tahun 1982 sebagai puteri bungsu dari 5 bersaudara, anak dari pasangan Bapak Abdul Muis dan Ibu Zannariah.

Setelah lulus dari SMU Taruna Nusantara Magelang pada tahun 2000, penulis melanjutkan kuliah ke IPB melalui jalur UMPTN di Departemen Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Selanjutnya penulis memilih bidang minat Matematika Ekonomi, yang kemudian memperoleh gelar Sarjana Sains pada tahun 2004.

Selama mengikuti perkuliahan, penulis pernah menjadi pengajar SMU di bimbingan belajar Prestasi IPB.

KATA PENGANTAR

Waktu berlalu begitu cepat dan tanpa terasa telah tiba saatnya bagi penulis untuk membuat sebuah karya ilmiah sebagai syarat kelulusan dengan segala usaha dan doa untuk menjadi sarjana. Sepertinya baru kemarin penulis mulai mencari ilmu di Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor sebagai mahasiswa.

Puji syukur atas segala nikmat dan karunia-Nya sudah sepantasnya penulis panjatkan kehadirat Allah SWT serta sholawat kepada junjungan besar Rasulullah SAW yang telah menjadi inspirasi penulis selama ini sehingga penulis dapat menyelesaikan karya ilmiah ini dengan baik.

Penulis juga ingin mengucapkan terimakasih kepada orang-orang yang telah membantu penulis dalam meyelesaikan setiap masalah-masalah yang muncul selama proses menulis, yaitu :

1. Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc. selaku dosen pembimbing I (terimakasih atas ilmu dan kesabarannya menjawab semua pertanyaan-pertanyaan iza). Dr. Ir. I Gusti Putu Purnaba, DEA. selaku dosen pembimbing II (terimakasih atas masukannya). Ir. Retno Budiarti, MS. selaku dosen penguji (terimakasih atas sarannya).
2. Mamak, terimakasih atas doanya yang tiada henti untuk iza, walaupun jauh tapi kasih sayang mamak selalu iza rindukan. Bapak, terimakasih yang tiada henti mensupport iza walaupun dalam keadaan susah sekalipun. Kak Yanti yang selalu berada di belakang iza dalam segala kondisi. Terimakasih walaupun jarang bertemu tapi iza selalu sayang Kak Yanti, juga mas Budi, Gilang dan Artha. Kak Ena yang sudah banyak memberikan nasehat yang sangat berguna. Terimakasih sudah sabar menghadapi iza, juga kepada Mas Pujo, Caca dan Amar. Bang Onnie yang selalu sayang dan perhatian ke iza, terimakasih atas dorongannya selama ini. Kak Yuli yang juga telah menjadi teman iza selama ini, mungkin karena usia kita tak terpaut jauh. Terimakasih atas kasih sayangnya selama ini.
3. Bang Fery, terimakasih atas cintanya yang selalu menjadi inspirasi dan penyemangat iza serta menjadikan hari-hari iza lebih berwarna.
4. Mama, terimakasih atas segala doa, kasih sayang, dan masukannya untuk iza. Papa, terimakasih atas dukungan dan doanya. Serta Adry, Irwan, dan Doni, belajarlah yang rajin dan selalu berdoa.
5. Kakek, Almarhumah Nenek, Tante Lies, Tante Tami, Om Wiwik serta seluruh keluarga yang tidak dapat disebutkan satu-satu di Tanjungpinang dan di mana pun juga, terimakasih atas doanya.
6. Ua Cecep, Ua Emi, Teh Heli, Mbak Neni, Kang Wandi dan Kang Dani, terimakasih sudah membantu iza menyelesaikan karya ilmiah ini. Mang Ujang, terimakasih sudah memberikan masukan untuk persentasi, serta seluruh keluarga Bang Fery yang sekarang sudah menjadi keluarga iza juga, terimakasih atas doanya.
7. Mbak Evi dan Mas Erwin yang sudah banyak membantu dalam persentasi seminar, terimakasih atas doanya. Mbak Lia, Mbak Neni, Mbak Ane, Ria, serta seluruh teman kost I/7 yang selalu mendukung iza.
8. Marita untuk kesediaan waktunya untuk mendengarkan semua cerita dan menemani iza selama di bogor. Uun, Mbak Titi, Kak Ega dan teman sekos yang sudah iza repotin selama iza seminar dan sidang.
9. Teman-Teman angkatan 37, terimakasih atas kebersamaannya selama iza kuliah di IPB.
10. Kakak dan adik kelas tetap semangat dalam mengerjakan apa pun juga, sukses untuk semua.
11. Mas Bono, Mas Yono, Mas Juanda, Bu Ade, Bu Susi, dan Mas Deny terimakasih sudah membantu iza

Beberapa pihak yang tidak dapat disebutkan satu-satu, penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya karena sudah membantu penulis menyelesaikan karya ilmiah ini. Semoga Allah senantiasa meridhoi semua amal kebaikan kita.

Mudah-mudahan karya ilmiah ini dapat dimanfaatkan bagi siapa saja yang membutuhkan

Penulis,
Meiza Pratiwi

DAFTAR ISI

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Teori keputusan adalah suatu bentuk penyelesaian dari masalah-masalah pengambilan keputusan di antaranya masalah pendugaan titik, masalah uji hipotesis, masalah pendugaan interval dan masalah-masalah keputusan lainnya.

Ciri-ciri dari (vektor) peubah acak adalah sebarannya. Sebaran ini memiliki karakteristik tertentu yang mempengaruhi bentuknya, yang sering disebut parameter populasi, dinotasikan dengan θ.

Pada sebaran peluang untuk vektor acak $\underline{X}$ yang masih bergantung pada θ, θ merupakan bilangan konstan yang tidak diketahui. Tetapi θ juga dapat berupa nilai yang mungkin dari peubah acak Θ yang memiliki sebaran peluang $\pi(\theta)$ yang selanjutnya akan disebut sebagai sebaran prior.

Selain sebaran prior akan digunakan juga sebaran posterior sebagai sebaran peluang dari Θ setelah pengamatan terhadap $\underline{X}$ diadakan.

Penulisan ini akan membahas teori mengenai pembuatan keputusan berdasarkan informasi-informasi yang didapat dalam bentuk sebaran peluang kontinu.

Tujuan

Tujuan penulisan karya ilmiah ini adalah sebagai berikut :

1. Menentukan aturan keputusan Bayes dalam masalah pendugaan titik.
2. Menentukan kelayakan dari aturan keputusan Bayes yang telah dipilih.

Metode Penulisan

Metode penulisan karya ilmiah ini adalah studi literatur. Materi karya ilmiah ini diambil dari pustaka-pustaka yang terkait dengan tulisan ini.

Sistematika Penulisan

Karya ilmiah ini terdiri atas empat bagian. Pada bagian pertama dijelaskan latar belakang , tujuan, metode penulisan dan sistematika penulisan. Bagian kedua menyajikan landasan teori berupa definisi yang diperlukan pada kajian berikutnya. Bagian ketiga menyajikan hasil dan pembahasan beserta ilustrasi dan bagian terakhir menyajikan kesimpulan.

LANDASAN TEORI

Ruang Contoh, Kejadian dan Peluang

Pengulangan di bawah kondisi yang sama dengan menggunakan prosedur tertentu seringkali dilakukan pada suatu penelitian, khususnya pada suatu percobaan. Hal ini dilakukan untuk mendapatkan informasi yang lebih lengkap. Hasil percobaan tidak dapat ditebak dengan tepat, namun kita dapat mengetahui semua kemungkinan hasil yang mungkin. Percobaan semacam ini disebut **percobaan acak** dan gugus dari semua hasil yang mungkin disebut **ruang percobaan** atau **ruang contoh**, yang biasanya dilambangkan dengan Ω. Setiap anak gugus suatu ruang contoh dinamakan **kejadian.** Kejadian terbagi atas dua bagian yaitu **kejadian majemuk** (kejadian yang terdiri atas lebih satu unsur) dan **kejadian dasar** (kejadian yang terdiri hanya satu unsur).

[Hogg dan Craig, 1995]

Definisi 1 (Medan-σ)
Suatu himpunan $\mathcal{F}$ yang anggotanya anak gugus ruang contoh Ω disebut medan-σ, jika

(i) $\phi \in \mathcal{F}$.

(ii) Jika $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots \in \mathcal{F}$ maka $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$.

(iii) Jika $B \in \mathcal{F}$ maka $B^c \in \mathcal{F}$.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 2 (Ukuran Peluang)

Ukuran peluang $\mathbf{P}$ pada $(\Omega, \mathcal{F})$ merupakan fungsi $\mathbf{P}: \mathcal{F} \to [0,1]$ yang memenuhi

(i) $\mathbf{P}(\phi) = 0$, $\mathbf{P}(\Omega) = 1$.

(ii) $\mathbf{P}$ bersifat aditif tak hingga (aditif lengkap), yaitu jika $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots \in \mathcal{F}$ dengan $B_i \cap B_j = \phi, i \neq j$, maka

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(B_n).$$

Pasangan $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ disebut suatu ruang peluang (*probability space*).

[Grimmet dan Stirzaker,1992]

Definisi 3 (Kejadian Bebas)

Kejadian A dan B disebut bebas jika

$$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B).$$

Secara umum, himpunan kejadian $\{B_i; i \in I\}$ disebut saling bebas jika

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i \in J} B_i\right) = \prod_{i \in J} \mathbf{P}(B_i),$$

untuk setiap anak gugus berhingga J dari I.

[Grimmett dan Stirzaker, 1992]

Peubah Acak dan Sebarannya

Definisi 4 (Peubah Acak)

Suatu peubah acak adalah suatu fungsi $X: \Omega \to \boldsymbol{R}$ dengan sifat bahwa $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$ untuk setiap $x \in \boldsymbol{R}$.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 5 (Fungsi Sebaran)

Fungsi sebaran dari suatu peubah acak X adalah fungsi $F: \boldsymbol{R} \to [0,1]$ yang diberikan oleh $F(x) = \mathbf{P}(X \leq x)$.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 6 (Peubah Acak Kontinu dan Fungsi Kepekatan Peluangnya)

Suatu peubah acak X dikatakan kontinu jika fungsi sebarannya dapat diekspresikan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

untuk suatu fungsi yang dapat diintegralkan $f: \boldsymbol{R} \to [0, \infty)$. Selanjutnya, fungsi f disebut fungsi kepekatan peluang bagi X.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 7 (Fungsi Sebaran Bersama)

Fungsi sebaran bersama dari dua peubah acak X dan Y adalah fungsi $F: \boldsymbol{R}^2 \to [0,1]$ yang diberikan oleh

$$F(x, y) = \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y).$$

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 8 (Fungsi Kepekatan Peluang Bersama Dua Peubah Acak Kontinu)

Peubah acak X dan Y disebut dua peubah acak kontinu yang menyebar bersama jika untuk setiap $x, y \in \boldsymbol{R}$ fungsi sebaran bersamanya dapat diekspresikan sebagai

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f(u, v)\,du\,dv$$

untuk suatu fungsi $f: \boldsymbol{R}^2 \to [0, \infty)$ yang dapat diintegralkan. Selanjutnya, fungsi f disebut fungsi kepekatan peluang bersama dari peubah acak X dan Y.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 9 (Fungsi Sebaran dan Fungsi Kepekatan Peluang Marginal Kontinu)

Misalkan X dan Y adalah peubah acak kontinu yang menyebar bersama. Fungsi sebaran marginal dari peubah acak X dan Y adalah berturut-turut

$$F_X(x) = \mathbf{P}(X \leq x) = F(x, \infty),$$

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = F(\infty, y).$$

Fungsi kepekatan peluang marginal dari peubah acak X dan Y adalah berturut-turut

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy,$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx.$$

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 10 (Fungsi Sebaran Bersyarat)

Fungsi sebaran bersyarat Y dengan syarat $X = x$, ditulis $F_{Y|X}(y|x)$ atau $\mathbf{P}(Y \leq y | X = x)$ dapat diekspresikan sebagai

$$F_{Y|X}(y|x) = \int_{v=-\infty}^{y} \frac{f(x, v)}{f_X(x)}\,dv$$

untuk sebarang x sehingga $f_X(x) > 0$.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Definisi 11 (Fungsi Kepekatan Peluang Bersyarat)
Fungsi kepekatan peluang bersyarat dari Y dengan syarat X, dinotasikan dengan $f_{Y|X}$ adalah

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$$

untuk sebarang x dimana $f_X(x) > 0.$
[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Nilai Harapan dan Ragam

Definisi 12 (Nilai Harapan Peubah Acak Kontinu)
Misalkan X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang f, maka nilai harapannya diberikan oleh

$$\mathbf{E}\,[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

jika integral di atas konvergen.
[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Beberapa sifat dari nilai harapan, yaitu :
(i) Jika k suatu konstanta, maka $\mathbf{E}(k) = k.$
(ii) Jika k suatu konstanta dan V suatu peubah acak, maka $\mathbf{E}(kV) = k\mathbf{E}[V].$
(iii) Jika k_1, k_2 konstanta dan V_1, V_2 peubah acak, maka
$\mathbf{E}[k_1V_1 + k_2V_2] = k_1\mathbf{E}[V_1] + k_2\mathbf{E}[V_2].$
Bentuk ini bisa diperluas lagi untuk m operasi. Jika $k_1, k_2, ..., k_m$ konstanta dan $V_1, V_2, ..., V_m$ peubah acak, maka
$\mathbf{E}[k_1V_1 + k_2V_2 + ... + k_mV_m]...$
$= k_1\mathbf{E}[V_1] + k_2\mathbf{E}[V_2] + ... + k_m\mathbf{E}[V_m].$
[Hogg dan Craig, 1995]

Definisi 13 (Nilai Harapan Bersyarat)
Misalkan Y adalah peubah acak kontinu dan $f_{Y|X}(y|x)$ adalah fungsi kepekatan peluang bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$. Nilai harapan bersyarat dari Y dengan syarat $X = x$ diberikan oleh

$$\mathbf{E}\,[Y|X = x] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_{Y|X}(y|x) dy.$$

[Hogg dan Craig, 1995]

Definisi 14 (Ragam dari suatu Peubah Acak)
Ragam dari peubah acak X, dinotasikan dengan σ_X^2, adalah nilai harapan dari kuadrat perbedaan antara X dengan rataannya, yaitu
$\sigma_X^2 = Var(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2].$
[Hogg dan Craig, 1995]

Cara lain menentukan ragam, yaitu

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}(X))^2].$$
$$= \mathbf{E}[X^2 - 2\mathbf{E}[X]X + (\mathbf{E}[X])^2],$$

dan karena $\mathbf{E}$ adalah operator linear maka

$$\sigma_X^2 = \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[X] + (\mathbf{E}[X])^2$$
$$= \mathbf{E}[X^2] - 2(\mathbf{E}[X])^2 + (\mathbf{E}[X])^2$$
$$= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2,$$

atau dapat ditulis

$$Var(X) = \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2.$$

Sedangkan akar kuadrat dari σ_X^2 yaitu σ_X disebut simpangan baku atau standar deviasi dari X.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Aturan Keputusan Bayes

Suatu **penduga titik** adalah sebarang fungsi $W(X_1,...,X_n)$ dari suatu contoh. Suatu **dugaan titik** adalah nilai dari suatu penduga berdasarkan suatu contoh yang diambil.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 15 (Vektor Acak)
Suatu vektor acak adalah suatu fungsi $\underline{X}:\Omega \rightarrow \boldsymbol{R}^n$, dimana

$$\underline{X}=(X_1,X_2,...,X_n),$$

dan setiap komponen ke-i dari $\underline{X}$ adalah peubah acak.

[Yeh, 1973]

Selanjutnya nilai dari vektor acak dianggap sebagai data amatan yang independen dari suatu sebaran bersama.

Definisi 16 (Fungsi Sebaran Bersama Vektor Acak)
Fungsi sebaran bersama dari suatu vektor acak $\underline{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ dalam ruang peluang $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ adalah fungsi $F_{\underline{X}}:\boldsymbol{R}^n \rightarrow [0,1]$ diberikan oleh

$$F_{\underline{X}}(\underline{x}) = \mathbf{P}\ (\underline{X} \le \underline{x})$$

untuk $\underline{x} \in \boldsymbol{R}^n$.

[Grimmet dan Stirzaker, 1992]

Fungsi kepekatan peluang dari vektor acak dapat diketahui dari fungsi sebaran bersama vektor acak. Untuk $\underline{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ yang unsur-unsurnya adalah peubah acak kontinu, maka fungsi sebaran bersama vektor acak di atas diberikan oleh

$$\mathbf{P}\ (\underline{X} \le \underline{x}) = \mathbf{P}\ (X_1 \le x_1,...,X_n \le x_n)$$
$$= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(x_1,...,x_n)dx_1...dx_n$$

dengan $f(x_1,...,x_n)$ adalah fungsi kepekatan peluang vektor acak $\underline{X}$.

Definisi 17 (Ruang Parameter)
Misalkan f adalah fungsi kepekatan peluang untuk $\underline{X}$ yang masih mengandung parameter θ sebagai nilai yang akan diduga. Himpunan nilai-nilai θ yang mungkin disebut **ruang parameter**, dinotasikan dengan Θ, atau $\theta \in \Theta$.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 18 (Sebaran Prior)
Sebaran peluang dalam ruang parameter Θ disebut sebaran prior, dinotasikan dengan $\pi(\theta), \theta \in \Theta$.

[Casella dan Berger, 1990]

Terdapat beberapa cara dalam menentukan sebaran prior. Salah satunya dijelaskan pada definisi, lema dan akibat berikut.

Definisi 19 (Fungsi Kepekatan Marginal Kontinu Peubah Acak $\underline{X}$ dari Fungsi Bersama dengan Sebaran Prior)
Fungsi kepekatan marginal kontinu dari $\underline{X}$ diberikan oleh

$$m(\underline{x}|\pi) = \int_{\Theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\theta.$$

[Berger, 1985]

Fungsi $m(\underline{x}|\pi)$ akan ditulis sebagai fungsi $m(\underline{x})$ saja dengan asumsi ketergantungan terhadap sebaran prior akan dimengerti.

Definisi 20 (Prinsip Kemungkinan)
Prinsip kemungkinan (Likelihood principle) adalah

1. Dalam membuat keputusan tentang θ setelah data amatan $\underline{x}$ didapat, semua informasi mengenai percobaan yang berhubungan terdapat dalam fungsi kemungkinan untuk data amatan $\underline{x}$.
2. Dua fungsi kemungkinan mengandung informasi yang sama tentang θ jika kedua fungsi tersebut proporsional satu dengan lainnya (sebagai fungsi dari θ).

[Berger, 1985]

Selanjutnya dibuat kelas yang mengandung sebaran-sebaran prior yang sudah dipilih.

Definisi 21 (Kelas Sebaran Prior)
Kelas dari prior dengan bentuk fungsi yang diberikan (priors of a given functional form) adalah

$$\Gamma = \{\pi : \pi(\theta) = g(\theta|\lambda), \lambda \in \Lambda\},$$

g adalah fungsi yang diberikan dan λ adalah *hyperparameter* dari prior.

[Berger,1985]

Fungsi g yang diberikan di atas adalah fungsi kepekatan yang mendekati sebaran prior yang kemudian diasumsikan sebagai sebaran prior.

Pada kelas yang didefinisikan di atas menjadikan sebaran prior memiliki pilihan yang diperkecil yaitu $\lambda \in \Lambda$.

Definisi 22 (Kemungkinan Maksimum Prior)
Misalkan kelas Γ adalah suatu kelas dari sebaran prior dan $\hat{\pi} \in \Gamma$ yang memenuhi

$$m(\underline{x}|\hat{\pi}) = \sup_{\pi \in \Gamma} m(\underline{x}|\pi).$$

Maka $\hat{\pi}$ disebut kemungkinan maksimum prior, atau ML prior.

[Berger, 1985]

Dalam memilih prior, $\pi \in \Gamma$, selain menggunakan fungsi kemungkinan maksimum dapat juga dengan menggunakan pendekatan momen di mana Γ adalah kelas dari bentuk fungsi yang diberikan.

Pendekatan momen dilakukan dengan menghubungkan momen prior dengan momen sebaran marginal X.

Lema dan Akibat berikut menjelaskan hubungan antara keduanya.

Lema 1
Misalkan $\mu_f(\theta)$ dan $\sigma_f^2(\theta)$ masing-masing adalah rataan dan ragam dari $\underline{X}$ terhadap fungsi kepekatan $f(\underline{x}|\theta)$. Misalkan μ_m dan σ_m^2 masing-masing adalah rataan dan ragam dari $\underline{X}$ terhadap fungsi kepekatan $m(\underline{x})$ dan π adalah sebaran prior. Maka

(i) $\mu_m = \mathbf{E}_\pi[\mu_f(\theta)]$,

(ii) $\sigma_m^2 = \mathbf{E}_\pi[\sigma_f^2(\theta)] + \mathbf{E}_\pi[(\mu_f(\theta) - \mu_m)^2]$.

Bukti :
Karena kedua fungsi kepekatan adalah fungsi kontinu, maka

(i) rataan dari $\underline{X}$ terhadap fungsi kepekatan $m(\underline{x})$ adalah

$$\begin{aligned}
\mu_m &= \mathbf{E}_m[\underline{X}] \\
&= \int_{\underline{X}} \underline{x} m(\underline{x}) d\underline{x} \\
&= \int_{\underline{X}} \underline{x} \int_{\Theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta) d\theta d\underline{x} \\
&= \int_{\Theta} \pi(\theta) \int_{\underline{X}} x f(\underline{x}|\theta) d\underline{x} d\theta \\
&= \int_{\Theta} \pi(\theta) \mu_f(\theta) d\theta \\
&= \mathbf{E}_\pi[\mu_f(\theta)].
\end{aligned}$$

Terbukti bahwa $\mu_m = \mathbf{E}_\pi[\mu_f(\theta)]$.

(ii) ragam dari $\underline{X}$ terhadap fungsi kepekatan $m(\underline{x})$ adalah

$$\begin{aligned}
\sigma_m^2 &= \mathbf{E}[(\underline{X} - \mu_m)^2] \\
&= \int_{\underline{X}} (\underline{x} - \mu_m)^2 \int_{\Theta} f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta) d\theta d\underline{x} \\
&= \int_{\Theta} \pi(\theta) \int_{\underline{X}} (\underline{x} - \mu_m)^2 f(\underline{x}|\theta) d\underline{x} d\theta \\
&= \mathbf{E}_\pi(\mathbf{E}_f[\underline{X} - \mu_m]^2) \\
&= \mathbf{E}_\pi(\mathbf{E}_f[(\underline{X} - \mu_f(\theta)) + \\
&\quad (\mu_f(\theta) - \mu_m)]^2) \\
&= \mathbf{E}_\pi(\mathbf{E}_f[(\underline{X} - \mu_f(\theta))^2 + \\
&\quad 2(\underline{X} - \mu_f(\theta))(\mu_f(\theta) - \mu_m) + \\
&\quad (\mu_f(\theta) - \mu_m)^2]).
\end{aligned}$$

Karena

$$\mathbf{E}_f[(\underline{X} - \mu_f)^2] = \sigma_f^2$$

dan

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_f[2(\underline{X} - \mu_f(\theta))(\mu_f(\theta) - \mu_m)] \\
&= 2(\mathbf{E}_f[(\underline{X} - \mu_f(\theta))(\mu_f(\theta) - \mu_m)] \\
&= 2(\mathbf{E}_f[(\underline{X} - \mu_f(\theta)]\mathbf{E}_f[\mu_f(\theta) - \mu_m]) \\
&= 2((\mathbf{E}_f[\underline{X}] - \mu_f(\theta))(\mu_f(\theta) - \mu_m))
\end{aligned}$$

$$= 2((\mu_f(\theta) - \mu_f(\theta))(\mu_f(\theta) - \mu_m))$$
$$= 0.$$

Sehingga nilai ragam dengan fungsi kepekatan $m(\underline{x})$ adalah

$$\sigma_m^2 = \mathbf{E}_\pi[\sigma_f^2(\theta)] + \mathbf{E}_\pi[(\mu_f(\theta) - \mu_m)^2].$$

Jadi Lema 1 terbukti. □

[Berger, 1985]

Akibat 2

(i) Jika $\mu_f(\theta) = \theta$, maka $\mu_m = \mu_\pi$, dimana $\mu_\pi = \mathbf{E}_\pi[\theta]$ adalah rataan dari prior.

(ii) Jika $\sigma_f^2(\theta) = \sigma_f^2$ (merupakan bilangan konstanta yang tidak bergantung pada θ), maka $\sigma_m^2 = \sigma_f^2 + \sigma_\pi^2$, dimana σ_π^2 adalah ragam dari prior.

Bukti :

(i) Karena $\mu_f(\theta) = \theta$, maka dari lema di atas dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned}\mu_m &= \mathbf{E}_\pi[\mu_f(\theta)]\\ &= \mathbf{E}_\pi[\theta]\\ &= \mu_\pi.\end{aligned}$$

Terbukti bahwa jika $\mu_f(\theta) = \theta$, maka $\mu_m = \mu_f$.

(ii) Karena $\sigma_f^2(\theta) = \sigma_f^2$, maka dari lema di atas dapat dilihat bahwa

$$\begin{aligned}\sigma_m^2 &= \mathbf{E}_\pi[\sigma_f^2(\theta)] + \mathbf{E}_\pi[(\mu_f(\theta) - \mu_m)^2]\\ &= \mathbf{E}_\pi[\sigma_f^2] + \mathbf{E}_\pi[(\theta - \mu_\pi)^2]\\ &= \sigma_f^2 + \sigma_\pi^2.\end{aligned}$$

Terbukti bahwa jika $\sigma_f^2(\theta) = \sigma_f^2$ dan bagian (i) dari Akibat 2 berlaku, maka

$$\sigma_m^2 = \sigma_f^2 + \sigma_\pi^2.$$

Jadi Akibat 2 terbukti. □

[Berger, 1985]

Definisi 23 (Ruang Tindakan)
Ruang tindakan, dinotasikan $\mathcal{A}$, merupakan himpunan dari keputusan (tindakan) yang mungkin, berkenaan dengan pendugaan θ setelah data $\underline{X} = \underline{x}$ didapat.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 24 (Aturan atau Fungsi Keputusan)
Misalkan $\mathcal{A}$ adalah ruang tindakan dengan $\underline{X} = \underline{x}$ sebagai data amatan. Maka aturan keputusan, $\delta(\underline{x}) \in \mathcal{D}$, adalah suatu fungsi $\delta : \underline{X} \to \mathcal{A}$, dimana setelah mengamati $\underline{x}$ akan berimplikasi pada pengambilan suatu tindakan $a \in \mathcal{A}$.

[Casella dan Berger, 1990]

Himpunan $\mathcal{D}$ adalah himpunan dari semua aturan keputusan dalam bentuk

$\mathcal{D} = \{$ semua aturan keputusan $\delta : R(\theta, \delta) < \infty$ untuk semua $\theta \in \Theta\}$.

Himpunan $\mathcal{D}$ merupakan himpunan dari semua aturan keputusan yang berlaku dengan ukuran $\mathcal{D}$ sebesar mungkin sehingga semua aturan keputusan yang layak dapat ditemukan dalam $\mathcal{D}$.

Ketepatan setiap tindakan a yang diambil, $a \in \mathcal{A}$, jika θ adalah keadaan yang benar, $\theta \in \Theta$, diukur dengan fungsi kerugian.

Definisi 25 (Fungsi Kerugian)
Misalkan $\theta \in \Theta$ dan a adalah tindakan dengan $a \in \mathcal{A}$. Kerugian yang terjadi jika θ adalah keadaan yang benar dengan a adalah tindakan yang diambil disebut fungsi kerugian, $L(\theta, a)$, yang merupakan suatu fungsi $L : \Theta \times \mathcal{A} \to \boldsymbol{R}$.

[Casella dan Berger, 1990]

Tindakan yang baik adalah tindakan yang memiliki fungsi kerugian dengan nilai terkecil.

Untuk masalah yang tidak memiliki data, suatu aturan keputusan adalah suatu tindakan sederhana.

Definisi 26 (Nilai Harapan Kerugian Bayes)
Jika $\pi^*(\theta)$ adalah sebaran peluang dari θ pada saat membuat keputusan maka nilai harapan kerugian Bayes dari suatu tindakan a adalah

$$\rho(\pi^*, a) = \mathbf{E}_{\pi^*} L(\theta, a) = \int_\Theta L(\theta, a)\pi(\theta)\, d\theta.$$

[Berger, 1985]

Definisi 27 (Tindakan Bayes)
Misalkan terdapat suatu tindakan $a \in \mathcal{A}$. Suatu tindakan yang meminimumkan nilai harapan kerugian Bayes, $\rho(\pi^*, a)$, disebut tindakan Bayes, dinotasikan dengan a_π.

[Berger, 1985]

Kualitas dari suatu aturan keputusan dilihat dari rataan kerugian yang akan terjadi, yaitu dengan fungsi resiko.

Definisi 28 (Fungsi Resiko)
Untuk θ yang diberikan, fungsi resiko didefinisikan sebagai

$$R(\theta,\delta) = \mathbf{E}_{\underline{X}}\, L(\theta,\delta(\underline{X}))$$

dengan $\mathbf{E}_{\underline{X}}$ adalah nilai harapan terhadap sebaran peluang $\underline{X}$ dengan θ yang diberikan.

[Rice, 1995]

Untuk masalah yang tidak memiliki data, maka $R(\theta,\delta) \equiv L(\theta,\delta)$.

Definisi 29 (Fungsi Resiko dengan Sebaran Peluang Kontinu)
Misalkan terdapat data $\underline{X} = \underline{x}$ dan aturan keputusan $\delta \in \mathcal{D}$. Fungsi resiko dengan sebaran peluang kontinu diberikan oleh

$$R(\theta,\delta) = \int_{\underline{X}} L(\theta,\delta(\underline{X}))f(\underline{x}|\theta)d\underline{x}. \quad (1)$$

[Rice, 1995]

Dengan nilai θ yang diberikan dipilih aturan keputusan dengan nilai harapan kerugian yang terkecil.

Fungsi resiko sebagai ukuran kualitas dari aturan keputusan tidak selalu dapat digunakan. Karena seringkali nilai θ belum dapat diketahui, maka tidak dapat ditentukan aturan keputusan yang lebih baik dari aturan keputusan lainnya.

Fungsi-fungsi resiko dengan masing-masing aturan keputusan kemudian dijadikan suatu bilangan dengan resiko Bayes.

Definisi 30 (Resiko Bayes)
Misalkan δ adalah fungsi keputusan terhadap sebaran prior, $\pi(\theta)$, maka resiko Bayes adalah fungsi

$$B(\pi,\delta) = \mathbf{E}_{\pi} R(\theta,\delta)$$

dimana $\mathbf{E}_{\pi}$ adalah nilai harapan dan θ adalah peubah acak dengan fungsi sebaran $\pi(\theta)$.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 31 (Resiko Bayes pada Sebaran Peluang Kontinu)
Misalkan $\pi(\theta)$ adalah sebaran peluang kontinu dari peubah acak Θ, maka fungsi resiko Bayesnya didefinisikan sebagai

$$B(\pi,\delta) = \int_{\Theta} R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta.$$

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 32 (Batas Bawah)
Misalkan S adalah himpunan terurut, E adalah himpunan semua resiko Bayes, dan $E \subset S$. Kita sebut E terbatas di bawah apabila $\exists g \in S$ sehingga $g \le z, \forall z \in E$. Selanjutnya g disebut batas bawah dari E.

[Goldberg, 1976]

Definisi 33 (Infimum)
Misalkan S adalah himpunan terurut, E adalah himpunan semua resiko Bayes, dan $E \subset S$. Kita sebut β adalah batas bawah terbesar dari E jika

(i) β adalah batas bawah dari E.
(ii) Untuk setiap γ yang merupakan batas bawah lain dari E maka akan berlaku $\gamma \le \beta$.

Jika β adalah batas bawah terbesar dari E maka β disebut infimum dari E dan ditulis $\beta = \inf E$.

[Goldberg, 1976]

Akan ditentukan aturan Bayes dengan resiko Bayes yang terkecil.

Definisi 34 (Aturan Bayes dengan Sebaran Prior π)
Misalkan D adalah himpunan semua aturan Bayes yang mungkin, dengan $D \subset \mathcal{D}$. Aturan Bayes terhadap sebaran prior π, dinotasikan dengan $\delta_\pi(\underline{x})$, adalah sebaran yang meminimumkan resiko Bayes di antara semua aturan keputusan yang mungkin,

yang diberikan oleh

$$B(\pi,\delta_\pi) = \inf_{\delta\in D} B(\pi,\delta). \qquad (2)$$

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 35 (Sebaran Posterior)

Misalkan $f(\underline{x},\theta)$ adalah sebaran bersama $\underline{X}$ dan Θ sebagai peubah acak dengan $\theta \in \Theta$, $m(\underline{x})$ merupakan sebaran marginal $\underline{X}$. Maka sebaran posterior dari Θ diberikan oleh

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x},\theta)}{m(\underline{x})}$$

yaitu sebaran bersyarat dari Θ dengan syarat $\underline{X}$.

[Rice, 1995]

Sehingga dapat diperoleh

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x},\theta)}{m(\underline{x})}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) = \frac{f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)}{m(\underline{x})}$$

$$\pi(\theta|\underline{x})m(\underline{x}) = f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta). \qquad (3)$$

Definisi 36 (Resiko Posterior pada sebaran peluang kontinu)

Misalkan terdapat data $\underline{X} = \underline{x}$ dan aturan keputusan $\delta \in \mathcal{D}$. Fungsi resiko posterior diberikan oleh

$$\mathbf{E}_{\Theta} L(\theta,\delta(\underline{x})) = \int_{\Theta} L(\theta,\delta(\underline{x}))\pi(\theta|\underline{x})d\theta$$

dengan $\mathbf{E}_{\Theta}$ adalah nilai harapan terhadap sebaran posterior dari Θ.

[Rice, 1995]

Teorema 1

Untuk setiap $\underline{x} \in \underline{X}$ dan $a \in \mathcal{A}$, didefinisikan

$$r(\underline{x},a) = \int_{\Theta} L(\theta,a)\pi(\theta|\underline{x})d\theta. \qquad (4)$$

Untuk setiap $\underline{x} \in \underline{X}$ terdapat suatu $a_{\underline{x}} \in \mathcal{A}$ sehingga

$$r(\underline{x},a_{\underline{x}}) = \inf_{a\in\mathcal{A}} r(\underline{x},a). \qquad (5)$$

Misalkan δ_π adalah suatu fungsi dari $\underline{X}$ ke $\mathcal{A}$, didefinisikan dengan $\delta_\pi(\underline{x}) = a_{\underline{x}}$. Jika $\delta_\pi \in \mathcal{D}$, maka δ_π adalah aturan Bayes terhadap π.

Bukti :

Misalkan δ adalah suatu aturan keputusan dengan resiko Bayes diberikan oleh

$$B(\pi,\delta) = \int_{\Theta} R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta$$

Berdasarkan persamaan (1), maka

$$= \int_{\Theta}\left[\int_{\underline{X}} L(\theta,\delta(\underline{x}))f(\underline{x}|\theta)d\underline{x}\right]\pi(\theta)d\theta$$

$$= \int_{\Theta}\int_{\underline{X}} L(\theta,\delta(\underline{x}))f(\underline{x}|\theta)\pi(\theta)d\underline{x}d\theta$$

Berdasarkan persamaan (3), maka

$$= \int_{\Theta}\int_{\underline{X}} L(\theta,\delta(\underline{x}))\pi(\theta|\underline{x})m(\underline{x})d\underline{x}d\theta$$

$$= \int_{\underline{X}}\int_{\Theta} L(\theta,\delta(\underline{x}))\pi(\theta|\underline{x})m(\underline{x})d\theta d\underline{x}$$

$$= \int_{\underline{X}}\int_{\Theta} L(\theta,\delta(\underline{x}))\pi(\theta|\underline{x})d\theta m(\underline{x})d\underline{x}$$

Berdasarkan persamaan (4), maka

$$= \int_{\underline{X}} r(\underline{x},\delta(\underline{x}))m(\underline{x})d\underline{x}. \qquad (6)$$

Dari persamaan (5) dan persamaan (2) pada Definisi 34, untuk setiap $\underline{x} \in \underline{X}, r(\underline{x},\delta_\pi(\underline{x})) = r(\underline{x},a_{\underline{x}})$ adalah nilai terkecil yang mungkin dan δ_π adalah aturan Bayes yang membuat persamaan (6) minimum.

Jadi Teorema 1 terbukti. □

[Casella dan Berger, 1990]

Sehingga untuk data $\underline{x}$, aturan Bayes akan mengambil tindakan $a_{\underline{x}}$ seperti pada persamaan (5).

Aturan Bayes pada Masalah Pendugaan Titik

Masalah pendugaan titik merupakan salah satu yang penyelesaiannya berkaitan dengan pembuatan keputusan. Untuk setiap data yang diperoleh dan tindakan yang akan diambil pada pendugaan titik aturan keputusan Bayes, ketepatan keputusan ditentukan oleh fungsi kerugian, kerugian Bayes, fungsi resiko, resiko Bayes, sehingga aturan keputusan tersebut dapat meminimumkan resiko Bayes.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 37 (*Error* pada Fungsi Kerugian)

Misalkan θ bernilai real. Fungsi kerugian pada umumnya diberikan oleh

(i) *Squared error loss,* yaitu $L(\theta,a)=(a-\theta)^2$.

(ii) *Absolute error loss,* yaitu $L(\theta,a)=|a-\theta|$.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 38 (Median)
Suatu nilai yang membagi frekuensi total menjadi dua bagian sama besar disebut median. Bagi sebaran frekuensi kontinu nilainya ditentukan oleh

$$\int_{-\infty}^{m} f(\underline{x})d\underline{x}=\int_{m}^{\infty} f(\underline{x})d\underline{x}=\frac{1}{2}$$

dengan m adalah median.

[Barizi, et al. 1996]

Teorema 2
Misalkan terdapat masalah penduga titik dengan parameter bernilai real. Dalam setiap dua situasi berikut, jika $\delta_\pi \in \mathcal{D}$ maka δ_π adalah aturan Bayes (disebut juga penduga Bayes)

(i) Untuk *squared error loss,*

$\delta_\pi(\underline{x})=\mathrm{E}(\theta|\underline{x})$.

(ii)Untuk *absolute error loss,*

$\delta_\pi(\underline{x})=$ median dari $\pi(\theta|\underline{x})$.

Bukti :
(i)Untuk *squared error loss,* misalkan θ adalah peubah acak dengan sebaran posterior $\pi(\theta|\underline{x})$.
Dari persamaan (4) Teorema 1, maka :

$$r(\underline{x},a)=\int_\Theta L(\theta,a)\pi(\theta|\underline{x})d\theta$$

$$\begin{aligned}r(\underline{x},a)&=\int_\Theta (\theta-a)^2\pi(\theta|\underline{x})d\theta\\&=\mathbf{E}[(\theta-a)^2|\underline{X}=\underline{x}]\\&=\mathbf{E}[(\theta^2-2a\theta+a^2)|\underline{X}=\underline{x}].\end{aligned}$$

Untuk mengetahui nilai a, maka persamaan di atas diturunkan menjadi

$$\begin{aligned}\frac{dr(\underline{x},a)}{d\theta}&=\mathbf{E}[(2\theta-2a|\underline{X}=\underline{x}]\\&=0\end{aligned}$$

$$2\mathbf{E}[\theta]-2a=0 \qquad (7)$$

Agar persamaan (7) minimum, maka dipilih

$$\begin{aligned}a&=\mathbf{E}(\theta|\underline{X}=\underline{x})\\&=\mathbf{E}(\theta|\underline{x}).\end{aligned}$$

Berdasarkan Teorema 1, maka dipilih

$$a_{\underline{x}}=\mathbf{E}(\theta|\underline{x})=\delta_\pi(\underline{x}).$$

(ii)Untuk "absolute error loss", misalkan m, median dari sebaran $\pi(\theta|\underline{x})$, adalah suatu tindakan,

(a)misalkan terdapat sebarang $a\in\mathcal{A}$ dimana $a>m$ adalah tindakan yang lain, maka dari hipotesis di atas didapat

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(m-\theta)-(a-\theta)\\&=m-a\text{, jika } \theta\le m.\end{aligned} \qquad (8)$$

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(\theta-m)-(a-\theta)\\&=2\theta-(m+a)\text{, jika}\\&\quad m<\theta<a.\end{aligned} \qquad (9)$$

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(\theta-m)-(\theta-a)\\&=a-m\text{, jika } \theta\ge a.\end{aligned} \qquad (10)$$

Atau dapat ditulis

$$L(\theta,m)-L(\theta,a)\ldots$$

$$=\begin{cases} m-a & \text{, jika } \theta\le m \quad (8)\\ 2\theta-(m+a) & \text{, jika } m<\theta<a \quad (9)\\ a-m & \text{, jika } \theta\ge a. \quad (10)\end{cases}$$

Dari persamaan di atas berlaku

$$\begin{aligned}&L(\theta,m)-L(\theta,a)\ldots\\&\le[L(\theta,m)-L(\theta,a)]\mathrm{I}_{(-\infty,m)}(\theta)+\\&\quad[L(\theta,m)-L(\theta,a)]\mathrm{I}_{(m,\infty)}(\theta).\end{aligned} \qquad (11)$$

Persamaan (9) merupakan fungsi polinom maka fungsi tersebut kontinu di a. Selanjutnya persamaan (9) dapat ditulis

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=2\theta-(m+a)\\&=2a-(m+a)\\&=a-m\text{, jika}\\&\quad m<\theta<a.\end{aligned} \qquad (12)$$

Persamaan (10) juga merupakan fungsi polinom sehingga fungsi tersebut kontinu di a. Karena persamaan (9) kontinu di a dan persamaan (10) juga kontinu di a maka persamaan dengan gabungan interval dari kedua persamaan (9) dan (10) juga kontinu di

a. Dari persamaan (8), (10) dan (12), maka persamaan (11) dapat ditulis sebagai

$$L(\theta,m)-L(\theta,a)\le(m-a)\mathrm{I}_{(-\infty,m)}(\theta)+ (a-m)\mathrm{I}_{(m,\infty)}(\theta) \tag{13}$$

dengan nilai harapannya

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)-L(\theta,a)]\ldots$$

$$=\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)].$$

Berdasarkan persamaan (13), maka nilai harapannya menjadi

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)]\ldots$$

$$\le\left[(m-a)\int_{-\infty}^{m}\pi(\theta|\underline{x})d\theta\right]+ \left[(a-m)\int_{m}^{\infty}\pi(\theta|\underline{x})d\theta\right].$$

Berdasarkan Definisi 38, maka

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)]\ldots$$

$$\le\left[(m-a)\frac{1}{2}\right]+\left[(a-m)\frac{1}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}m-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}m$$

$$=0.$$

Maka pertidaksamaan di atas menjadi

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)]\le 0$$

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]\le\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)].$$

(b)Misalkan terdapat sembarang $a\in\mathcal{A}$ dimana $a<m$ adalah tindakan yang lain, maka dari hipotesis sebelumnya didapat

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(m-\theta)-(a-\theta)\\&=m-a\text{, jika } \theta\le a.\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(m-\theta)-(\theta-a)\\&=(m+a)-2\theta\text{, jika } a<\theta<m.\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=|\theta-m|-|\theta-a|\\&=(\theta-m)-(\theta-a)\\&=a-m\text{, jika } \theta\ge m.\end{aligned} \tag{16}$$

Dari persamaan di atas dapat ditulis

$$L(\theta,m)-L(\theta,a)\ldots$$

$$=\begin{cases} m-a & \text{, jika } \theta\le a \quad (14)\\ (m+a)-2\theta & \text{, jika } a<\theta<m \quad (15)\\ a-m & \text{, jika } \theta\ge m \quad (16).\end{cases}$$

Dari persamaan di atas berlaku

$$L(\theta,m)-L(\theta,a)\ldots$$

$$\le[L(\theta,m)-L(\theta,a)]\mathrm{I}_{(-\infty,m)}(\theta)+ [L(\theta,m)-L(\theta,a)]\mathrm{I}_{(m,\infty)}(\theta). \tag{17}$$

Persamaan (14) merupakan fungsi polinom maka fungsi tersebut kontinu di a. Persamaan (15) juga merupakan fungsi polinom sehingga fungsi tersebut kontinu di a. Selanjutnya (15) dapat ditulis

$$\begin{aligned}L(\theta,m)-L(\theta,a)&=(m+a)-2\theta\\&=(m+a)-2a\\&=m-a\text{, jika}\\&\quad a<\theta<m.\end{aligned} \tag{18}$$

Karena persamaan (14) kontinu di a dan persamaan (15) juga kontinu di a maka persamaan dengan gabungan interval dari kedua persamaan (14) dan (15) juga kontinu di a. Dari persamaan (14), (16) dan (18), maka persamaan (17) dapat ditulis sebagai

$$L(\theta,m)-L(\theta,a)\le(m-a)\mathrm{I}_{(-\infty,m)}(\theta)+ (a-m)\mathrm{I}_{(m,\infty)}(\theta) \tag{19}$$

dengan nilai harapannya adalah

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)-L(\theta,a)]\ldots$$

$$=\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)].$$

Berdasarkan persamaan (19), maka nilai harapannya menjadi

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)]\ldots$$

$$\le\left[(m-a)\int_{-\infty}^{m}\pi(\theta|\underline{x})d\theta\right]+ \left[(a-m)\int_{m}^{\infty}\pi(\theta|\underline{x})d\theta\right].$$

Berdasarkan Definisi 38, maka

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)]-\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)]\ldots$$

$$\le\left[(m-a)\frac{1}{2}\right]+\left[(a-m)\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}m - \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}m$$
$$= 0$$

Maka pertidaksamaan di atas menjadi

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)] - \mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)] \le 0$$

$$\mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,m)] \le \mathbf{E}_{\pi(\theta|\underline{x})}[L(\theta,a)].$$

Pada (a) dan (b), nilai harapan fungsi kerugian dengan tindakan m terhadap sebaran posterior memiliki nilai terkecil daripada nilai harapan fungsi kerugian dengan tindakan $a \in \mathcal{A}$ lainnya. Sehingga berdasarkan Teorema 1, m, median dari sebaran $\pi(\theta|\underline{x})$, adalah aturan Bayes atau penduga Bayes.

Jadi Teorema 2 terbukti. □

[(Casella dan Berger, 1990), (Berger, 1985)]

Aturan Keputusan Teracak

Aturan keputusan tak teracak (nonrandomized) seperti pada pembahasan sebelumnya merupakan kasus khusus dari aturan keputusan teracak (randomized) dimana untuk setiap $\underline{x}$ dipilih tindakan yang spesifik dengan peluang satu.

Untuk beberapa kasus percobaan dimana setiap tindakan yang ada memiliki peluang yang sama maka tindakan teracak merupakan keputusan yang tepat.

Definisi 39 (Aturan Keputusan Teracak)

Untuk setiap vektor acak $\underline{x}$ dan suatu sebaran peluang pada $\mathcal{A}$, aturan keputusan teracak $\delta^*(\underline{x},\cdot) \in \mathcal{D}^*$ adalah jika $\underline{x}$ adalah data amatan maka $\delta^*(\underline{x}, A)$ adalah peluang dari suatu tindakan dalam A (subset dari $\mathcal{A}$) akan dipilih.

[Berger, 1985]

Himpunan $\mathcal{D}^*$ merupakan himpunan dari semua aturan keputusan teracak δ^* untuk fungsi resiko yang memenuhi $R(\theta,\delta^*) < \infty$ untuk semua θ.

Untuk masalah-masalah tanpa memiliki data, suatu aturan keputusan teracak disebut juga suatu tindakan teracak, dinotasikan $\delta^*(\cdot)$.

Definisi 40 (Fungsi Kerugian Aturan Keputusan Teracak)

Untuk aturan keputusan teracak δ^*, fungsi kerugian diberikan oleh

$$L(\theta,\delta^*(\underline{x},\cdot)) = \mathbf{E}_{\delta^*(\underline{x},\cdot)}[L(\theta,a)],$$

dengan $\mathbf{E}$ merupakan nilai harapan terhadap tindakan a.

[Berger, 1985]

Definisi 41 (Fungsi Resiko Aturan Keputusan Teracak)

Untuk aturan keputusan teracak δ^*, fungsi resiko diberikan oleh

$$R(\theta,\delta^*) = \mathbf{E}_{\underline{X}}[L(\theta,\delta^*(\underline{X},\cdot))],$$

dengan $\mathbf{E}$ merupakan nilai harapan terhadap sebaran peluang $\underline{X}$ dengan diberikan θ.

[Berger, 1985]

Dalam menyederhanakan masalah-masalah statistik seringkali dipergunakan statistik cukup yang merupakan suatu fungsi dari data amatan yang meringkas semua informasi mengenai θ yang tersedia.

Definisi 42 (Statistik Cukup)

Misalkan $\underline{X}$ adalah vektor acak dengan sebaran yang bergantung pada parameter θ yang tidak diketahui nilainya, dengan nilai lainnya diketahui. Fungsi T dari $\underline{X}$ disebut statistik cukup untuk θ jika sebaran bersyarat dari $\underline{X}$, dengan syarat $T(\underline{x}) = t$, adalah tidak bergantung pada θ.

[Berger, 1985]

Definisi 43 (Partisi oleh Statistik Cukup)

Misalkan $T(\underline{x})$ adalah statistik dengan *range* $\mathcal{T}$, yaitu $\mathcal{T} = \{T(\underline{x}) : \underline{x} \in \underline{X}\}$. Partisi dari $\underline{X}$ oleh T adalah himpunan semua set-set dalam bentuk

$$\underline{X}_t = \{\underline{x} \in \underline{X} : T(\underline{x}) = t\}.$$

untuk $t \in \mathcal{T}$.

[Berger, 1985]

Himpunan $\underline{X}$ dipartisi menjadi set-set $\underline{X}_t$ yang saling lepas sehingga jika $t_1 \ne t_2$, maka $\underline{X}_{t_1} \cap \underline{X}_{t_2} = \phi$ dan $\bigcup_{t\in I} \underline{X}_t = \underline{X}$.

Definisi 44 (Partisi Cukup)
Suatu partisi cukup $\underline{X}$ adalah partisi oleh suatu statistik cukup T.

[Berger, 1985]

Definisi 45 (Fungsi Resiko Aturan Keputusan Teracak Berdasarkan Statistik Cukup)
Untuk sembarang statistik cukup $T(\underline{X})$, $\delta^*(t,\cdot)$ adalah aturan keputusan teracak, dengan $\mathcal{T}$ sebagai ruang contoh, yang berdasarkan statistik T. Maka fungsi resiko aturan keputusan teracak berdasarkan statistik T diberikan oleh :

$$R(\theta,\delta^*)=\mathbf{E}_T[L(\theta,\delta^*(T,\cdot))]$$

dengan $\mathbf{E}_T$ adalah nilai harapan terhadap statistik T.

[Berger, 1985]

Definisi 46 (Aturan Keputusan Teracak Berdasarkan Statistik Cukup)
Misalkan T merupakan statistik cukup untuk θ. Aturan keputusan teracak berdasarkan statistik T diberikan oleh

$$\delta_1^*(t,A)=\mathbf{E}_{\underline{X}|t}[\delta_0^*(\underline{X},A)]$$

dengan $\mathbf{E}_{\underline{X}|t}$ merupakan nilai harapan terhadap sebaran bersyarat $\underline{X}$ dengan syarat T.

[Berger, 1985]

Lema 3
Jika X dan Y adalah dua peubah acak, maka nilai harapan fungsi $h(X)$ terhadap sebaran X dapat ditentukan lewat nilai harapan fungsi $h(X)$ terhadap sebaran X dengan syarat Y sebagai berikut

$$\mathbf{E}_X[h(X)]=\mathbf{E}_Y[\mathbf{E}_{X|Y}[h(X)]].$$

Bukti :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_Y[\mathbf{E}_{X|Y}[h(X)]] &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_{X|Y}[h(X)]f_Y(y)dy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(X)f_{X|Y}(x|y)f_Y(y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(X)\frac{f_{XY}(x,y)}{f_Y(y)}f_Y(y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h(X)f_{XY}(x,y)dxdy\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}h(X)\int_{-\infty}^{\infty}f_{XY}(x,y)dydx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}h(X)f_X(x)dx\\ &= \mathbf{E}_X[h(X)].\end{aligned}$$

Maka

$$\mathbf{E}_X[h(X)]=\mathbf{E}_Y[\mathbf{E}_{X|Y}[h(X)]].$$

Jadi Lema terbukti. □

[Ross, 2000]

Teorema 3
Misalkan T adalah statistik cukup untuk θ, dan $\delta_0^*(\underline{x},\cdot)$ adalah sembarang aturan keputusan teracak dalam $\mathcal{D}^*$. Maka terdapat suatu aturan keputusan teracak $\delta_1^*(t,\cdot)$, yang bergantung hanya pada $T(\underline{x})$, dimana $R(\theta,\delta_1^*)$ ekuivalen dengan $R(\theta,\delta_0^*)$.

Bukti :
Berdasarkan Definisi 45 maka

$$R(\theta,\delta_1^*)=\mathbf{E}_T[L(\theta,\delta_1^*(T,\cdot))].$$

Dari Definisi 40, maka

$$=\mathbf{E}_T\mathbf{E}_{\delta_1^*(T,\cdot)}[L(\theta,a)].$$

Dari Definisi 46 maka

$$=\mathbf{E}_T\mathbf{E}_{\underline{X}|T}\mathbf{E}_{\delta_0^*(\underline{X},\cdot)}[L(\theta,a)].$$

Dengan menggunakan Lema 3 maka diperoleh

$$=\mathbf{E}_{\underline{X}}\mathbf{E}_{\delta_0^*(\underline{X},\cdot)}[L(\theta,a)].$$

Dari Definisi 40, maka

$$\begin{aligned}&=\mathbf{E}_{\underline{X}}[L(\theta,\delta_0^*(\underline{X},\cdot)]\\ &=R(\theta,\delta_0^*).\end{aligned}$$

$$R(\theta,\delta_1^*)=R(\theta,\delta_0^*).$$

Dapat disimpulkan bahwa $R(\theta,\delta_1^*)$ ekuivalen dengan $R(\theta,\delta_0^*)$.
Jadi Teorema 3 terbukti. □

[Berger, 1985]

Dari teorema di atas dapat disimpulkan bahwa penentuan aturan keputusan menggunakan fungsi resiko hanya perlu berdasarkan suatu statistik cukup.

Kelayakan Aturan Keputusan

Kelayakan dari aturan-aturan keputusan sangat diperhatikan dalam memilih aturan keputusan yang tepat. Oleh karena itu didefinisikan kelas-kelas yang mengandung aturan-aturan keputusan yang baik (good rules).

Definisi 47 (Perbandingan Aturan Keputusan)
Misalkan δ_1 dan δ_2 adalah dua aturan keputusan dengan masing-masing fungsi resiko $R(\theta,\delta_1)$ dan $R(\theta,\delta_2)$. Kita sebut aturan keputusan :

(i) δ_1 adalah tidak lebih jelek dari δ_2 jika $R(\theta,\delta_1) \le R(\theta,\delta_2)$ untuk semua $\theta \in \Theta$.
(ii) δ_1 lebih baik dari δ_2 jika $R(\theta,\delta_1) \le R(\theta,\delta_2)$ untuk semua $\theta \in \Theta$ dan $R(\theta,\delta_1) < R(\theta,\delta_2)$ untuk suatu $\theta \in \Theta$.
(iii) δ_1 ekuivalen dengan δ_2 jika $R(\theta,\delta_1) = R(\theta,\delta_2)$ untuk semua $\theta \in \Theta$.

[Casella dan Berger, 1990]

Karena terdapat banyak aturan keputusan yang layak, maka menggunakan fungsi resiko dalam memilih aturan keputusan yang tepat sangat sulit. Penggunaan prinsip resiko Bayes merupakan salah satu prinsip tambahan untuk menyeleksi aturan keputusan secara lebih spesifik.

Definisi 48 (Kelayakan δ)
Aturan keputusan δ_1 disebut layak apabila tidak ada $\delta_2 \in \mathcal{D}$ yang lebih baik dari δ_1. Aturan keputusan δ_1 disebut tidak layak apabila ada $\delta_2 \in \mathcal{D}$ yang lebih baik dari δ_1.

[Casella dan Berger, 1990]

Definisi 49 (Prinsip Resiko Bayes)
Prinsip resiko Bayes, yaitu aturan keputusan δ_1 adalah lebih baik daripada δ_2 jika

$$B(\pi,\delta_1) < B(\pi,\delta_2).$$

[Berger, 1985]

Himpunan $\mathcal{D}$ merupakan himpunan aturan keputusan yang besar yang mungkin memuat semua fungsi dari $\underline{X}$ ke $\mathcal{A}$. Sehingga untuk dapat menentukan $\delta \in \mathcal{D}$ yang akan digunakan dibuat sub kelas C yang lebih kecil berdasarkan perbandingan dan kelayakan dengan memuat semua aturan yang tepat dengan $C \subset \mathcal{D}$.

Definisi 50 (Kelas Lengkap)
Misalkan C suatu kelas aturan keputusan yang merupakan subkelas dari $\mathcal{D}$. Kita sebut C adalah kelas lengkap jika untuk sebarang $\delta_2 \notin C$ ada $\delta_1 \in C$ sehingga δ_1 lebih baik dari δ_2. Kita katakan C mendekati kelas lengkap jika untuk sebarang $\delta_2 \notin C$ ada $\delta_1 \in C$ sehingga δ_1 adalah tidak lebih jelek dari δ_2.

[Casella dan Berger, 1990]

Hubungan antara kelayakan dan kelas lengkap dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 4
Jika C adalah kelas lengkap dari aturan keputusan, maka kelas aturan keputusan yang layak terdapat di C.

Bukti :
Misalkan δ_2 adalah suatu aturan keputusan yang layak. Jika $\delta_2 \notin C$, maka dari Definisi 50, ada suatu $\delta_1 \in C$ sehingga δ_1 lebih baik dari δ_2. Kontradiksi dengan Definisi 48, yaitu $\delta_2 \in \mathcal{D}$ adalah aturan keputusan yang layak jika tidak terdapat $\delta_1 \in \mathcal{D}$ yang lebih baik dari δ_2. Oleh sebab itu $\delta_2 \in C$.
Jadi Teorema 4 terbukti. □

[Casella dan Berger, 1990]

Kelayakan dari aturan Bayes dijelaskan pada teorema berikut

Teorema 5
Misalkan terdapat suatu masalah keputusan dimana ruang parameter Θ adalah subset dari garis real. Anggap untuk setiap aturan keputusan $\delta \in \mathcal{D}$, fungsi resiko $R(\theta,\delta)$ adalah fungsi kontinu dari Θ. Misalkan $\pi(\theta)$ adalah sebaran prior dalam Θ. Dengan syarat untuk sebarang $\varepsilon > 0$ dan

$\theta \in \Theta$, interval $(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon)$ memiliki peluang positif di bawah π. Misalkan δ_π adalah aturan Bayes terhadap π. Jika $-\infty < B(\pi,\delta_\pi) < \infty$, maka δ_π adalah aturan keputusan yang layak.

Bukti :

Anggap δ_π adalah aturan keputusan yang tidak layak. Dari Definisi 47 dan Definisi 48 terdapat suatu aturan $\delta \in \mathcal{D}$ sehingga $R(\theta,\delta) \le R(\theta,\delta_\pi)$ untuk semua $\theta \in \Theta$ dan untuk beberapa θ, misal θ', maka $R(\theta',\delta) < R(\theta',\delta_\pi)$. Misalkan $R(\theta',\delta_\pi) - R(\theta',\delta) = v > 0$. Karena $R(\theta,\delta_\pi)$ dan $R(\theta,\delta)$ keduanya kontinu, maka $R(\theta,\delta_\pi) - R(\theta,\delta)$ juga kontinu. Selanjutnya terdapat sebarang $\varepsilon > 0$ sehingga

$$R(\theta,\delta_\pi) - R(\theta,\delta) > \frac{v}{2}$$

untuk semua $\theta \in (\theta'-\varepsilon,\theta'+\varepsilon)$ dan $-\infty < B(\pi,\delta_\pi) < \infty$. Berdasarkan Definisi 30, maka

$$\begin{aligned} B(\pi,\delta_\pi) - B(\pi,\delta) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\theta,\delta_\pi)\pi(\theta)d\theta \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} R(\theta,\delta)\pi(\theta)d\theta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [R(\theta,\delta_\pi) - R(\theta,\delta)] \\ &\quad \pi(\theta)d\theta \\ &\ge \int_{\theta'-\varepsilon}^{\theta'+\varepsilon} [R(\theta,\delta_\pi) - R(\theta,\delta)] \\ &\quad \pi(\theta)d\theta \\ &\ge \frac{v}{2}\int_{\theta-\varepsilon}^{\theta+\varepsilon} \pi(\theta)d\theta \\ &> 0. \end{aligned}$$

Maka

$$B(\pi,\delta_\pi) - B(\pi,\delta) > 0$$

Pertidaksamaan di atas merupakan kontradiksi dari δ_π sebagai aturan Bayes terhadap π. Oleh karena itu δ_π aturan keputusan yang layak.

Jadi Teorema 5 terbukti. □

[Casella dan Berger, 1990]

Pada umumnya aturan Bayes adalah layak. Berdasarkan Teorema 4 maka aturan Bayes terdapat di kelas lengkap.

Pada aturan keputusan teracak juga terdapat pengelompokan aturan keputusan ke dalam kelas-kelas yang mengandung aturan-aturan keputusan teracak yang baik

Definisi 51 (Perbandingan Aturan Keputusan Teracak)

Misalkan δ_1^* dan δ_2^* adalah dua aturan keputusan teracak dengan masing-masing fungsi resiko $R(\theta,\delta_1^*)$ dan $R(\theta,\delta_2^*)$. Kita sebut aturan keputusan teracak :

(i) δ_1^* adalah tidak lebih jelek dari δ_2^* jika $R(\theta,\delta_1^*) \le R(\theta,\delta_2^*)$ untuk semua $\theta \in \Theta$.

(ii) δ_1^* lebih baik dari δ_2^* jika $R(\theta,\delta_1^*) \le R(\theta,\delta_2^*)$ untuk semua $\theta \in \Theta$ dan $R(\theta,\delta_1^*) < R(\theta,\delta_2^*)$ untuk suatu $\theta \in \Theta$.

(iii) δ_1^* ekuivalen dengan δ_2^* jika $R(\theta,\delta_1^*) = R(\theta,\delta_2^*)$ untuk semua $\theta \in \Theta$.

[Berger, 1985]

Definisi 52 (Kelayakan δ^*)

Aturan keputusan teracak δ_1^* disebut layak apabila tidak ada $\delta_2^* \in \mathcal{D}^*$ yang lebih baik dari δ_1^*. Aturan keputusan teracak δ_1^* disebut tidak layak apabila ada $\delta_2^* \in \mathcal{D}^*$ yang lebih baik dari δ_1^*.

[Berger, 1985]

Ilustrasi

Contoh 1

Misalkan terdapat suatu populasi dimana populasi tersebut berukuran n, yaitu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan setiap X_i memiliki sebaran dengan fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta},\ 0 < x < \theta,\ 0 \text{ selainnya.}$$

Fungsi kepekatan peluang ini masih bergantung pada parameter θ yang nilainya belum diketahui, tetapi sebarannya diketahui, yaitu sebaran dengan fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$\pi(\theta)=\frac{\beta\alpha^{\beta}}{\theta^{\beta+1}},\ \alpha<\theta<\infty,\ 0 \text{ selainnya}$$

dengan $\alpha>0,\ \beta>0,$ yang selanjutnya kita sebut sebaran prior. Karena $0<x<\theta,$ maka untuk menduga θ akan dipilih penduga Bayes dengan data amatannya adalah statistik maksimum, yaitu statistik tataan ke-n, $X_{(n)}$. Diketahui fungsi kerugiannya adalah

$$L(\theta,\delta(x_{(n)}))=(\theta-\delta(x_{(n)}))^2.$$

Penyelesaian

Diketahui fungsi kerugian yang diberikan adalah

$$L(\theta,\delta(x_{(n)}))=(\theta-\delta(x_{(n)}))^2$$

Berdasarkan Teorema 2, maka penduga bayes yang digunakan adalah

$$\delta(x_{(n)})=\mathbf{E}(\theta|x_{(n)})$$
$$=\int_0^\infty \theta\pi(\theta|x_{(n)})d\theta.$$

Untuk mengetahui nilai harapan di atas, terlebih dahulu ditentukan sebaran $\pi(\theta|x_{(n)}),$ yaitu

$$\pi(\theta|x_{(n)})=\frac{g(x_{(n)},\theta)}{m(x_{(n)})}$$

$$\pi(\theta|x_{(n)})=\frac{g(x_{(n)}|\theta)\pi(\theta)}{m(x_{(n)})}.$$

Fungsi kepekatan peluang dari statistik tataan $X_{(n)}$ adalah

$$g(x_{(n)}|\theta)=\frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}(F(x_{(n)}|\theta))^{n-1}$$
$$(1-F(x_{(n)}|\theta))^{n-n}f(x_{(n)}|\theta).$$

[Hogg and Craig, 1995]

Dari fungsi kepekatan peluang peubah acak, maka

$$F(x_{(n)}|\theta)=\int_0^{x_{(n)}}\frac{1}{\theta}dx$$
$$=\left[\frac{x}{\theta}\right]_0^{x_{(n)}}$$
$$=\frac{x_{(n)}}{\theta}.$$

Maka

$$g(x_{(n)}|\theta)=\frac{(n-1)!n}{(n-1)!}\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{0}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$
$$=n\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$
$$=\left(\frac{n}{\theta}\right)\frac{(x_{(n)})^{n-1}}{\theta^{n-1}}$$
$$=\left(\frac{n}{\theta^n}\right)x_{(n)}{}^{n-1},$$

sehingga fungsi bersama statistik tataan, $X_{(n)}$, dan θ adalah

$$g(x_{(n)},\theta)=g(x_{(n)}|\theta)\pi(\theta)$$
$$=\left(\frac{n}{\theta^n}\right)x_{(n)}{}^{n-1}\left(\frac{\beta\alpha^{\beta}}{\theta^{\beta+1}}\right)$$
$$=\frac{nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}.$$

Sedangkan fungsi $m(x_{(n)})$ dapat ditentukan sebagai berikut

(i) untuk $x_{(n)}<\alpha$

$$m(x_{(n)})=\int_{-\infty}^{\infty}g(x_{(n)},\theta)d\theta$$
$$=\int_{\alpha}^{\infty}\frac{nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}d\theta$$
$$=nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{\theta^{n+\beta+1}}d\theta$$
$$=nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}\int_{\alpha}^{\infty}\theta^{-n-\beta-1}d\theta$$
$$=nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}\left(\frac{1}{-n-\beta}\left[\theta^{-n-\beta}\right]_{\alpha}^{\infty}\right)$$
$$=\frac{nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}}{-n-\beta}(-\alpha^{-n-\beta})$$
$$=\frac{nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{\beta}\alpha^{-n-\beta}}{n+\beta}$$
$$=\frac{nx_{(n)}{}^{n-1}\beta\alpha^{-n}}{n+\beta}.$$

Maka fungsi $\pi(\theta|x_{(n)})$ adalah sebagai berikut

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{\dfrac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}}{\dfrac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{-n}}{n+\beta}}$$

$$= \left(\frac{\alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}\right)\left(\frac{n+\beta}{\alpha^{-n}}\right)$$

$$= \frac{(n+\beta)\alpha^{n+\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}.$$

Dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$ dapat dicari penduga Bayes dengan fungsi kerugian

$$L(\theta, \delta(x_{(n)})) = (\theta - \delta(x_{(n)}))^2$$

yaitu

$$\delta(x_{(n)}) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\theta(n+\beta)\alpha^{n+\beta}}{\theta^{n+\beta+1}} d\theta$$

$$= (n+\beta)\alpha^{n+\beta} \int_{\alpha}^{\infty} \theta^{-n-\beta} d\theta$$

$$= (n+\beta)\alpha^{n+\beta}$$

$$\left(\frac{1}{-n-\beta+1}\left[\theta^{-n-\beta+1}\right]_{\alpha}^{\infty}\right)$$

$$= \frac{(n+\beta)\alpha^{n+\beta}}{-n-\beta+1}(-\alpha^{-n-\beta+1})$$

$$= \frac{(n+\beta)\alpha^{n+\beta}}{n+\beta-1}(\alpha^{-n-\beta+1})$$

$$= \frac{(n+\beta)\alpha}{n+\beta-1}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \frac{(n+\beta)\alpha}{n+\beta-1}. \qquad (20)$$

(ii) untuk $x_{(n)} > \alpha$, maka

$$m(x_{(n)}) = \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}} d\theta$$

$$= n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta} \int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta^{-n-\beta-1} d\theta$$

$$= n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta} \left(\frac{1}{-n-\beta}\left[\theta^{-n-\beta}\right]_{x_{(n)}}^{\infty}\right)$$

$$= \frac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta}}{-n-\beta}(-x_{(n)}^{\;-n-\beta})$$

$$= \frac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta}}{n+\beta}(x_{(n)}^{\;-n-\beta})$$

$$= \frac{n x_{(n)}^{\;-\beta-1} \beta \alpha^{\beta}}{n+\beta}.$$

Maka fungsi $\pi(\theta|x_{(n)})$ adalah sebagai berikut

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{\dfrac{n x_{(n)}^{\;n-1} \beta \alpha^{\beta}}{\theta^{n+\beta+1}}}{\dfrac{n x_{(n)}^{\;-\beta-1} \beta \alpha^{\beta}}{n+\beta}}$$

$$= \left(\frac{x_{(n)}^{\;n-1}}{\theta^{n+\beta+1}}\right)\left(\frac{n+\beta}{x_{(n)}^{\;-\beta-1}}\right)$$

$$= \frac{x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta)}{\theta^{n+\beta+1}}.$$

Dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$ dapat dicari penduga Bayes dengan fungsi kerugian

$$L(\theta, \delta(x_{(n)})) = (\theta - \delta(x_{(n)}))^2$$

yaitu

$$\delta(x_{(n)}) = \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{\theta x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta)}{\theta^{n+\beta+1}} d\theta$$

$$= x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta) \int_{x_{(n)}}^{\infty} \theta^{-n-\beta} d\theta$$

$$= x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta)$$

$$\left(\frac{1}{-n-\beta+1}\left[\theta^{-n-\beta+1}\right]_{x_{(x)}}^{\infty}\right)$$

$$= \frac{x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta)}{-n-\beta+1}(-x_{(n)}^{\;-n-\beta+1})$$

$$= \frac{x_{(n)}^{\;n+\beta}(n+\beta)}{n+\beta-1}(x_{(n)}^{\;-n-\beta+1})$$

$$= \frac{x_{(n)}(n+\beta)}{n+\beta-1}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \frac{x_{(n)}(n+\beta)}{n+\beta-1}. \tag{21}$$

Dari persamaan (20) dan (21), maka

$$\delta(x_{(n)}) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(n+\beta}{n+\beta+1}, & x_{(n)} < \alpha \\ \dfrac{x_{(n)}(n+\beta)}{n+\beta+1}, & x_{(n)} > \alpha \end{cases}.$$

Contoh 2

Misalkan terdapat suatu populasi dimana populasi tersebut berukuran n, yaitu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan setiap X_i memiliki sebaran dengan fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\theta},\ 0 < x < \theta,\ 0 \text{ selainnya.}$$

Fungsi kepekatan peluang ini masih bergantung pada parameter θ yang nilainya belum diketahui, tetapi sebarannya diketahui, yaitu sebaran dengan fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$\pi(\theta) = \frac{2}{\theta^3},\ 1 < \theta < \infty,\ 0 \text{ selainnya,}$$

yang selanjutnya kita sebut sebaran prior. Karena $0 < x < \theta$, maka untuk menduga θ akan dipilih penduga Bayes dengan data amatannya adalah statistik maksimum, yaitu statistik tataan ke-n, $X_{(n)}$. Misalkan fungsi kerugiannya adalah

$$L(\theta, \delta(x_{(n)})) = \left|\theta - \delta(x_{(n)})\right|.$$

Penyelesaian

Diketahui fungsi kerugian yang diberikan adalah

$$L(\theta, \delta(x_{(n)})) = \left|\theta - \delta(y_{(n)})\right|$$

Berdasarkan Teorema 2, maka penduga bayes yang digunakan adalah

$$\delta(x_{(n)}) = \text{median dari } \pi(\theta|x_{(n)}).$$

Untuk mengetahui mediannya, terlebih dahulu ditentukan sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$, yaitu

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{g(x_{(n)}, \theta)}{m(x_{(n)})}$$

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{g(x_{(n)}|\theta)\pi(\theta)}{m(x_{(n)})}.$$

Fungsi kepekatan peluang dari statistik tataan $X_{(n)}$ adalah

$$g(x_{(n)}|\theta) = \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}(F(x_{(n)}|\theta))^{n-1} (1 - F(x_{(n)}|\theta))^{n-n} f(x_{(n)}|\theta).$$

[Hogg and Craig, 1995]

Dari fungsi kepekatan peluang peubah acak, maka

$$\begin{aligned} F(x_{(n)}|\theta) &= \int_0^{x_{(n)}} \frac{1}{\theta}\,dx \\ &= \left[\frac{x}{\theta}\right]_0^{x_{(n)}} \\ &= \frac{x_{(n)}}{\theta}. \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned} g(x_{(n)}|\theta) &= \frac{(n-1)!\,n}{(n-1)!}\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}\left(1 - \frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{0}\left(\frac{1}{\theta}\right) \\ &= n\left(\frac{x_{(n)}}{\theta}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{\theta}\right) \\ &= \left(\frac{n}{\theta}\right)\frac{(x_{(n)})^{n-1}}{\theta^{n-1}} \\ &= \left(\frac{n}{\theta^n}\right)x_{(n)}{}^{n-1}, \end{aligned}$$

sehingga fungsi bersama statistik tataan ke-n, $X_{(n)}$, dan θ adalah

$$\begin{aligned} g(x_{(n)}, \theta) &= g(x_{(n)}|\theta)\pi(\theta) \\ &= \left(\frac{n}{\theta^n}\right)x_{(n)}{}^{n-1}\left(\frac{2}{\theta^3}\right) \\ &= \frac{2n}{\theta^{n+3}}\,x_{(n)}{}^{n-1}. \end{aligned}$$

Sedangkan fungsi $m(x_{(n)})$ dapat ditentukan sebagai berikut

(i) untuk $x_{(n)} < 1$

$$\begin{aligned} m(x_{(n)}) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(x_{(n)}, \theta)\,d\theta \\ &= \int_1^{\infty} \frac{2n}{\theta^{n+3}}\,x_{(n)}{}^{n-1}\,d\theta \\ &= 2nx_{(n)}{}^{n-1}\int_1^{\infty}\theta^{-n-3}\,d\theta \end{aligned}$$

$$= 2nx_{(n)}^{\;n-1}\left(\frac{1}{-n-2}\left[\theta^{-n-2}\right]_1^\infty\right)$$
$$= \frac{2nx_{(n)}^{\;n-1}}{-n-2}(-1^{-n-2})$$
$$= \frac{2n}{n+2}x_{(n)}^{\;n-1}.$$

Maka fungsi $\pi(\theta|x_{(n)})$ adalah sebagai berikut

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{\frac{2n}{\theta^{n+3}}x_{(n)}^{\;n-1}}{\frac{2n}{n+2}x_{(n)}^{\;n-1}}$$
$$= \frac{n+2}{\theta^{n+3}}.$$

Misalkan m adalah median dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$. Maka dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$ dapat dicari penduga Bayes dengan fungsi kerugian

$$L(\theta,\delta(x_{(n)})) = |\theta-\delta(x_{(n)})|$$

yaitu

$$\int_1^m \frac{n+2}{\theta^{n+3}}d\theta = \frac{1}{2}$$
$$n+2\int_1^m \theta^{-n-3}d\theta = \frac{1}{2}$$
$$n+2\left(\frac{1}{-n-2}\left[\theta^{-n-2}\right]_1^m\right) = \frac{1}{2}$$
$$\frac{n+2}{-n-2}(m^{-n-2}-1^{-n-2}) = \frac{1}{2}$$
$$m^{-n-2}-1^{-n-2} = -\frac{1}{2}$$
$$m^{-n-2} = \frac{1}{2}$$
$$m = \sqrt[n+2]{2}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \sqrt[n+2]{2}. \qquad (22)$$

(ii) untuk $x_{(n)} > 1$

$$m(x_{(n)}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x_{(n)},\theta)d\theta$$
$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty} \frac{2n}{\theta^{n+3}}x_{(n)}^{\;n-1}d\theta$$
$$= 2nx_{(n)}^{\;n-1}\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-n-3}d\theta$$
$$= 2nx_{(n)}^{\;n-1}\left(\frac{1}{-n-2}\left[\theta^{-n-2}\right]_{x_{(n)}}^\infty\right)$$
$$= \frac{2nx_{(n)}^{\;n-1}}{-n-2}(-x_{(n)}^{\;-n-2})$$
$$= \frac{2nx_{(n)}^{\;n-1}}{n+2}(x_{(n)}^{\;-n-2})$$
$$= \frac{2n}{n+2}x_{(n)}^{\;-3}.$$

Maka fungsi $\pi(\theta|x_{(n)})$ adalah sebagai berikut

$$\pi(\theta|x_{(n)}) = \frac{\frac{2n}{\theta^{n+3}}x_{(n)}^{\;n-1}}{\frac{2n}{n+2}x_{(n)}^{\;-3}}$$
$$= \left(\frac{n+2}{\theta^{n+3}}\right)x_{(n)}^{\;n+2}.$$

Misalkan m adalah median dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$. Maka dari sebaran $\pi(\theta|x_{(n)})$ dapat dicari penduga Bayes dengan fungsi kerugian

$$L(\theta,\delta(x_{(n)})) = |\theta-\delta(x_{(n)})|$$

yaitu

$$\int_{x_{(n)}}^m \frac{n+2}{\theta^{n+3}}x_{(n)}^{\;n+2}d\theta = \frac{1}{2}$$
$$(n+2)x_{(n)}^{\;n+2}\int_{x_{(n)}}^m \theta^{-n-3}d\theta = \frac{1}{2}$$
$$(n+2)x_{(n)}^{\;n+2}\left(\frac{1}{-n-2}\left[\theta^{-n-2}\right]_{x_{(n)}}^m\right) = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{n+2}{-n-2}\right)x_{(n)}^{\;n+2}(m^{-n-2}-x_{(n)}^{\;-n-2}) = \frac{1}{2}$$
$$x_{(n)}^{\;n+2}(m^{-n-2}-x_{(n)}^{\;-n-2}) = -\frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{x_{(n)}}{m}\right)^{n+2} = \frac{1}{2}$$

$$m = \sqrt[n+2]{2}\,x_{(n)}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \sqrt[n+2]{2}\,x_{(n)}. \qquad (23)$$

Dari persamaan (22) dan (23), maka

$$\delta(x_{(n)}) = \begin{cases} \sqrt[n+2]{2}, & x_{(n)} < 1 \\ \sqrt[n+2]{2}\,x_{(n)}, & x_{(n)} > 1 \end{cases}.$$

Contoh 3

Akan ditunjukkan bahwa penduga Bayes, $\delta(x_{(n)})$, untuk θ pada Contoh 2 dengan fungsi kerugian

$$L(\theta, \delta(x_{(n)})) = (\theta - \delta(x_{(n)}))^2,$$

adalah penduga yang layak dan termasuk dalam kelas lengkap.

Penyelesaian

Dengan fungsi kerugian *squared error loss*, maka

(i) untuk $x_{(n)} < 1$

$$\begin{aligned}
\delta(x_{(n)}) &= \mathrm{E}[\theta | x_{(n)}] \\
&= \int_1^\infty \theta \left(\frac{n+2}{\theta^{n+3}} \right) d\theta \\
&= n+2 \int_1^\infty \theta^{-n-2}\, d\theta \\
&= n+2 \left(\frac{1}{-n-1} \left[\theta^{-n-1} \right]_1^\infty \right) \\
&= \frac{n+2}{-n-1}(-1^{-n-1}) \\
&= \frac{n+2}{n+1},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \frac{n+2}{n+1}. \qquad (24)$$

(ii) untuk $x_{(n)} > 1$

$$\begin{aligned}
\delta(x_{(n)}) &= \mathrm{E}[\theta | x_{(n)}] \\
&= \int_{x_{(n)}}^\infty \theta \left(\frac{n+2}{\theta^{n+3}} \right) x_{(n)}{}^{n+2}\, d\theta \\
&= (n+2) x_{(n)}{}^{n+2} \int_{x_{(n)}}^\infty \theta^{-n-2}\, d\theta \\
&= (n+2) x_{(n)}{}^{n+2} \left(\frac{1}{-n-1} \left[\theta^{-n-1} \right]_{x_{(n)}}^\infty \right) \\
&= \left(\frac{n+2}{-n-1} \right) x_{(n)}{}^{n+2} (-x_{(n)}{}^{-n-1}) \\
&= \frac{n+2}{n+1} x_{(n)},
\end{aligned}$$

sehingga

$$\delta(x_{(n)}) = \frac{n+2}{n+1} x_{(n)}. \qquad (25)$$

Dari persamaan (24) dan (25), maka

$$\delta(x_{(n)}) = \begin{cases} \dfrac{n+2}{n+1}, & x_{(n)} < 1 \\ \dfrac{n+2}{n+1} x_{(n)}, & x_{(n)} > 1 \end{cases}.$$

Fungsi resiko Bayesnya adalah

(i) untuk $x_{(n)} < 1$

$$\begin{aligned}
B(\pi, \delta(x_{(n)})) &= \int_{-\infty}^\infty R(\theta, \delta(x_{(n)}))\pi(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty L(\theta, \delta(x_{(n)})) g(x_{(n)} | \theta) \\
&\quad dx_{(n)} \pi(\theta)\, d\theta \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty L(\theta, \delta(x_{(n)})) g(x_{(n)} | \theta) \\
&\quad \pi(\theta)\, dx_{(n)}\, d\theta \\
&= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty L(\theta, \delta(x_{(n)})) g(x_{(n)}, \theta)\, dx_{(n)}\, d\theta \\
&= \int_1^\infty \int_0^\theta \left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right)^2 \left(\frac{2n}{\theta^{n+3}} \right) \\
&\quad x_{(n)}{}^{n-1}\, dx_{(n)}\, d\theta \\
&= \int_1^\infty \left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right)^2 \left(\frac{2n}{\theta^{n+3}} \right) \\
&\quad \int_0^\theta x_{(n)}{}^{n-1}\, dx_{(n)}\, d\theta \\
&= \int_1^\infty \left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1} \right) \right)^2 \left(\frac{2n}{\theta^{n+3}} \right) \\
&\quad \left(\frac{1}{n} \left[x_{(n)} \right]_0^\theta \right) d\theta
\end{aligned}$$

$$= \int_1^{\infty}\left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right)^2\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\frac{1}{n}\right)\theta^n d\theta$$

$$= \int_1^{\infty}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{2}{\theta^3}\right)d\theta$$

$$= \int_1^{\infty}\left(\frac{2}{\theta} - \frac{4}{\theta^2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \frac{2}{\theta^3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\right)d\theta$$

$$= \int_1^{\infty}\frac{2}{\theta}d\theta - \int_1^{\infty}\frac{4}{\theta^2}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)d\theta +$$

$$\int_1^{\infty}\frac{2}{\theta^3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 d\theta$$

$$= 2\int_1^{\infty}\theta^{-1}d\theta - 4\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\int_1^{\infty}\theta^{-2}d\theta +$$

$$2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\int_1^{\infty}\theta^{-3}d\theta$$

$$= 2[\ln\theta]_1^{\infty} - 4\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{-1}[\theta^{-1}]_1^{\infty}\right) +$$

$$2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{-2}\left[\theta^{-2}\right]_1^{\infty}\right)$$

$$= 2[-\ln 1] - 4\left(\frac{n+2}{n+1}\right)(1^{-1}) +$$

$$2\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{2}(1^{-2})\right)$$

$$= -2\ln 1 - 4\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$$

$$= -4\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$$

sehingga

$$B(\pi, \delta(x_{(n)})) = -4\left(\frac{n+2}{n+1}\right) + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2,$$

dan

$-\infty < B(\pi, \delta(y_4)) < \infty.$

(ii) untuk $x_{(n)} > 1$

$$B(\pi, \delta(x_{(n)})) = \int_{\infty}^{\infty} R(\theta, \delta(x_{(n)}))\pi(\theta)d\theta$$

$$= \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} L(\theta, \delta(x_{(n)}))g(x_{(n)}|\theta)$$

$$dx_{(n)}\pi(\theta)d\theta$$

$$= \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} L(\theta, \delta(x_{(n)}))g(x_{(n)}|\theta)$$

$$\pi(\theta)dx_{(n)}d\theta$$

$$= \int_{\infty}^{\infty}\int_{\infty}^{\infty} L(\theta, \delta(x_{(n)}))g(x_{(n)}, \theta)dx_{(n)}d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\int_0^{\theta}\left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)x_{(n)}\right)^2\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)$$

$$x_{(n)}{}^{n-1}dx_{(n)}d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\int_0^{\theta}\left(\theta - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)x_{(n)}\right)^2$$

$$x_{(n)}{}^{n-1}dx_{(n)}d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\int_0^{\theta}\left(\theta^2 x_{(n)}{}^{n-1} - 2\theta\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right.$$

$$\left. x_{(n)}{}^{n} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2 x_{(n)}{}^{n+1}\right)dx_{(n)}d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\int_0^{\theta}\theta^2 x_{(n)}{}^{n-1}dx_{(n)} - \int_0^{\theta}2\theta\right.$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)x_{(n)}{}^{n}dx_{(n)} + \int_0^{\theta}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$$

$$\left. x_{(n)}{}^{n+1}dx_{(n)}\right)d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\theta^2\int_0^{\theta}x_{(n)}{}^{n-1}dx_{(n)} - 2\theta\right.$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\int_0^{\theta}x_{(n)}{}^{n}dx_{(n)} + \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$$

$$\left.\int_0^{\theta}x_{(n)}{}^{n+1}dx_{(n)}\right)d\theta$$

$$= \int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\theta^2\left(\frac{1}{n}\left[x_{(n)}{}^{n}\right]_0^{\theta}\right) - 2\theta\right.$$

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\left(\frac{1}{n+1}\left[x_{(n)}{}^{n+1}\right]_0^{\theta}\right)+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$$
$$\left.\left(\frac{1}{n+2}\left[x_{(n)}{}^{n+2}\right]_0^{\theta}\right)\right)d\theta$$

$$=\int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\left(\frac{\theta^2}{n}\right)\theta^n-\left(\frac{2\theta}{n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right.$$
$$\left.\theta^{n+1}+\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2\left(\frac{1}{n+2}\right)\theta^{n+2}\right)d\theta$$

$$=\int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2n}{\theta^{n+3}}\right)\left(\left(\frac{1}{n}\right)\theta^{n+2}-2\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)\right.$$
$$\left.\theta^{n+2}+\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)\theta^{n+2}\right)d\theta$$

$$=\int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2}{\theta}\right)-\left(\frac{4n}{\theta}\right)\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)$$
$$\left.\left(\frac{2n}{\theta}\right)\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)\right)d\theta$$

$$=\int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{2}{\theta}\right)-\left(\frac{2n}{\theta}\right)\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)d\theta$$

$$=\int_{x_{(n)}}^{\infty}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(2-2n\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)\right)d\theta$$

$$=\left(2-2n\left(\frac{n+2}{(n+1)^2}\right)\right)\int_{x_{(n)}}^{\infty}\theta^{-1}d\theta$$

$$=\left(\left(\frac{2(n^2+2n+1)-2n(n+2)}{(n+1)^2}\right)\right)\left[\ln\theta\right]_{x_{(n)}}^{\infty}$$

$$=\left(\frac{2}{(n+1)^2}\right)\left[-\ln x_{(n)}\right]$$

Karena $1 < x_{(n)} < \infty$, maka

$-\infty < B(\pi, \delta(x_{(n)})) < \infty.$

Dari bagian (i) dan (ii) dengan aturan keputusan

$$\delta(x_{(n)})=\begin{cases}\dfrac{n+2}{n+1}, & x_{(n)}<1\\ \dfrac{n+2}{n+1}x_{(n)}, & x_{(n)}>1\end{cases}$$

adalah penduga atau aturan Bayes dan

$$-\infty < B(\pi, \delta(x_{(n)})) < \infty,$$

maka $\delta(x_{(n)})$ adalah aturan keputusan yang layak. Aturan keputusan yang telah didapat sebelumnya, yaitu

$$\delta(x_{(n)})=\begin{cases}\dfrac{n+2}{n+1}, & x_{(n)}<1\\ \dfrac{n+2}{n+1}x_{(n)}, & x_{(n)}>1\end{cases}$$

adalah aturan Bayes atau penduga Bayes. Berdasarkan Teorema 4 maka $\delta(x_{(n)})$ terdapat di kelas lengkap C.

Contoh 4

Misalkan terdapat suatu populasi dimana populasi tersebut berukuran n, yaitu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dan setiap X_i memiliki sebaran dengan fungsi kepekatan peluangnya adalah

$$f(x|\theta)=\frac{1}{\theta},\ 0<x<\theta,\ 0 \text{ selainnya.}$$

Misalkan $\widetilde{X}$ adalah median dari data amatan dan $\overline{X}$ adalah rataan dari data amatan yang merupakan statistik cukup untuk θ. Kita akan menunjukkan bahwa terdapat suatu aturan keputusan teracak, δ_1^*, yang bergantung hanya pada statistik cukup dimana $R(\theta, \delta_1^*(t,\cdot))$ ekuivalen dengan $R(\theta, \delta_0^*(\underline{x},\cdot))$ dan $\delta_0^* = \widetilde{x}$ adalah sembarang aturan keputusan teracak.

Penyelesaian

Berdasarkan Teorema 3 maka akan terdapat suatu aturan keputusan teracak, δ_1^*, yang bergantung hanya pada statistik cukup dimana $R(\theta, \delta_1^*)$ ekuivalen dengan $R(\theta, \delta_0^*)$ dan δ_0^* adalah sembarang aturan keputusan teracak. Diketahui X_i menyebar seragam, maka nilai median dan rataan dari sebaran X_i adalah sama sehingga

$$\begin{aligned}R(\theta, \delta_0^*(\underline{x},\cdot)) &= R(\theta, \widetilde{x})\\ &= R(\theta, \bar{x}).\end{aligned}$$

Diketahui $\overline{X}$ merupakan statistik cukup untuk θ sehingga

$$R(\theta, \bar{x}) = R(\theta, \delta_1^*(t, \cdot)).$$

Dapat disimpulkan bahwa $\bar{x}$ merupakan aturan keputusan teracak yang bergantung hanya pada statistik cukup $R(\theta, \delta_1^*)$ ekuivalen dengan $R(\theta, \delta_0^*)$.

KESIMPULAN

Pada tulisan ini dikaji aturan keputusan Bayes pada pendugaan titik dan analisis kelayakannya. Aturan keputusan Bayes merupakan aturan keputusan yang menggunakan beberapa informasi terkait, yaitu sebaran prior dan sebaran posterior. Selain itu juga menggunakan fungsi kerugian, fungsi resiko, dan fungsi resiko Bayes dalam menentukan aturan keputusan Bayes. Aturan Bayes berbeda-beda untuk setiap fungsi kerugian. Di antaranya, untuk *squared error loss* aturan Bayesnya adalah nilai harapan dari sebaran posterior dan untuk *absolute error loss* aturan Bayesnya adalah median dari sebaran posterior.

Aturan keputusan yang dikaji adalah aturan keputusan teracak dan tak teracak. Aturan keputusan tak teracak merupakan kasus khusus dari aturan keputusan teracak. Aturan keputusan teracak yang diukur dengan fungsi resiko dapat ditentukan berdasarkan suatu statistik cukup.

Aturan keputusan yang layak dengan fungsi resiko sebagai ukuran kualitas adalah aturan keputusan dengan fungsi resiko terkecil. Sedangkan untuk resiko Bayes sebagai ukuran kualitas, aturan keputusan yang layak adalah aturan keputusan dengan fungsi resiko Bayes terkecil. Aturan Bayes dengan fungsi resiko Bayes yang bernilai terhingga merupakan aturan keputusan yang layak. Aturan-aturan keputusan yang layak terdapat dalam kelas lengkap.

DAFTAR PUSTAKA

Barizi, et al. 1996. *Kamus Matematika : Statistika.* Pusat Pembinaan dan Pengembangan Bahasa Depdikbud. Jakarta

Berger, J.O. 1985. *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis.* Ed. Ke-2. Springer-Verlag New York, Inc. New York.

Casella, G. dan **R.L. Berger**. 1990. *Statistical Inference*. Wadsworth, Inc. Belmont 94002. California.

Goldberg, R.R. 1976. *Methods of Real Analysis.* Ed. Ke-2. John Wiley and Sons. New York

Grimmett, G.R. dan **D.R. Stirzaker**. 1992. *Probability and Random Processes.* Ed. Ke-2. Clarendon Press. Oxford.

Hogg, R.V. dan **A.T. Craig**. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics.* Ed. Ke-5. Prentic Hall. New Jersey 07632.

Rice, J.A. 1995. *Mathematical Statistics and Data Analysis.* Ed. Ke-2. Wadsworth, Inc. Belmont 94002. California.

Ross, S.M. 2000. *Introduction to Probability Models.* Ed. Ke-7. Academic Press. San Diego.

Yeh, R.Z. *Modern Probability Theory.* 1973. Harper & Row, Publishers. New York.