

**KONFIGURASI TITIK
DALAM RUANG
KAJIAN TEORETIS, SIMULASI
DAN KASUS**

**DEPARTEMEN STATISTIKA
INSTITUT PERTANIAN
BOGOR
2013**

ISBN 978-979-19256-2-4



KATA PENGANTAR

Kehidupan manusia maupun makhluk hidup lainnya bertebaran di muka bumi dan akan membentuk suatu pola. Konfigurasi pola sebaran makhluk hidup di muka bumi didasarkan pada kepentingan makhluk hidup tersebut untuk mempertahankan kehidupannya agar langgeng.

Pola konfigurasi makhluk hidup di muka bumi pada dasarnya ada tiga macam, yakni pola acak atau random, pola sistematis dan pola cluster. Pola cluster terbentuk apabila makhluk hidup dari luar konfigurasi makin tertarik untuk masuk dalam konfigurasi apabila jumlah makhluk hidup dalam konfigurasi makin banyak. Seperti kejadian bertemunya manusia dalam acara pameran, makin banyak yang berkumpul dalam pameran maka manusia lainnya akan makin tertarik untuk ikut berkumpul meskipun kondisinya berdesak-desakan. Contoh lain, makin banyaknya perumahan yang dibangun pada lahan-lahan subur. Makin banyak orang yang bertempat tinggal di wilayah tersebut maka makin banyak manusia memperebutkan meskipun harganya cukup mahal.

Pola reguler terbentuk apabila ada pengaturan daya muat makhluk hidup dalam konfigurasi tersebut. Dengan demikian ada suatu fungsi yang membatasi penggunaan ruang dalam konfigurasi tersebut. Makin banyak makhluk hidup dalam konfigurasi ruang makin menurun makhluk hidup di luar konfigurasi untuk menempati ruang konfigurasi tersebut. Terbentuknya pola konfigurasi yang bersifat reguler umumnya ada intervensi kebijakan yang memberikan batasan penggunaan makhluk hidup dalam ruang. Contoh kejadian yang cukup nyata adalah penggunaan ruang yang disesuaikan dengan Rencana Tata Ruang Wilayah yang telah ditetapkan pemerintah. Pola konfigurasi yang bersifat reguler dibentuk pada umumnya untuk mencapai tingkat optimalitas penggunaan ruang yang maksimum.

Sedangkan pola konfigurasi yang bersifat acak umumnya terbentuk secara alamiah karena kepentingan masing-masing makhluk untuk menempati konfigurasinya. Ketertarikan makhluk hidup ikut dalam konfigurasi tidak tergantung pada individu lain yang telah ada dalam konfigurasi. Kondisi pola konfigurasi yang bersifat acak apabila sumberdaya alam untuk keberlangsungan makhluk hidup dalam ruang masih tidak terbatas. Apabila kondisinya sudah terbatas maka pada umumnya akan bergeser ke arah pola reguler. Sedangkan geseran ke arah pola cluster akan terbentuk apabila adanya insentif kepada makhluk hidup untuk menempatinnya.

Pola-pola konfigurasi titik dalam ruang ini penting untuk dikaji secara cermat dalam rangka kebijakan yang akan mengatur konfigurasi agar mahluk yang menempatnya mendapatkan kenyamanan yang optimal. Teknik pendeteksian pola konfigurasi titik dalam ruang ini dikaji dalam buku ini.

Hal yang perlu dibicarakan dalam konfigurasi titik dalam ruang adalah bagaimana konfigurasi dapat terbentuk dalam ruang bila jenis mahluk hidup yang menempati ruang adalah berbeda. Sebagai misal adalah bagaimana konfigurasi penjahat dengan polisi dalam ruang. Tentunya penempatan polisi dalam konfigurasi akan meningkat apabila makin banyak penjahat dalam ruang tersebut. Namun tidak berlaku sebaliknya. Penjahat akan menurun ketertarikannya untuk menempati konfigurasi dalam ruang apabila banyak polisi telah ada dalam konfigurasi ruang tersebut. Ada hubungan keberadaan kedua jenis mahluk hidup tersebut dalam ruang, namun sifatnya bisa positif bisa juga negatif tergantung dari mana pandangan kita bertolak.

Contoh kasus yang lain adalah sebaran konfigurasi dua jenis mahluk hidup dalam ruang antara manusia yang terkena penyakit tenggorokan dengan penyakit paru-paru. Konfigurasi sebaran manusia yang terkena penyakit tenggorokan dengan penyakit paru-paru tersebut terbentuk bukan disebabkan keberadaan antar jenis penyakit tersebut, namun disebabkan oleh faktor eksternal, misalkan adanya pabrik-pabrik yang ada di sekitar keberadaan manusia yang mengidap penyakit tersebut. Hal ini berbeda dengan sebaran dalam ruang pada manusia yang terkena penyakit kolera dengan sebaran dalam ruang pada keberadaan tempat pembuangan sampah akhir (TPA). Kita mungkin menduga bahwa sebaran tempat pembuangan sampah akhir menjadi penyebab keberadaan sebaran dalam ruangan manusia yang terkena penyakit. Bagaimana hal ini bisa diukur?. Dalam buku ini akan dicoba dikaji secara teoritis dan diberikan contoh-contoh perhitungan statistiknya agar dapat dimanfaatkan oleh pengguna secara maksimal. Pengembangan lebih lanjut adalah pendeteksian konfigurasi dalam ruang dari beberapa (lebih dari dua) jenis mahluk hidup dalam ruang. Pertanyaan mendasar pada kajian ini adalah jenis mahluk hidup apa yang menjadi pelopor untuk menempati ruang tertentu. Dalam buku ini akan dikaji dan diberikan contoh statistik ukur untuk lebih dari dua jenis mahluk hidup dalam ruang.

Buku ini berisi studi baik yang bersifat teori, simulasi maupun kasus-kasus. Buku ini dituliskan agar mampu memberikan ide-ide dasar bagi pembaca agar mampu menyelesaikan atau membahas topik-topik tentang sebaran titik

dalam ruang dua dimensi, tiga dimensi (spasial), baik satu tipe titik maupun banyak tipe titik.

Penulis

Muhammad Nur Aidi

2013

DAFTAR ISI

BAB 1.	DETEKSI POLA SEBARAN TTTIK SPASIAL SECARA REGULER MELALUI PENELUSURAN FUNGSI MASSA PELUANG, METODE KUADRAN DAN TETANGGA TERDEKAT	1-1
	MUHAMMAD NUR AIDI Disampaikan dalam Seminar Nasional Sain II di IPB-Bogor 14 November 2009 ISBN : 978-979-95093-5-2	
	RINGKASAN	
1.1	Pendahuluan	1-1
1.2	Tinjauan Pustaka	1-2
1.3	Metode	1-3
1.4	Hasil dan Pembahasan	1-3
1.5	Kesimpulan	1-9
1.6	Daftar Pustaka	1-9
BAB 2.	PERBANDINGAN DETEKSI POLA SEBARAN TTTIK SPASIAL SECARA ACAK DENGAN METODE KUADRAN DAN TETANGGA TERDEKAT	2-1
	MUHAMMAD NUR AIDI Disampaikan dalam Seminar Nasional Statistika ke 9 SNS IX di Kampus ITS Sukolilo Surabaya	
	RINGKASAN	2-1
1.1	Pendahuluan	2-1
1.2	Tinjauan Pustaka	2-2
2.3	Metode	2-3
2.4	Hasil dan Pembahasan	2-4
2.5	Kesimpulan	2-9
2.6	Daftar Pustaka	2-9
BAB 3..	FUNGSI MASSA PELUANG PADA POLA TTTIK SPASIAL KELOMPOK SERTA FUNGSI STATISTIK VMR TERHADAP PERUBAHAN UKURAN KUADRAN	3-1
	MUHAMMAD NUR AIDI Diterbitkan di Forum Statistika dan Komputasi Vol 14 No.1 April 2009, ISSN :0853-8115	
	RINGKASAN	3-1
3.1.	Pendahuluan	3-2
3.2	Tinjauan Pustaka	3-2

3.3.	Metode Penelitian	3-4
3.4.	Hasil dan Pembahasan	3-4
3.5.	Kesimpulan	3-10
3.6.	Daftar Pustaka	3-10
BAB 4.	PENGERTIAN DAN STATISTIK UKUR MUHAMMAD NUR AIDI	4-1
4.1.	Pengertian	4-1
4.2.	Contoh Perhitungan	4-5
4.3.	Kelemahan Metode Kuadran	4-10
4.4.	Uji Keباikan Suai Khi-Kuadrat	4-11
4.5.	Metode Tetangga Terdekat	4-13
4.6.	Daftar Pustaka	4-15
BAB 5	FUNDAMENTAL DISTRIBUSI PELUANG MUHAMMAD NUR AIDI	5-1
5.1.	Pendahuluan	5-1
5.2	Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok	5-1
5.3	Dispersi Spasial Acak/Random : Distribusi Poisson	5-2
5.4.	Dispersi Spasial Regular: Distribusi Binomial	5-4
5.5.	Dispersi Spasial Kelompok : Distribusi Binomial Negatif	5-5
5.6.	Daftar Pustaka	5-7
BAB 6.	PENDUGAAN PARAMETER MUHAMMAD NUR AIDI	6-1
6.1.	Pendahuluan	6-1
6.2.	Penduga Momen	6-2
6.3.	Penduga Maksimum Likelihood	6-3
6.4.	Sebaran Poisson	6-4
6.5	Sebaran Binomial	6-5
6.6.	Sebaran Binomial Negatif	6-7
6.7	Sebaran Neyman Type A	6-11
6.8.	Sebaran Poisson-Binomial	6-13
6.9.	Sebaran Poisson-Binomial Negatif	6-19
6.10.	Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran	6-24
6.11.	Contoh Kasus	6-25
6.12,	Daftar Pustaka	6-30
BAB 7	DISTRIBUSI <i>COMPOUND</i> DAN <i>GENERALIZED</i> SPASIAL MUHAMMAD NUR AIDI	7-1
7.1.	Pendahuluan	7-1
7.2.	Definisi dan Notasi	7-1
7.3	Sebaran <i>Compound</i> Poisson	7-3

7.4.	Sebaran <i>Generalized</i> Poisson	7-5
7.5.	Sebaran <i>Compound</i> dan <i>Generalized</i> lainnya	7-7
7.6.	Contoh Kasus	7-9
7.7.	Daftar Pustaka	7-11
BAB 8	SEBARAN DUA TITIK ATAU LEBIH MUHAMMAD NUR AIDI	8-1
8.1.	Metode Kuadran	8-4
8.2.	Metode Silang Tetangga Terdekat	8-7
8.3.	Kasus Anak Kekurang Gizi dengan Ibu Kekurangan Gizi	8-10
8.4.	Daftar Pustaka	8-13
BAB 9	ASOSIASI ANTARA BEBERAPA HIMPUNAN TITIK DALAM RUANG (STUDI KASUS) AMAN ABADI, DESI KURNIA, DWI NABILAH LESTARI, LILI PUSPITA RAHAYU, VIARTI EMINITA, TIA FITRIA SAUMI, TUTI PURWANINGSIH, LENI MARLENA, SHIDDIG ARDHI IRAWAN, NURUL RAHMAWATI, MARTA SUNDARI, FITRIA MUDIA SARI, MUHAMMAD JAJULI, CHARLES MONGI, DWI YUNITASARI, FITRIAH ULFAH, RIFAN KURNIA, DAN MUHAMMAD NUR AIDI	9-1
9.1.	Tujuan	9-2
9.2.	Data	9-2
9.3.	Metodologi	9-3
9.5.	Proses Perhitungan	9-4
9.6.	Hasil	9-22
9.7.	Kesimpulan	9-23
9.8.	Daftar Pustaka	9-24

DAFTAR GAMBAR

1.1	Kuadran dari Reguler Sempurna, Pola Acak Titik dan Pola Titik Bergerombol Sempurna	1-2
1.2.	Posisi Titik Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Binomial	1-6
1.3.	Sekatan Wilayah Sebaran Titik Spasial	1-8
2.1.	Pola Titik secara Spasial	2.2
2.2.	Kuadran dari Reguler Sempurna, Pola Acak Titik dan Pola Titik Bergerombol Sempurna	2-3
2.3.	Posisi Titik Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Poisson	2-6
2.4.	Sekatan Wilayah Sebaran Titik Spasial	2-7
3.1.	Sebaran Titik Spasial Kelompok dengan Ukuran Gridnya	3-8
3.2.	Pola Hubungan antara Banyaknya Grid dengan Nilai VMR pada Sebaran Spasial Kelompok	3-9
3.3.	Ploting Hasil Regresi dengan Data Pengamatan VMR	3-9
4.1.	Kuadran dari Sebaran Titik pada Reguler Sempurna, Pola Acak dan Pola Gerombol Sempurna	4-3
4.2	Konfigurasi Penderita Aidi di 10 Wilayah	4-6
4.3.	Konfigurasi Kedua Penderita Aidi di 10 Wilayah	4-7
4.4.	Konfigurasi Ketiga Penderita Aidi di 10 Wilayah	4-8
4.5.	Konfigurasi Keberadaan Pabrik Penghasil Limbah B3 di 36 Kecamatan di Banten	4-10
4.6.	Dua Konfigurasi yang Berbeda, Hasil Perhitungan Kuadran Sama	4-11
6.1.	Efisiensi dari Metode Penduga Momen k untuk Sebaran Binomial Negatif	6-10
7.1.	Konfigurasi Titik Kerawanan Kecelakaan	7-10
8.1.	Sebaran Lokasi Penduduk Terkena Kolera dan Sumber Air	8-1
8.2.	Sebaran Penduduk Terkena Kanker Paru dan Kanker Tenggorokan	8-2
8.3.	Sebaran Dua Himpunan Titik	8.4.
8.4.	Proses Perhitungan Jarak dengan Metode Silang Tetangga Terdekat	8-7
9.1.	Diagram Seleksi Spesies Berdasarkan Keberadaan Tempat Tinggalnya	9-19
9.3.	Diagram Seleksi Daerah Berdasarkan Keberadaan Jenis Spesiesnya	9-20
9.4.	Diagram Alur Kedekatan Spesies antara Spesies dengan Habitatnya	9-21

DAFTAR TABEL

1.1.	Posisi Titik (X,Y) Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Binomial	1-6
1.2.	Hasil Analisis Kuadran	1-8
2.1.	Posisi Titik (X,Y) Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Poisson	2-7
2.2.	Hasil Analisis Kuadran	2-8
3.1.	Hubungan antara Ukuran Kuadran, Rata-Rata, Ragam dan VMR	3-8
6.1.	Efisiensi Penduga Parameter untuk Metode Momen dan Maksimum Likelihood	6-10
6.2.	Observasi dan Sebaran Kuadran Harapan dari Simulasi Sebaran Momen dan Kemungkinan Maksimum dari Model Poisson dan Binomial	6-18
6.3.	Perbandingan Hasil Sebaran Frekuensi Observasi Menggunakan Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran	6-24
6.4.	Perbandingan untuk Pendugaan Parameter yang Dihasilkan oleh Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran	6-24
6.5.	Banyaknya Kotak yang Berisi Jumlah Pasar di Wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi	6-26
6.6.	Perbandingan Uji Khi-Kuadrat untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan alpha 3 %	6-27
6.7.	Perbandingan Uji Khi-Kuadrat untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan alpha 5 %	6-28
6.8.	Frekuensi Harapan dari Sebaran Poisson Rumah Sakit di DKI Jakarta	6-29
6.9.	Frekuensi Harapan dari Sebaran Binomial Rumah Sakit di DKI Jakarta	6-30
7.1.	Perhitungan Sebaran Poisson dan Binomial	7-10
8.1.	Sebaran Jumlah Ibu dan Anak yang Kekurangan Gizi	8-10
9.1.	Keberadaan Spesies Burung dari 20 Daerah yang Berbeda	9-2
9.2.	Bentuk Relasi Spesies A dan B	9-4
9.3.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah untuk Semua Spesies	9-5
9.4.	Kelompok Daerah dengan Spesies F di dalamnya	9-5
9.5.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F di dalamnya	9-6
9.6.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Tidak Ada Spesies F di dalamnya	9-7
9.7.	Nilai Khi- Kuadrat Daerah dengan Spesies F dan D di dalamnya	9-7
9.8.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F di dalamnya namun Tidak Terdapat Spesies D	9-8

9.9.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Tidak Ada Spesies F Namun Terdapat Spesies A di dalamnya	9-9
9.10.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Tidak Ada Spesies F dan Tidak ada Spesies A di dalamnya	9-9
9.11.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F, D, dan E di dalamnya	9-10
9.12.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F dan D namun Tanpa Spesies E di dalamnya	9-11
9.13.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F namun Terdapat Spesies A dan E didalamnya	9-11
9.14.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F dan E namun Terdapat Spesies A di dalamnya	9-12
9.15.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F dan A namun Terdapat Spesies D dan G di dalamnya	9-13
9.16.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F, A, D, dan G di dalamnya	9-13
9.17.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D, E dan G di dalamnya	9-14
9.18.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D, E, dan Tanpa Spesies G di dalamnya	9-14
9.19.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F namun Terdapat Spesies A, C, E dan G di dalamnya	9-15
9.20.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F, C, dan G namun Terdapat Spesies A dan E di dalamnya	9-15
9.21.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F dan E namun Terdapat Spesies A dan G di dalamnya	9-16
9.22.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F dan E namun Terdapat Spesies A dan G di dalamnya	9-16
9.23.	Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D, E, dan H namun Tidak Terdapat Spesies G di dalamnya	9-17
9.24.	Nilai Khi –Kuadrar Daerah Spesies F, D, dan E namun Tidak Terdapat Spesies G dan H didalamnya	9-18

BAB 1

DETEKSI POLA SEBARAN TITIK SPASIAL SECARA REGULER MELALUI PENELUSURAN FUNGSI MASSA PELUANG, METODE KUADRAN DAN TETANGGA TERDEKAT

MUHAMMAD NUR AIDI*

(*Dosen Statistika IPB)

Disampaikan Dalam Seminar Nasional Sain II di IPB-Bogor

14 November 2009

ISBN : 978-979-95093-5-2

RINGKASAN

Realisasi fenomena pada bidang spasial pada umumnya ditunjukkan dengan pola titik pada bidang spasial tersebut. Oleh karena itu deteksi pola sebaran titik spasial cukup penting diketahui. Untuk itu dilakukan deteksi pola titik spasial dengan metode Kuadran dan Tetangga Terdekat. Pola titik spasial yang dilakukan pengaturan untuk efisiensi ruang biasanya mengikuti pola reguler. Oleh karena itu pengetahuan tentang sebaran peluang yang melandasi pola titik spasial yang diakibatkan proses reguler perlu diketahui. Hasil menunjukkan bahwa Titik spasial yang menyebar secara reguler ternyata mempunyai sebaran massa peluang Binomial. Titik spasial menyebar secara reguler akan mempunyai nilai VMR kurang dari satu karena nilai $VMR=1-p$ dimana $p \geq 0$. Sebaran titik spasial yang dibangkitkan dengan mengikuti sebaran massa peluang binomial tetap merupakan sebaran titik yang reguler dan tidak dipengaruhi oleh banyaknya sekatan yang diberikan pada metode Kuadran. Hasil yang sama ditunjukkan dengan metode Tetangga Terdekat.

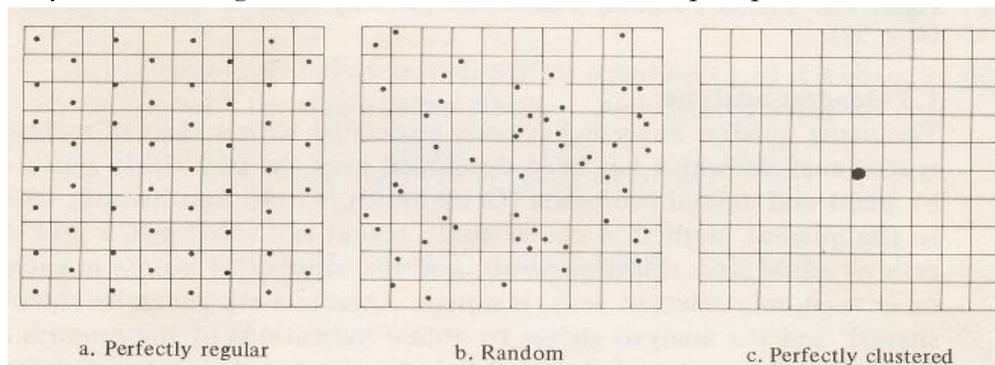
1.1. Pendahuluan

Realisasi fenomena pada bidang spasial pada umumnya ditunjukkan dengan pola titik pada bidang spasial tersebut. Pola titik pada bidang spasial secara ekstrim ada tiga macam, yakni pola titik pada bidang spasial yang dibangkitkan oleh proses pengelompokan, proses acak dan proses reguler (teratur). Sebaran titik spasial yang dibangkitkan oleh proses pengelompokan akan menghasilkan pola titik yang mengelompok, misalkan titik-titik yang mewakili orang-orang yang menyukai musik dangdut maka mereka akan mendatangi ke suatu lokasi yang telah disediakan music dangdut. Sebaran titik spasial yang dibangkitkan oleh proses reguler atau keteraturan akan

menghasilkan pola titik spasial yang teratur pula (regular). Pola titik yang teratur sering dijumpai pada pola perumahan-perumahan yang modern, pola pertokoan yang sering mengikuti arah jalan dan lain-lain. Pola titik yang teratur secara spasial timbul biasanya diakibatkan oleh intervensi kebijakan atau peraturan yang ada. Dengan pola titik yang teratur akan memudahkan manajemen pengelolaan suatu wilayah. Oleh karena itu sangatlah penting mengetahui bagaimana pola titik spasial yang teratur tersebut dibangkitkan. Untuk itu pengetahuan tentang sebaran peluang titik secara spasial yang membangkitkan pola teratur (regular) perlu diketahui. Selanjutnya bagaimana ukuran pola titik spasial dikatakan teratur perlu diketahui melalui dua teknik utama yang metode Kuadran dan Metode Tetangga Terdekat. Apakah pengukuran yang dilakukan dengan dua metode tersebut menghasilkan keputusan yang sama ?.

1.2. Tinjauan Pustaka

Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak. Kuadran umumnya berbentuk segi empat. Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau clustered atau random atau tidak random. *Regular point process* adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik. *Clustered point process* adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai banyak titik. Penengah dari dua hal diatas adalah *random point process*.



Gambar 1-1. Kuadran dari Regular Sempurna, Pola Acak Titik dan Pola Titik Bergerombol Sempurna

Uji yang dikembangkan dengan menggunakan statistik Khi-Kuadrat yakni dengan menghitung perbedaan frekuensi observasi pada kuadran dengan distribusi frekuensi pada fungsi peluang tertentu. Jika nilai Khi-kuadrat hitung lebih kecil dari Khi-kuadrat table maka diputuskan bahwa distribusi mengikuti sebaran peluang tertentu dan sebaran titik spatial secara acak, atau regular atau kelompok (John Silk, 1979) dan (A. Rogers, 1974)

Analisis tetangga terdekat merupakan suatu metode dimana jarak sembarang ke tetangga terdekat dalam suatu pola acak M titik. Teknik perhitungan didasarkan pada perbandingan antara rata-rata jarak tetangga terdekat, \bar{d} , hasil perhitungan dengan nilai harapan rata-rata jarak tetangga terdekat, δ , yang diturunkan dari asumsi bahwa pola titik dibangkitkan dari proses acak dan bebas (John Silk, 1979).

1.3. Metode

Ada tiga metode yang dilakukan dalam penelitian ini yakni : a) Metode Matematika untuk mencari fungsi massa peluang sebaran titik secara teratur dalam ruang, b) Membangkitkan titik-titik dalam ruang (dua dimensi) secara teratur dengan menggunakan Software R yang mempunyai sebaran peluang tertentu, pilihan nilai parameter dalam fungsi massa peluang dilakukan secara *arbitrer*, c). Melakukan deteksi pola titik dalam ruang dengan Metode Kuadran dan Metode Tetangga Terdekat serta membandingkan hasilnya.

1.4. Hasil dan Pembahasan

1.4.1. Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok (*Cluster*).

Bayangkan suatu wilayah studi yang di grid dengan sel berbentuk segi empat. Asumsikan pada saat awal ($t=0$) tidak ada sel yang berisi sembarang titik, dan $p(r,t)$ adalah peluang sebuah sel grid mempunyai r titik selama waktu t . Asumsi : selama selang waktu ($t, t+dt$) sebuah titik menempati sebuah sel tertentu dimana telah mempunyai r titik dengan peluang $f(r,t) dt$ dan bahwa selang waktu tersebut adalah cukup pendek untuk tidak lebih dari satu titik untuk menempati satu sel yang diberikan pada selang waktu tersebut.

$$p(0, t+dt) = p(0,t) [1-f(0,t) dt]$$

$$p(r, t+dt) = p(r,t) [1-f(r,t) dt] + p(r-1, t) f(r-1, t) dt \text{ dimana } r=1,2,3,\dots$$

dan kiri-kanan dikurangi $p(r,t)$ dan dibagi dengan dt dalam limit $dt \rightarrow 0$, maka

$$d/dt p(0, t) = -f(0, t) p(0, t) \rightarrow (1)$$

$$d/dt p(r, t) = -f(r, t) p(r, t) + f(r-1, t) p(r-1, t) \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$



(2)



(3)

Persamaan (1) dikalikan dengan s^0 , persamaan (2) dikalikan s dan persamaan (3) dikalikan dengan s^2 dan secara umum s^{n-1} ke n .

$$\text{Penjumlahan : } \frac{d}{dt} [\sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r] = (s-1) [\sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r]$$

Dan lebih kompak

$$d/dt G(s; t) = (s-1) L(s; t)$$

dimana $G(s; t) = [\sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r]$ adalah peluang fungsi momen dengan peubah r dan

$$L(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r$$

Untuk menemukan $G(s; t)$ kita harus memecahkan persamaan diferensial pada $d/dt G(s; t) = (s-1) L(s; t)$. Hasil distribusi apakah acak, regular atau kelompok tergantung pada asumsi yang dibuat pada $f(r, t)$. Catatan $f(r, t)$ adalah sebuah peluang dan satu kesatuan dengan nilai r .

Perlu ditekankan peluang bahwa sebuah sel dengan r titik telah didapatkan dan satu titik lagi masuk pada selang waktu $(t, t+dt)$. Jika peluang ini adalah independen terhadap titik-titik yang ada dalam sel, maka dikenal sebagai *random dispersion*. Pada sisi lain peluang ini menurun pada saat jumlah titik dalam sel meningkat didefinisikan sebagai disperse *spasial yang regular*. Terakhir, jika peluang meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah titik yang ada dalam sel dikenal sebagai *disperse spasial "Cluster"*.

1.4.2. Dispersi Spasial Reguler : Distribusi Binomial

Asumsi :

Peluang bahwa sebuah titik menempati ke dalam sebuah sel adalah independen terhadap waktu dan peluangnya menurun secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

Secara khusus, katakanlah c/b adalah integer dan $f(r, t) = c - br$ untuk $c > br >= 0$ dan $f(r, t) = 0$ selainnya

Maka

$$\begin{aligned} L(s;t) &= \sum_{r=0}^{\infty} (c - br) p(r, t) s^r \\ &= c \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r - b \sum_{r=0}^{\infty} (r) p(r, t) s^r \quad (2) \\ &= c G(s;t) - bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t) \end{aligned}$$

Maka persamaan $\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$ menjadi

$$\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) [c G(s;t) - bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t)]$$

Dengan solusinya :

$$G(s;t) = \{ \exp(-bt) - [\exp(-bt)-1]s \}^{c/b}$$

Dengan demikian untuk sembarang titik dalam \vec{t} waktu kita dapat mensubstitusikan $p = 1 - \exp(-b \vec{t})$ dan $n=c/b$

Untuk mendapatkan

$$G(s;t) = G(s) = (1-p+ps)^n \quad (3)$$

Persamaan (3) merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial

$$p(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad r=0, 1, 2, \dots, n$$

Untuk *check* apakah persamaan di atas fungsi pembangkit momen dari binomial

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} s^r \\ &= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} (ps)^r (1-p)^{n-r} = (1-p+ps)^n \end{aligned}$$

Turunan dari

$$G'(s) = n p (1-p+ps)^{(n-1)}, \quad G'(1) = np (1) = np$$

$$E(r) = G'(1) = np, \quad G''(s) = np(n-1)p(1-p+ps)^{n-2}, \quad G''(1) = n(n-1) p^2$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(r) &= m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 \\ &= np(1-p) \end{aligned}$$

$$\text{Perhatikan} \quad : \quad \frac{\text{var}(r)}{\bar{x}} = \frac{np(1-p)}{np} = 1 - p$$

Yang mana lebih kecil dari 1.

Bila n besar dan p kecil, maka, jika $n \rightarrow \infty$ dan $p \rightarrow 0$ maka $np = \lambda$. Dengan demikian sebaran Poisson cukup rasional sebagai pendekatan sebaran Binomial.

Bukti :

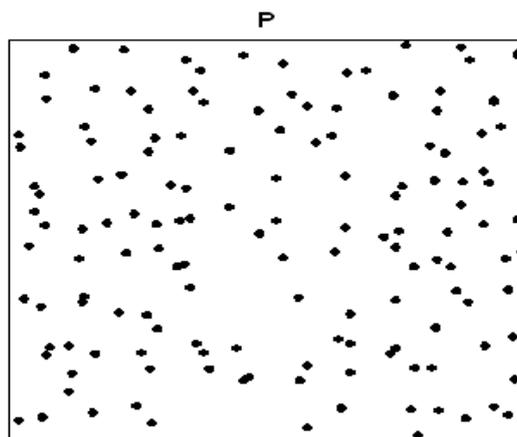
$$G(s) = (1-p+ps)^n$$

Jika jika $n \rightarrow \infty$ dan $p \rightarrow 0$ dan $np = \lambda$ adalah fix $(1-p+ps)^n \left[1 - \frac{\lambda(1-s)}{n}\right]^n$

$$\text{dan } \lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\lambda(1-s)}{n}\right]^n = \exp [\lambda(s - 1)]$$

1.4.3. Membangkitkan Sebaran Titik dalam Ruang yang Mengikuti Distribusi Binomial

Dengan menggunakan $p=0,7$ maka sebaran titik dalam ruang disajikan pada Gambar 1.2 dan Tabel 1.1. Berikut :



Gambar 1.2. Posisi Titik Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Binomial

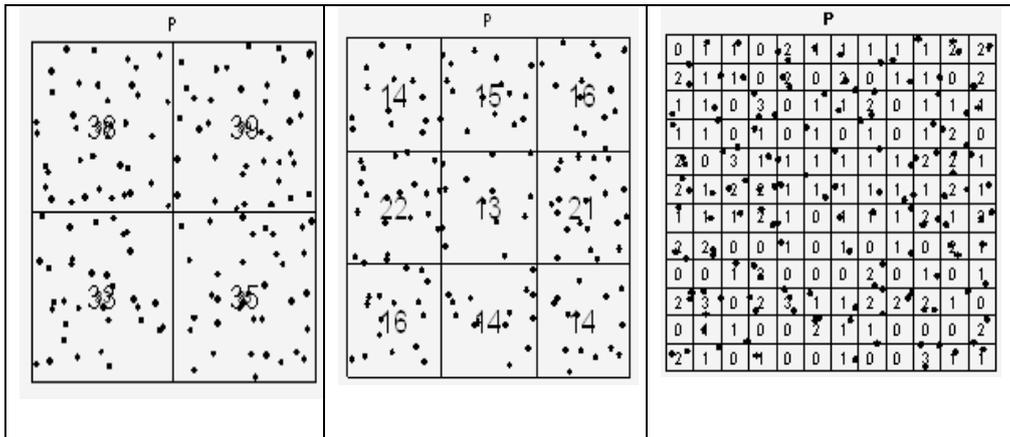
Tabel 1.1. Posisi Titik (X, Y) Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Binomial

	X	Y		X	Y		X	Y		X	Y		X	Y
1	0,674	9,122	30	0,179	7,645	59	9,131	6,726	88	8,240	4,531	117	7,463	2,338
2	1,212	9,795	31	0,188	7,317	60	0,679	5,383	89	8,511	4,348	118	8,221	2,848
3	2,184	9,765	32	1,574	7,480	61	0,493	5,737	90	9,880	4,714	119	9,153	2,392
4	3,679	9,240	33	1,445	7,833	62	1,869	5,448	91	9,563	4,549	120	9,697	2,621
5	3,392	9,491	34	2,690	7,206	63	1,392	5,298	92	0,604	3,352	121	1,202	1,711

6	4,508	9,599	35	2,783	7,559	64	2,834	5,402	93	0,282	3,560	122	1,140	1,252
7	5,291	9,397	36	3,296	7,620	65	2,382	5,673	94	1,424	3,608	123	2,705	1,822
8	6,884	9,235	37	4,251	7,242	66	3,495	5,543	95	1,385	3,462	124	3,842	1,810
9	6,505	9,177	38	5,896	7,430	67	3,277	5,489	96	2,643	3,160	125	4,631	1,609
10	7,659	9,863	39	5,214	7,766	68	4,209	5,841	97	2,101	3,220	126	4,510	1,514
11	8,698	9,824	40	6,227	7,599	69	4,823	5,185	98	3,489	3,854	127	5,588	1,513
12	8,879	9,485	41	8,106	7,345	70	5,131	5,492	99	5,554	3,597	128	5,726	1,895
13	9,832	9,679	42	8,393	7,169	71	6,469	5,326	100	6,563	3,187	129	6,563	1,725
14	9,792	9,619	43	9,119	7,668	72	7,221	5,109	101	7,436	3,530	130	7,825	1,827
15	0,714	8,533	44	9,470	7,849	73	7,517	5,253	102	8,837	3,461	131	8,136	1,833
16	1,640	8,771	45	0,572	6,141	74	8,461	5,210	103	8,630	3,763	132	9,739	1,552
17	2,345	8,712	46	0,474	6,358	75	8,721	5,883	104	9,634	3,795	133	0,162	0,541
18	2,695	8,275	47	1,704	6,519	76	9,128	5,403	105	0,756	2,349	134	0,617	0,609
19	3,541	8,734	48	2,129	6,645	77	9,800	5,534	106	0,705	2,149	135	1,585	0,717
20	3,733	8,438	49	2,162	6,626	78	0,377	4,865	107	1,132	2,396	136	2,727	0,466
21	4,800	8,248	50	3,382	6,311	79	1,333	4,564	108	1,647	2,181	137	2,439	0,899
22	5,746	8,349	51	3,123	6,371	80	2,251	4,687	109	2,528	2,198	138	5,741	0,356
23	5,463	8,642	52	5,143	6,552	81	2,888	4,815	110	2,859	2,819	139	6,405	0,855
24	6,308	8,306	53	6,480	6,606	82	3,368	4,406	111	3,587	2,441	140	7,748	0,801
25	7,390	8,608	54	7,558	6,357	83	3,213	4,345	112	3,746	2,216	141	7,877	0,155
26	8,244	8,245	55	7,462	6,125	84	5,284	4,576	113	4,363	2,317	142	8,783	0,596
27	8,294	8,734	56	8,726	6,469	85	6,284	4,712	114	6,340	2,555	143	8,291	0,778
28	9,342	8,436	57	8,199	6,484	86	7,458	4,842	115	6,564	2,455	144	9,337	0,880
29	9,328	8,491	58	9,237	6,445	87	7,803	4,360	116	7,334	2,171	145	9,618	0,668

1.4.4. Pola Titik dengan Metode Kuadran.

Daerah sebaran titik spasial dilakukan penyekatan. Ada beberapa tipe penyekatan, yakni : a. Empat sekatan, b. Sembilan sekatan, c. Enam belas sekatan, d. Dua puluh lima sekatan, e. Tiga puluh enam sekatan, f Empat puluh sembilan sekatan, g. enam puluh empat sekatan, h. delapan puluh satu sekatan, i. seratus sekatan, j. seratus dua puluh satu sekatan, k. seratus empat puluh empat sekatan. Sebagai ilustrasi sekatan disajikan pada Gambar 1.3 berikut :



Gambar 1.3. Sekatan Wilayah Sebaran Titik Spasial.

Tabel 1.2. Hasil Analisis Kuadran

	Banyaknya Sekat										
	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Mean	36.25	16.11	9.063	5.8	4.028	2.959	2.266	1.79	1.45	1.198	1.007
Var	7.583	10.36	2.996	2.667	2.028	1.832	1.468	0.843	0.412	0.877	0.65
VMR	0.209	0.643	0.331	0.46	0.503	0.619	0.648	0.471	0.284	0.732	0.646
Khi kuadrat-hit	0,81	3,801	0,392	8,428	6,877	6,09	4,911	3,23	0,048	0,006	0,138
Khi kuadrat-tbl	3,841	7,815	5,991	7,815	9,488	9,488	7,815	5,911	3,841	3,841	3,841
Terima		Ho	Ho	H1	Ho						

Dari Tabel 1.2. Di atas nampak bahwa χ^2 hitung pada sekatan 4, 9, 16, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144 masih lebih rendah dibandingkan χ^2 -tabel, yang berarti bahwa Terima Ho yakni Sebaran Titik Spasial mengikuti sebaran peluang Binomial atau sebaran titik spasial regular.

1.4.5. Pola Titik Dengan Tetangga Terdekat

Jarak antara titik dalam Gambar 1.3 pada matriks 145 x 145 kemudian ditentukan minimum jarak antar titik, yang selanjutnya dijumlahkan sehingga didapatkan $\sum d_{ij} = 67,2462$ dan $\bar{d} = \frac{\sum d_{ij}}{145} = 0,4638$. Selanjutnya ditentukan nilai $\delta = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$. Nilai λ menunjukkan kerapatan titik perunit area, yakni $\lambda = 145/144 = 1,00$. Dengan demikian, maka $\delta = 0.50$ dan nilai $R = \frac{\bar{d}}{\delta} = 0.9276$. Bilai $R=1$ maka titik spasial menyebar secara acak, $R < 1$ artinya $\bar{d} < \delta$ yang memberikan makna titik spasial menyebar mendekati proses pengelompokan, dan $R > 1$ artinya $\bar{d} > \delta$ yang memberikan makna titik spasial menyebar

mendekati proses dispersi. Namun demikian perlu dilakukan uji secara Z, dimana $Z = \frac{\bar{d} - \delta}{\sigma_{\bar{d}}}$. Dan $\bar{d} - \delta = 0,4638 - 0,5 = -0,0362$. Hipotesis yang dikembangkan adalah $H_0 : \delta = \delta^*$ (artinya titik menyebar secara regular) dan $H_1 : \delta \neq \delta^*$ (artinya menyebar bukan regular). Kita telah mempunyai $\sigma_{\bar{d}} = \frac{0,26136}{\sqrt{145 \times 0,7}} = 0,03100$. Maka nilai hitung adalah $Z = -0,0362 / 0,0310 = -1,168$. Nilai Z tabel dengan $\alpha = 10\%$, maka $Z_{tabel} = 1,96$ yang artinya terima H_0 yakni titik spasial menyebar secara regular.

1.5. Kesimpulan

1. Titik spasial yang menyebar secara regular ternyata mempunyai sebaran massa peluang binomial.
2. Titik spasial menyebar secara regular akan mempunyai nilai VMR kurang dari satu karena $VMR = 1 - p$, dimana $p >= 0$
3. Sebaran titik spasial yang dibangkitkan dengan mengikuti sebaran peluang Binomial tetap merupakan sebaran titik yang regular dan tidak dipengaruhi oleh banyaknya sekatan yang diberikan pada metode Kuadran
4. Hasil perhitungan dengan menggunakan Tetangga Terdekat juga menunjukkan bahwa sebaran titik spasial yang mempunyai fungsi massa peluang binomial merupakan sebaran titik secara regular.

1.6. Daftar Pustaka

1. A. Rogers. 1974. Statistical Analysis Of Spatial Dispersion. The Quadrat Method.
2. Edward H. Isaaks and R. Mohan Srivastava. 1989. Applied Geostatistics. New York.
3. John Silk. 1979. Statistical Concept in Geography. LONDON
4. **Muhammad Nur Aidi** : “ Parameter dalam Fungsi Spasial (Kasus Metode Kriging) “ Jurnal Sains dan Teknologi, Vol. 6 No. 1 Tahun 2000, Hlm. 42-48, (ISSN: 0853-733X)
5. **Muhamad Nur Aidi**, Bidawi Hasyim , WikantiAsri Ningrum , Nanik .S. Maryani Hastuti. : Some Polices and remote sensing applications related to soil erosion risk assessment. Regional Workshop on soil Erosion Risk Assessment Regional Workshop on Soil Erosion Risk Asement , 29-31, Oktober 2001 di Kuala Lumpur Malaysia

6. **Muhammad.Nur Aidi** , “ Water , Land , and Air Pollution Management : title The Relation Between Traffic Intensity and Lead Pollution in Elementary Scholl Student’s Blod and Hair in Jakarta “. 2002
7. **Muhamad Nur Aidi** : Project Of Asem Grant For Environmental Governance And Sustainable Cities Initiatives (IBRD-TF 053383). Ministry Of Environment Republic Of Indonesia. 2002
8. **Muhamad Nur Aidi** : Penggunaan Regresi Untuk Analisis Spasial. 2005
9. **Muhamad Nur Aidi** dan Megawati : Model Logit Untuk Analisis Spasial Penderita Brokhitis (Kasus Dichotomous). 2005
10. **Muhammad Nur Aidi**; Indra Saufitra . Perbaikan Metode Kriging Biasa (*Ordinary Kriging*) melalui Pemecahan Matriks S menjadi Beberapa Anak Matriks non overlap untuk mewakili Drift pada Peubah Spasial. Jurnal Sains MIPA, Desember 2008, Vol. 14, No. 3, Hal 175-190.
11. **Muhammad Nur Aidi**. “*Mapping AREAS OF Logging along Malaysia and Indonesia’s and border Kalimantan*”. Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
12. Swastika Andi DN,dan, **Muhammad Nur Aidi**. “Point Distribution of Women Perception about Husband Allowed Beat His Wife in Nanggoe Aceh Darussalam” Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 Jan 2009.
13. Mohammad Rosyid Fauzi, **Muhammad Nur Aidi**. Analisis Efektifitas Metode Kriging Dan Invers Distance Dalam Melakukan Pendugaan Data Hilang Secara Spasial Melalui Simulasi Interpolasi Terhadap Data Hasil Perolehan Suara PILKADA Jawa Barat Tahun 2008. Naskah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 Jan 2009.
14. Muhammad Nur Aidi.”**Penggunaan Rantai Markov untuk Analisis Spasial serta Modifikasinya dari Sistem Tertutup ke Sistem Terbuka** “ (Forum Statistika dan Komputasi Vol 13 No.1 April. 2008. ISSN 0853-8115 halaman 23-33)
15. Muhammad Masjkur, **Muhammad Nur Aidi** and Chichi Novianti. Ordinary Kriging and Inverse Distance Weighting for Mapping Phosphorus of Lowland Soil. 3th International Conference Mathematics and Statistics”. Kerjasama antara Moslem Society of Mathematics and Statistics in South East Asia & Bogor Agricultural University. Bogor, 5-6 Agustus 2008.

16. Ricardo A. Olea. 1974. Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory. Kansas Geological Survey.

BAB 2

**PERBANDINGAN DETEKSI POLA SEBARAN TITIK
SPASIAL SECARA ACAK DENGAN METODE KUADRAN
DAN TETANGGA TERDEKAT
MUHAMMAD NUR AIDI*
*Dosen Statistika IPB
Disampaikan dalam Seminar Nasional Statistika ke 9 SNS IX
Sabtu 7 November 2009
Gedung U Lantai 2 Kampus ITS Sukolilo Surabaya**

RINGKASAN

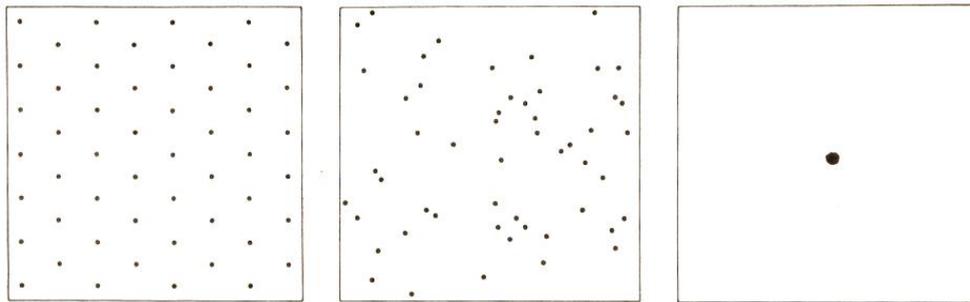
Distribusi titik secara spasial merupakan perwujudan fenomena dalam ruang. Pengetahuan tentang pola distribusi titik dalam ruang akan mempermudah mencari solusi penyebab pola-pola titik dalam ruang tersebut terwujud. Oleh karena itu deteksi pola sebaran titik spasial cukup penting diketahui. Untuk itu dilakukan deteksi pola titik spasial dengan metode Kuadran dan Tetangga Terdekat. Pola titik spasial secara alamiah umumnya secara acak. Oleh karena itu pengetahuan tentang sebaran peluang yang melandasi pola titik spasial yang diakibatkan proses acak perlu diketahui. Hasil menunjukkan bahwa Titik spasial yang menyebar secara acak ternyata mempunyai sebaran massa peluang Poisson. Titik spasial menyebar secara acak akan mempunyai nilai VMR mendekati satu karena nilai rata-rata dan ragamnya sama yakni sebesar λ . Sebaran titik spasial yang dibangkitkan dengan mengikuti sebaran peluang Poisson tetap merupakan sebaran titik yang acak dan tidak dipengaruhi oleh banyaknya sekatan yang diberikan pada metode Kuadran. Hasil yang sama ditunjukkan dengan metode Tetangga Terdekat.

1.1. Pendahuluan

Distribusi suatu fenomena dalam ruang ditunjukkan dengan pola titik dalam suatu ruang. Banyak kasus menunjukkan bahwa sebaran titik dalam ruang disebabkan oleh suatu proses tertentu. Dengan mempelajari pola titik dalam ruang kita akan dapat mengetahui secara tidak langsung sebab-sebab titik-titik tersebut berkonfigurasi dalam ruang tersebut. Hal ini dapat dilihat pada kasus : sebaran perumahan, sebaran outlet, sebaran spesies dalam ruang. Analisis pola titik berisi beberapa teknik analisis yang menjelaskan distribusi

spasial dari titik dengan melihat apakah pola titik adalah mengelompok, pola titik acak, atau pola titik teratur (regular).

Ada dua metode yang cukup berkembang untuk mengetahui pola titik dalam ruang yakni Metode Kuadran dan Metode Tetangga Terdekat. Masing-masing metode tersebut mempunyai kelemahan dan keunggulan, namun apakah hasil yang ditunjukkan sama?, Penelitian dilakukan melalui simulasi sebaran titik secara spasial yang dilakukan secara acak, kemudian dilakukan analisis baik dengan metode Kuadran maupun Metode Tetangga Terdekat. Apakah kedua metode ini menghasilkan keputusan yang sama (artinya tetap dinyatakan secara acak?). Sebaran titik secara spasial mengikuti suatu distribusi peluang tertentu. Untuk itu perlu dilakukan kajian Teoritis tentang sebaran peluang titik secara spasial yang dilakukan secara acak. Dalam studi ini dilakukan penjabaran matematika untuk mendapatkan fungsi sebaran peluang titik spasial acak tersebut tersebut.



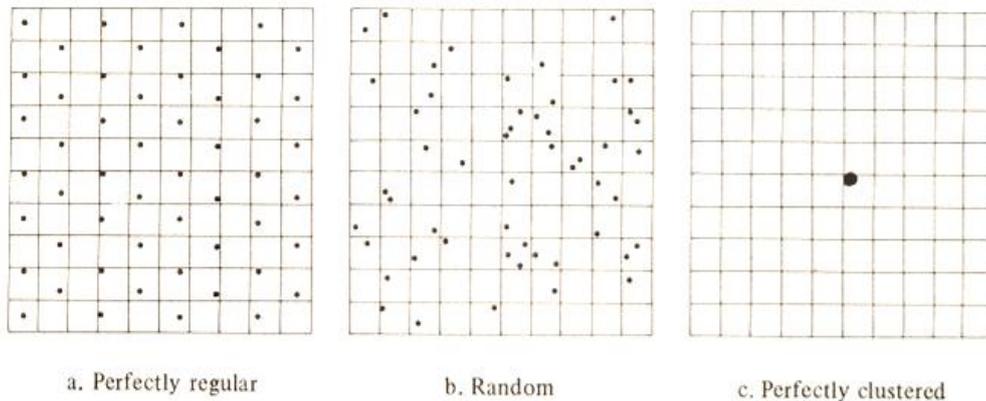
Pola Titik Sangat Regular Pola Titik Acak Pola Titik Sangat Mengelompok

Gambar 2.1. Pola Titik secara Spasial

2.2. Tinjauan Pustaka

Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak. Kuadran umumnya berbentuk segi empat. Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau clustered atau random atau tidak random. *Regular point process* adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik. *Clustered point process* adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai

banyak titik yang merupakan penengah dari dua hal diatas adalah *random point process*.



Gambar 2.2 Kuadran dari Regular Sempurna, Pola Acak Titik dan Pola Titik Bergerombol Sempurna

Uji yang dikembangkan dengan menggunakan statistik Khi-Kuadrat yakni dengan menghitung perbedaan frekuensi observasi pada kuadran dengan distribusi frekuensi pada fungsi peluang tertentu. Jika nilai Khi-kuadrat hitung lebih kecil dari Khi-kuadrat table maka diputuskan bahwa distribusi mengikuti sebaran peluang tertentu dan sebaran titik spatial secara acak, atau regular atau kelompok (John Silk, 1979) dan (A. Rogers, 1974)

Analisis tetangga terdekat merupakan suatu metode dimana jarak sembarang ke tetangga terdekat dalam suatu pola acak M titik. Teknik perhitungan didasarkan pada perbandingan antara rata-rata jarak tetangga terdekat, \bar{d} , hasil perhitungan dengan nilai harapan rata-rata jarak tetangga terdekat, δ , yang diturunkan dari asumsi bahwa pola titik dibangkitkan dari proses acak dan bebas (John Silk, 1979).

2.3. Metode

Ada tiga metode yang dilakukan dalam penelitian ini yakni : a) Metode Matematika untuk mencari fungsi massa peluang sebaran titik secara acak dalam ruang, yakni melalui asumsi sebuah sel menerima satu titik dalam selang waktu $(t, t+dt)$ adalah benar-benar independen (acak) dari sejumlah titik yang telah ada dalam sel dan hal ini setara dengan asumsi bahwa suatu titik mempunyai peluang berhasil sebesar p untuk menempati suatu posisi tertentu dan peluang $(1-p)=q$, apabila gagal menempati posisi tertentu dalam ruang dan ruang yang ditempati mendekati tidak terhingga b) Membangkitkan titik-titik

dalam ruang (dua dimensi) secara acak dengan menggunakan Software R yang mempunyai sebaran peluang tertentu, pilihan nilai parameter dalam fungsi massa peluang dilakukan secara *arbitrer*, c). Melakukan deteksi pola titik dalam ruang dengan Metode Kuadran dan Metode Tetangga Terdekat serta membandingkan hasilnya.

2.4. Hasil dan Pembahasan

2.4.1. Fungsi Massa Peluang Pola Titik secara Acak dalam Ruang

Untuk mendapatkan fungsi massa peluang sebaran titik secara acak dalam ruang kita selayaknya mengasumsikan bahwa peluang sebuah sel menerima satu titik dalam selang waktu $(t, t+dt)$ adalah benar-benar independen dari sejumlah titik yang telah ada dalam sel. Maka

$$f(r, t) = f(t)$$

$$L(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r = f(t) G(s; t)$$

Persamaan $d/dt G(s; t) = (s-1) L(s; t)$ menjadi $d/dt G(s; t) = (s-1) f(t) G(s; t)$ dan solusi

$$G(s; t) = \exp \left[(s-1) \int_0^t f(t') dt' \right]$$

Untuk sembarang titik dalam waktu \vec{t}

$$G(s; \vec{t}) = G(s) = \exp [\lambda(s - 1)] \quad (1)$$

$$\text{Dimana } \lambda = \int_0^{\vec{t}} f(t') dt'$$

Persamaan (1) adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson dengan parameter λ . Dengan demikian

$$p(r, \vec{t}) = p(r) = \exp(-\lambda) \frac{(\lambda)^r}{r!} \quad r=0, 1, 2, \dots$$

Untuk mengecek fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r$$

Maka

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} \exp(-\lambda) \frac{(\lambda)^r}{r!} s^r = \exp(-\lambda) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^r}{r!} \\ &= \exp(-\lambda) \exp(\lambda s) \\ &= \exp[\lambda(s - 1)] \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hubungan yang standar

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dengan hubungan yang telah dikenal

$$E[r] = m_1 = \frac{\partial}{\partial s} G(s)|_{s=1} = G'(1)$$

Dan

$$\text{Var}(r) = m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

Maka

$$G'(s) = \lambda \exp[\lambda(s-1)]$$

$$m_1 = G'(1) = \lambda \exp(0) = \lambda$$

$$G''(s) = (\lambda)^2 \exp[\lambda(s-1)]$$

$$G''(1) = (\lambda)^2$$

Maka

$$m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = (\lambda)^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$$

Pendekatan kedua adalah dengan asumsi bahwa Peluang sebuah sel berhasil mendapatkan sebuah titik adalah p , dan X adalah banyaknya sel yang menerima sebuah titik, maka peluang binomial adalah

$$P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

Katakan bahwa n adalah bilangan sangat besar dan mungkin tak terbatas, maka sel menjadi sangat kecil, dan umumnya hanya berisi satu titik, dan dapat ditunjukkan sebagai berikut :

$$P(X = r) = \binom{n}{r} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-r} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!}$$

$e=2.71828\dots$ dan persamaan di atas merupakan Sebaran Massa Peluang Poisson dimana nilai $\lambda = u/m$ dimana u =jumlah titik dan m adalah kuadran sehingga λ dapat diartikan kerapatan titik per satuan luas. Nilai harapan $r = E(r)$ adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} E(r) &= \sum_{r=0}^{\infty} r e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} r e^{-\lambda} \frac{\lambda(\lambda)^{r-1}}{r(r-1)!} \\ &= \lambda \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^{r-1}}{(r-1)!} = \lambda \end{aligned}$$

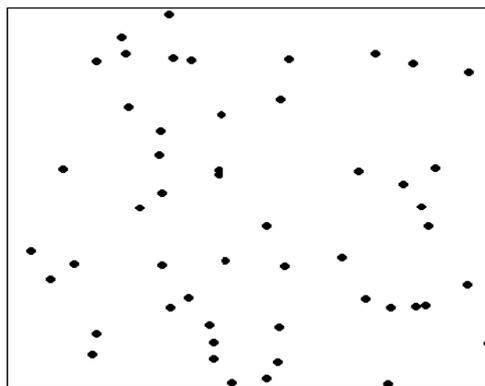
$$\begin{aligned}
E(r^2) &= \sum_{r=0}^{\infty} r^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} = \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} + \sum_{r=0}^{\infty} r e^{-\lambda} \frac{\lambda^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^2 (\lambda)^{r-2}}{(r)(r-1)(r-2)!} + \lambda \\
&= \lambda^2 \sum_{r=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda)^{r-2}}{(r-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda
\end{aligned}$$

$$Ragam(r) = E(r^2) - (E(r))^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Dari dua cara pendekatan di atas maka sebaran titik dalam spasial yang acak akan mengikuti sebaran Poisson. Bila kita menetapkan statistik VMR = ragam/rata-rata, maka distribusi poisson atau sebaran titik spasial secara acak mempunyai VMR =1. Apabila VMR makin menjauh dari 1 maka sebaran titik spasial akan menuju bukan acak..

2.4.2. Membangkitkan Sebaran Titik dalam Ruang yang Mengikuti Distribusi Poisson

Sudah dibuktikan di atas bahwa untuk mendapatkan sebaran titik spasial secara acak maka kita dapat membangkitkan titik spasial dengan mengikuti sebaran massa peluang Poisson. Dengan menggunakan lambda=0.5 maka sebaran titik dalam ruang yang mengikuti sebaran peluang Poisson disajikan pada Gambar 3 dan Tabel 1. Berikut :



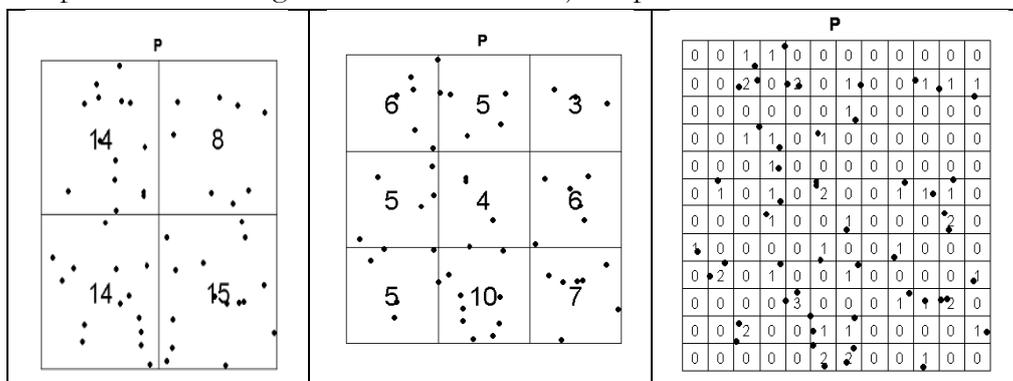
Gambar 2.3. Posisi Titik Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Poisson

Tabel 2.1. Posisi Titik (X, Y) Hasil Simulasi dengan Sebaran Peluang Poisson

	X	Y		X	Y		X	Y		X	Y		X	Y
1	2,34	9,24	11	3,32	9,83	21	3,39	8,70	31	8,66	4,28	41	5,34	0,27
2	1,81	8,62	12	2,43	8,80	22	5,62	7,61	32	4,48	3,36	42	7,57	8,82
3	2,48	7,41	13	4,41	7,22	23	4,34	5,64	33	7,86	2,13	43	8,79	5,81
4	3,13	6,77	14	3,10	6,15	24	8,50	4,78	34	5,60	1,61	44	6,88	3,45
5	1,14	5,78	15	3,17	5,14	25	3,18	3,25	35	5,56	0,69	45	8,41	2,17
6	2,72	4,77	16	5,34	4,27	26	3,70	2,38	36	5,78	8,68	46	7,81	0,13
7	0,49	3,60	17	1,38	3,27	27	4,22	1,21	37	7,21	5,72	47	8,35	8,55
8	0,89	2,87	18	3,34	2,11	28	4,23	0,78	38	5,71	3,20	48	8,13	5,39
9	1,82	1,45	19	4,12	1,68	29	3,76	8,64	39	7,37	2,36	49	8,60	2,19
10	1,72	0,89	20	4,61	0,17	30	4,34	5,74	40	9,87	1,17	50	9,47	8,34

2.4.3. Pola Titik dengan Metode Kuadran.

Daerah sebaran titik spasial dilakukan penyekatan. Ada beberapa tipe penyekatan, yakni : a. Empat sekatan, b. Sembilan sekatan, c. Enam belas sekatan, d. Dua puluh lima sekatan, e. Tiga puluh enam sekatan, f. Empat puluh sembilan sekatan, g. enam puluh empat sekatan, h. delapan puluh satu sekatan, i. seratus sekatan, j. seratus dua puluh satu sekatan, k. seratus empat puluh empat sekatan. Sebagai ilustrasi sekatan disajikan pada Gambar 2-4 berikut :



Gambar 2.4. Sekatan Wilayah Sebaran Titik Spasial.

Tabel 2. 2. Hasil Analisis Kuadran

	Banyaknya Sekat										
	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
Mean	12,75	5,67	3,19	2,04	1,42	1,04	0,80	0,63	0,51	0,42	0,35
Var	10,25	4,00	2,03	2,79	0,99	1,04	0,61	0,59	0,47	0,35	0,40
VMR	0,80	0,71	0,64	1,37	0,70	1,00	0,76	0,93	0,93	0,82	1,12
Khi-Hitung	2.545	3.866	6.186	2.100	2.096	7.643	2.569	0.196	2.906	2.323	2.152
Khi-table	3.841	9.488	9.488	9.488	9.488	7.815	5.991	5.991	5.991 _q	5.991	3.841
Terima	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho	Ho

Dari Tabel 2.2. Di atas Nampak bahwa Khi-kuadrat masih lebih rendah dibandingkan Khi-kuadrat-tabel, yang berarti bahwa Terima Ho yakni Sebaran Titik Spasial mengikuti sebaran peluang Poisson atau sebaran titik spasial secara acak. Demikian pula dari nilai VMR, dapat dikatakan bahwa tidak ada kecenderungan makin mengecil atau makin membesarnya nilai VMR. Nilai VMR berubah-ubah dan masih sekitar nilai satu. Hal ini menandakan bahwa untuk sebaran titik spasial tetap merupakan sebaran titik yang acak dan tidak dipengaruhi oleh banyaknya sekatan yang diberikan.

2.4.4. Pola Titik Dengan Tetangga Terdekat

Jarak antara titik dalam Gambar 2.3 pada matriks 51 x 51 kemudian ditentukan minimum jarak antar titik, yang selanjutnya dijumlahkan sehingga didapatkan $\sum d_{ij} = 3,75$ dan $\bar{d} = \frac{\sum d_{ij}}{51} = 0,73483$. Selanjutnya ditentukan nilai $\delta = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}$. Nilai λ menunjukkan kerapatan titik perunit area. Kita telah menetapkan dalam sebaran peluang Poisson dengan $\lambda = 0,5$, maka $\delta = 0,707107$ dan nilai $R = \frac{\bar{d}}{\delta} = 1,0392$. Bilai $R=1$ maka titik spasial menyebar secara acak, $R < 1$ artinya $\bar{d} < \delta$ yang memberikan makna titik spasial menyebar mendekati proses pengelompokan, dan $R > 1$ artinya $\bar{d} > \delta$ yang memberikan makna titik spasial menyebar mendekati proses dispersi. Namun demikian perlu dilakukan uji secara Z, dimana $Z = \frac{\bar{d} - \delta}{\sigma_{\bar{d}}}$. Dan $\bar{d} - \delta = 0,73483 - 0,707107 = 0,027723$. Hipotesis yang dikembangkan adalah $H_0 : \delta = \delta^*$ (artinya titik menyebar secara acak) dan $H_1: \delta \neq \delta^*$ (artinya menyebar bukan acak). Kita telah mempunyai $\sigma_{\bar{d}} = \frac{0,26136}{\sqrt{51 \times 0,5}} = 0,051757$. Maka nilai hitung adalah $Z = -$

$0,027723/0,051757 = 0,5356$. Nilai Z tabel dengan $\alpha=10\%$, maka $Z_{\text{tabel}}=1.96$ yang artinya terima H_0 yakni titik spasial menyebar secara acak.

2.5. Kesimpulan

5. Titik spasial yang menyebar secara acak ternyata mempunyai sebaran massa peluang Poisson. Hal ini secara matematis telah dibuktikan dengan menggunakan asumsi antara lain : peluang sebuah sel menerima satu titik dalam selang waktu $(t, t+dt)$ adalah benar-benar independen dari sejumlah titik yang telah ada dalam sel atau dengan pendekatan sebaran binomial dengan kondisi banyaknya sel yang akan ditempati titik spasial mendekati jumlah tak terhingga.
6. Titik spasial menyebar secara acak akan mempunyai nilai VMR mendekati satu karena nilai rata-rata dan ragamnya sama yakni sebesar λ
7. Sebaran titik spasial yang dibangkitkan dengan mengikuti sebaran peluang Poisson tetap merupakan sebaran titik yang acak dan tidak dipengaruhi oleh banyaknya sekatan yang diberikan pada metode Kuadran
8. Hasil perhitungan dengan menggunakan Tetangga Terdekat juga menunjukkan bahwa sebaran titik spasial merupakan sebaran titik secara acak.

2.6. Daftar Pustaka

17. A. Rogers. 1974. Statistical Analysis Of Spatial Dispersion. The Quadrat Method.
18. Edward H. Isaaks and R. Mohan Srivastava. 1989. Applied Geostatistics. New York.
19. John Silk. 1979. Statistical Concept in Geography. LONDON
20. **Muhammad Nur Aidi** : “ Parameter dalam Fungsi Spasial (Kasus Metode Kriging) “ Jurnal Sains dan Teknologi, Vol. 6 No. 1 Tahun 2000, Hlm. 42-48, (ISSN: 0853-733X)
21. **Muhamad Nur Aidi** ,Bidawi Hasyim , WikantiAsri Ningrum , Nanik .S. Maryani Hastuti. : Some Polices and remote sensing applications related to soil erosion risk assessment. Regional Workshop on soil Erosion Risk Assessment Regional Workshop on Soil Erosion Risk Asement , 29-31, Oktober 2001 di Kuala Lumpur Malaysia

22. **Muhammad.Nur Aidi** , “ Water , Land , and Air Pollution Management : title The Relation Between Traffic Intensity and Lead Pollution in Elementary Scholl Student’s Blod and Hair in Jakarta “. 2002
23. **Muhamad Nur Aidi** : Project Of Asem Grant For Environmental Governance And Sustainable Cities Initiatives (IBRD-TF 053383). Ministry Of Environment Republic Of Indonesia. 2002
24. **Muhamad Nur Aidi** : Penggunaan Regresi Untuk Analisis Spasial. 2005
25. **Muhamad Nur Aidi** dan Megawati : Model Logit Untuk Analisis Spasial Penderita Brokhitis (Kasus Dichotomous). 2005
26. **Muhammad Nur Aidi**; Indra Saufitra . Perbaikan Metode Kriging Biasa (*Ordinary Kriging*) melalui Pemecahan Matriks S menjadi Beberapa Anak Matriks non overlap untuk mewakili Drift pada Peubah Spasial. Jurnal Sains MIPA, Desember 2008, Vol. 14, No. 3, Hal 175-190.
27. **Muhammad Nur Aidi**. “*Mapping AREAS OF Logging along Malaysia and Indonesia’s and border Kalimantan*”. Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
28. Swastika Andi DN,dan, **Muhammad Nur Aidi**. “Point Distribution of Women Perception about Husband Allowed Beat His Wife in Nanggoe Aceh Darussalam” Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
29. Mohammad Rosyid Fauzi, **Muhammad Nur Aidi**. Analisis Efektifitas Metode Kriging Dan Invers Distance Dalam Melakukan Pendugaan Data Hilang Secara Spasial Melalui Simulasi Interpolasi Terhadap Data Hasil Perolehan Suara PILKADA Jawa Barat Tahun 2008. Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pensylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
30. Muhammad Nur Aidi.”**Penggunaan Rantai Markov untuk Analisis Spasial serta Modifikasinya dari Sistem Tertutup ke Sistem Terbuka** “ (Forum Statistika dan Komputasi Vol 13 No.1 April. 2008. ISSN 0853-8115 halaman 23-33)
31. Muhammad Masjkur, **Muhammad Nur Aidi** and Chichi Novianti. Ordinary Kriging and Inverse Distance Weighting for Mapping Phosphorus of Lowland Soil. 3th International Conference Mathematics and Statistics”. Kerjasama antara Moslem Society of Mathematics and Statistics in South East Asia & Bogor Agricultural University. Bogor, 5-6 Agustus 2008.

32. Ricardo A. Olea. 1974. Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory. Kansas Geological Survey.

BAB 3

**FUNGSI MASSA PELUANG PADA POLA TITIK SPASIAL
KELOMPOK SERTA FUNGSI STATISTIK VMR
TERHADAP PERUBAHAN UKURAN KUADRAN**

MUHAMMAD NUR AIDI*
Departemen Statistika IPB
E-mail :nuraidi@yahoo.com

Diterbitkan di Forum Statistika dan Komputasi Vol 14. No. 1
April 2009 ISSN : 0853-8115

RINGKASAN

Realisasi titik-titik secara spasial diwujudkan dengan pola titik-titik tersebut dalam ruang. Pola titik dalam ruang pada prinsipnya ada tiga macam, yakni pola titik spasial secara acak, pola titik spasial secara regular serta pola titik spasial secara kelompok. Tujuan penelitian ini adalah menentukan fungsi massa peluang yang menggambarkan sebaran titik spasial kelompok, melakukan simulasi perubahan ukuran grid pada metode kuadran terhadap nilai VMR serta perubahan pola titik spasial kelompok. Langkah yang ditempuh adalah membangun fungsi massa peluang yang merupakan pembangkit sebaran spasial kelompok, serta melakukan simulasi pada analisis kuadran dengan membagi wilayah menjadi beberapa grid. Hasil yang ditunjukkan Sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negative serta nilai VMR > 1 . Apabila Banyaknya Grid bersifat terbatas maka perubahan banyaknya grid tidak merubah kesimpulan bahwa VMR > 1 yang artinya sebaran fungsi massa peluang binomial negative akan mempunyai sebaran titik spasial bersifat kelompok. Nilai VMR merupakan fungsi eksponensial terhadap banyaknya grid, yakni $VMR = 4,976371 \exp(-0,003138 \text{ banyaknya grid}) + \text{galat}$.

Kata kunci : VMR, Grid, Fungsi Massa Peluang

3.1. Pendahuluan

Realisasi titik-titik secara spasial diwujudkan dengan pola titik-titik tersebut dalam ruang. Pola titik dalam ruang pada prinsipnya ada tiga macam, yakni pola titik spasial secara acak, pola titik spasial secara regular serta pola titik spasial secara kelompok. Pola titik spasial secara kelompok disebabkan oleh proses yang mendorong titik-titik tersebut bergerak untuk mendekati sumber-sumber tertentu. Kasus ini dapat ditemui pada pola ikan di lautan. Ikan-ikan kecenderungannya akan mengelompok ke tempat yang jumlah planktonnya banyak serta suhu, dan suasana airnya sesuai dengan kebutuhan hidupnya. Demikian pula sebaran titik spasial pada sebaran apartemen-apartemen yang mengelompok pada wilayah pusat perkantoran, maupun pusat bisnis agar biaya transportasi serta waktu tempuh dapat diperkecil. Banyak contoh-contoh lain yang menunjukkan sebaran titik spasial yang bersifat kelompok. Oleh karena itu sangatlah penting menduga bentuk sebaran titik spasial apakah bersifat kelompok atau bukan. Ada dua strategi untuk mendeteksi sebaran titik spasial kelompok yakni menduga fungsi massa peluang sebaran titik tersebut atau menentukan statistik hitung yang mengindikasikan apakah sebaran titik spasial bersifat kelompok atau bukan. Metode yang sering digunakan adalah Analisis Kuadran. Pada analisis kuadran, sebuah wilayah dibagi ke dalam sebuah grid yang terdiri dari beberapa kuadran dengan ukuran yang sama dan titik-titik menyebar secara acak di dalamnya. Kuadran biasanya berbentuk persegi (Silk, 1979; Rogers, 1974).

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan fungsi massa peluang yang menggambarkan sebaran titik spasial kelompok dan melakukan simulasi perubahan ukuran grid pada metode kuadran terhadap nilai VMR serta perubahan pola titik spasial kelompok.

3.2. Tinjauan Pustaka

Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak. Kuadran umumnya berbentuk segi empat. Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau clustered atau random atau tidak random. *Regular point process* adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik.

Clustered point process adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai banyak titik yang merupakan penengah dari dua hal diatas adalah *random point process* (Rogers, 1974)

Ada tiga metode dalam analisis ini, yaitu:

1. Rasio ragam dan nilai tengah (*Variance-mean ratio* , selanjutnya disingkat VMR)

Rasio ragam dan nilai tengah digunakan untuk mengetahui apakah penyebaran titik spasial bergerombol, acak, atau regular. Rasio ragam dan nilai tengah yang lebih besar dari satu mengindikasikan penyebaran titik spasial lebih bergerombol, rasio ragam dan nilai tengah yang kurang dari satu mengindikasikan proses titik spasial lebih regular, sedangkan rasio ragam dengan nilai tengah yang sama dengan satu mengindikasikan penyebaran titik spasial acak.

2. Uji Hipotesis untuk analisis kuadran

Hipotesis yang akan diuji dalam metode ini adalah apakah penyebaran titik spasial menyebar acak. Statistik uji untuk uji hipotesis tersebut adalah :

$$(m - 1)VMR$$

dengan m adalah jumlah kuadran, VMR adalah Rasio ragam dan nilai tengah. Untuk jumlah kuadran yang kurang dari 30, $(m - 1)VMR$ menyebar mengikuti sebaran Khi-Kuadrat dengan derajat bebas $m-1$.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= (m - 1)VMR \\ &= \frac{(m - 1)s^2}{\bar{x}} \\ &= \frac{(m - 1) \sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}(m - 1)} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Sedangkan untuk jumlah grid yang lebih dari 30, $(m - 1)VMR$ menyebar mengikuti sebaran Normal $(m - 1, 2(m - 1))$ (Schabenberger, 2009)

$$Z = \frac{(m - 1)VMR - (m - 1)}{\sqrt{2(m - 1)}} = \left(\sqrt{\frac{m - 1}{2}} \right) (VMR - 1)$$

- Uji yang dikembangkan dengan menggunakan statistik Khi-Kuadrat yakni dengan menghitung perbedaan frekuensi observasi pada kuadran dengan distribusi frekuensi pada fungsi peluang tertentu. Jika nilai Khi-kuadrat hitung lebih kecil dari Khi-kuadrat table maka diputuskan bahwa distribusi mengikuti sebaran peluang tertentu dan sebaran titik spatial secara acak, atau regular atau kelompok (Silk, 1979; Rogers, 1974)

3.3. Metode Penelitian

Ada tiga metode yang dilakukan dalam penelitian ini yakni : a) Metode Matematika untuk mencari fungsi massa peluang sebaran titik secara kelompok dalam ruang, yakni melalui Asumsi :Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel adalah independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel. b) Membangkitkan titik-titik dalam ruang (dua dimensi) secara kelompok dengan menggunakan Software R (Schabenberger, 2009; Cohen & Cohen, 2008) yang mempunyai sebaran peluang tertentu, pilihan nilai parameter dalam fungsi massa peluang dilakukan secara *arbitrer*, c) Melakukan simulasi dengan membagi area studi menjadi beberapa ukuran grid, yakni (3x3, 4x4, 5x5,.....,20x20) dan menghitung nilai VMR serta membangun VMR yang merupakan fungsi dari ukuran grid (Gambar 3.1)

3.4. Hasil dan Pembahasan

3.4.1. Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok (*Cluster*).

Bayangkan suatu wilayah studi yang di grid dengan sel berbentuk segi empat. Asumsikan pada saat awal ($t = 0$) tidak ada sel yang berisi sembarang titik, dan $p(r, t)$ adalah peluang sebuah sel grid mempunyai r titik selama waktu t . Asumsi : selama selang waktu ($t + dt$) sebuah titik menempati sebuah sel tertentu dimana telah mempunyai r titik dengan peluang $f(r, t) dt$ dan bahwa selang waktu tersebut adalah cukup pendek untuk tidak lebih dari satu titik untuk menempati satu sel yang diberikan pada selang waktu tersebut.

$$p(0, t + dt) = p(0, t)[1 - f(0, t)dt]$$

$$p(r, t + dt) = p(r, t)[1 - f(r, t)dt] + p(r - 1, t)f(r - 1, t)dt,$$

$$r = 1, 2, 3, ..)$$

Persamaan di atas bagian kiri dan kanan dikurangi $p(r, t)$ dan dibagi dengan dt , dan selanjutnya $\text{Limit } dt \rightarrow 0$, maka

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p(0, t) &= -f(0, t)p(0, t), \\ \frac{d}{dt} p(r, t) &= -f(r, t)p(r, t) + f(r-1, t)p(r-1, t), \\ &\quad (r = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \tag{1}$$

Fungsi pertama pada persamaan (1) dikalikan dengan s^0 , fungsi kedua pada persamaan (1) dikalikan s^1 dan fungsi ketiga pada persamaan (1) dikalikan dengan s^2 dan secara umum untuk fungsi ke n persamaan (1) dikalikan dengan s^{n-1}

Hasil penjumlahan persamaan-persamaan tersebut adalah :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r \right] = (s-1) \left[\sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r \right]$$

Dan bila disederhanakan akan menjadi

$$\frac{d}{dt} G(s; t) = (s-1)L(s; t)$$

Dimana

$$G(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r$$

Adalah fungsi pembangkit moment dari peubah acak r dan

$$L(s; t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r$$

Untuk menemukan $G(s; t)$ kita harus memecahkan persamaan diferensial pada $\frac{d}{dt} G(s; t) = (s-1)L(s; t)$. Hasil distribusi apakah acak, regular atau kelompok tergantung pada asumsi yang dibuat pada $f(r, t)$. Catatan $f(r, t)$ adalah sebuah peluang dan satu kesatuan dengan nilai r . Perlu ditekankan peluang bahwa sebuah sel dengan r titik telah didapatkan dan satu titik lagi masuk pada selang waktu $(t, t + dt)$ Jika peluang ini adalah independen terhadap titik-titik yang ada dalam sel, maka dikenal sebagai dispersi acak Pada sisi lain peluang ini menurun pada saat jumlah titik dalam sel meningkat didefinisikan sebagai dispersi regular. Terakhir, jika peluang meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah titik yang ada dalam sel dikenal sebagai dispersi kelompok.

3.4.2. Dispersi Spasial Cluster (Kelompok) :Distribusi Binomial Negatif

Asumsi :

Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel adalah independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

$$f(r, t) = c + br \quad (c > 0, b > 0)$$

maka

$$\begin{aligned} L(s; t) &= \sum_{r=0}^{\infty} (c + br)p(r, t)s^r \\ &= c \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t)s^r + b \sum_{r=0}^{\infty} r p(r, t)s^r \\ &= cG(s; t) + bs \frac{d}{ds} G(s; t) \end{aligned}$$

Dan persamaan $\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1)L(s; t)$

menjadi

$$\frac{d}{dt} G(s; t) = (s - 1) \left[cG(s; t) + bs \frac{d}{ds} G(s; t) \right]$$

Dengan solusi

$$G(s; t) = [\exp bt - (\exp bt - 1)s]^{-c/b}$$

Untuk sembarang titik dalam \bar{t} waktu, kita melakukan substitusi

$$p = \exp b\bar{t} - 1 \quad \text{dan} \quad k = c/b$$

Maka $G(s; \bar{t}) = G(s) = (1 + p - ps)^{-k}$ (2)

Persamaan (2) merupakan fungsi pembangkit momen distribusi binomial negatif

$$p(r) = \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k$$

kita menghitung fungsi pembangkit momen

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k s^r \\ &= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left[\left(\frac{p}{1+p}\right)s\right]^r \\ &= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \left[1 - \left(\frac{p}{1+p}\right)s\right]^{-k} = (1+p-ps)^{-k} \end{aligned}$$

Turunan $G(s)$ untuk mendapatkan rata-rata dan varian

$$E(r) = m_1 = G^1(1) = kp$$

Dan

$$Var(r) = m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = kp(1+p)$$

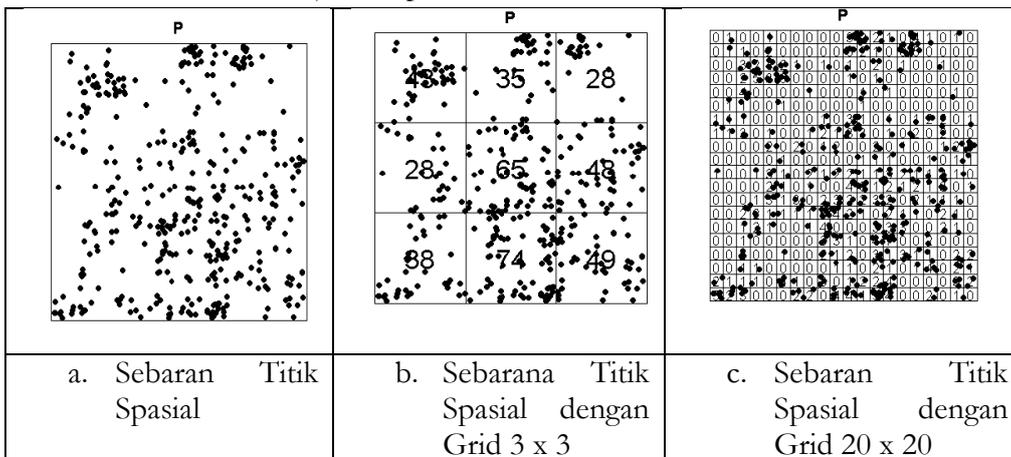
Catatan

$$VMR = \frac{var}{\bar{x}} = (1+p) > 1$$

Dari pembuktian di atas maka sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negatif serta nilai $VMR > 1$.

3.4.3. Melakukan Simulasi Perubahan Ukuran Grid pada Metode Kuadran

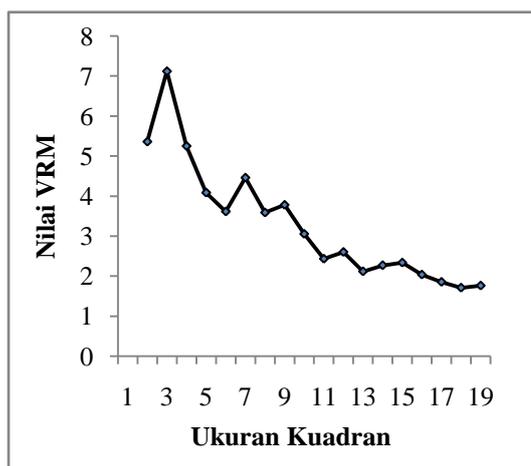
Simulasi dilakukan dengan membagi wilayah studi berdasarkan grid-grid, yakni 3 x 3, 4 x 4, 5 x 5, 6 x 6, 7 x 7, 8 x 8, 9 x 9, 10 x 10, 11 x 11, 12 x 12, 13 x 13, 14 x 14, 15 x 15, 16 x 16, 17 x 17, 18 x 18, 19 x 19, 20 x 20. Setiap ukuran dilakukan penghitungan rata-rata \bar{x} = Banyaknya titik dibagi dengan banyak grid yang berukuran sama. Selanjutnya dilakukan perhitungan ragam $s^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{m-1}$, m adalah banyaknya grid. Hubungan antara ukuran kuadran dengan rata-rata, ragam, dan VMR disajikan pada Tabel 3.1. Dari Tabel 3.1 di atas nampak bahwa nilai $VMR > 1$, yakni masih mengarah pada pola Kelompok. Namun demikian terjadi penurunan nilai VMR seiring dengan peningkatan jumlah grid yang dibuat. Pada Gambar 3.2 terlihat ada kecenderungan penurunan nilai VMR dengan peningkatan jumlah Grid. Pola penurunan menuju arah eksponensial Selanjutnya dilakukan fitting yang menghubungkan antara banyaknya grid dengan nilai VMR. Banyaknya grid mencakup 9, 16, ..., 40. Model yang dicobakan adalah sebagai berikut $\overline{VMR} = a * e^{b*grid}$. Hasil ditunjukkan pada Tabel 3.2 serta Gambar 3.3.



Gambar 3.1. Sebaran Titik Spasial Kelompok dengan Ukuran Gridnya

Tabel 3.1. Hubungan antara Ukuran Kuadran, Rata-Rata, Ragam, dan VMR

Ukuran kuadran	Mean	Ragam	VMR	Penyebaran
3x3	5,556	29,778	5,360	Kelompok(cluster)
4x4	3,125	22,250	7,120	Kelompok(cluster)
5x5	2,000	10,500	5,250	Kelompok(cluster)
6x6	1,389	5,673	4,085	Kelompok(cluster)
7x7	1,020	3,687	3,613	Kelompok(cluster)
8x8	0,794	3,539	4,459	Kelompok(cluster)
9x9	0,617	2,214	3,587	Kelompok(cluster)
10x10	0,500	1,889	3,778	Kelompok(cluster)
11x11	0,413	1,261	3,052	Kelompok(cluster)
12x12	0,347	0,844	2,430	Kelompok(cluster)
13x13	0,296	0,769	2,600	Kelompok(cluster)
14x14	0,255	0,540	2,116	Kelompok(cluster)
15x15	0,222	0,504	2,268	Kelompok(cluster)
16x16	0,195	0,456	2,334	Kelompok(cluster)
17x17	0,173	0,352	2,034	Kelompok(cluster)
18x18	0,154	0,286	1,851	Kelompok(cluster)
19x19	0,139	0,236	1,706	Kelompok(cluster)
20x20	0,125	0,220	1,759	Kelompok(cluster)

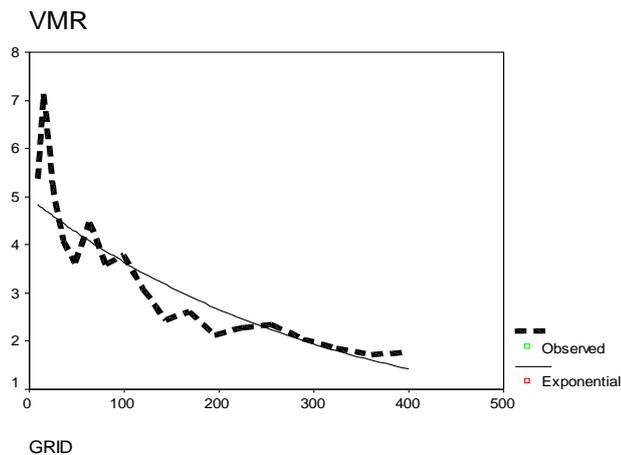


Gambar 3.2. Pola Hubungan antara Banyaknya Grid dengan Nilai VMR pada Sebaran Spasial Kelompok

Dari analisis ragam serta uji T menunjukkan bahwa fungsi eksponensial yang ditampilkan mempunyai nilai konstanta a, dan b yang signifikan; yang masing-masing bernilai a = 4,976 dan b=-0,003 sehingga persamaan regresi dugaannya adalah

$$\text{VMR} = 4,976 \exp(-0,0031 * \text{banyaknya grid})$$

Persamaan dugaan tersebut mempunyai $R^2 = 85,145\%$, yang cukup besar.



Gambar 3.3. Ploting Hasil Regresi dengan Data Pengamatan VMR

3.5. Kesimpulan

1. Sebaran spasial kelompok mempunyai fungsi massa peluang binomial negative serta nilai $\text{VMR} > 1$.
2. Apabila Banyaknya Grid bersifat terbatas maka perubahan banyaknya grid tidak merubah kesimpulan bahwa $\text{VMR} > 1$ yang artinya sebaran fungsi massa peluang binomial negative akan mempunyai sebaran titik spasial bersifat kelompok.
3. Nilai VMR merupakan fungsi eksponensial terhadap banyaknya grid, yakni $\text{VMR} = 4,976371 \exp(-0,003138 \text{ banyaknya grid}) + \text{galat}$. Hal ini memberikan makna apabila banyaknya grid menuju tak hingga maka nilai VMR menuju 1 atau sebaran spasial menuju acak.

3.6. Daftar Pustaka

1. Aidi.MN. 2000. Parameter dalam Fungsi Spasial (Kasus Metode Kriging). *Jurnal Sains dan Teknologi* 6(1):. 42-48, (ISSN: 0853-733X).
2. Aidi.MN. & Saufitra I. 2008.. Perbaikan Metode Kriging Biasa (*Ordinary Kriging*) melalui Pemecahan Matriks S menjadi Beberapa Anak Matriks non overlap untuk mewakili Drift pada Peubah Spasial. *Jurnal Sains MIPA*, Vol. 14(3) :175-190.
3. Aidi.MN. 2008. Penggunaan Rantai Markov untuk Analisis Spasial serta Modifikasinya dari Sistem Tertutup ke Sistem Terbuka. *Forum Statistika dan Komputasi* 13(1): 23-33. (ISSN 0853-8115)
4. Aidi.MN. 2009. *Mapping AREAS OF Logging along Malaysia and Indonesia's and border Kalimantan*". Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Penvsylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
5. Aidi.MN. 2009. Perbandingan Deteksi Pola Sebaran Titik Spasial Acak dengan Metode Kuadran dan Tetangga Terdekat. Naskah disampaikan pada : Seminar Nasional Statistika ke 9 di ITS, Sukolilo Surabaya. Tanggal 7 November 2009
6. Aidi, MN, 2009. Deteksi Pola Sebaran Titik Spasial Secara Regular melalui Penelusuran Fungsi Massa Peluang, Metode Kuadran dan Tetangga Terdekat. Naskah disampaikan pada : Seminar Nasional Statistika di FMIPA IPB. Tanggal 14 November 2009
7. Anonim. 2000. *Quadrat analysis of grid datasets*. [http://www. Spatial analysisonline.com/output /html/ Quadrat analysis of griddatasets.html](http://www.Spatialanalysisonline.com/output/html/Quadrat%20Analysis.pdf) [terhubung berkala] ((13 Mei 2009).
8. Anonim. 2001. *Parametric Test* Quadrat Analysis. <http://www.webspaceship.edu/pgmarr/Geo441/Examples/Quadrat%20Analysis.pdf>. [terhubung berkala] ((13 Mei 2009)
9. Anonim. 2002. *Spatial Statistics*. [http:// www.css. cornell.edu/courses/620 /lecture8.ppt](http://www.css.cornell.edu/courses/620/lecture8.ppt). [terhubung berkala] (13 Mei 2009)
10. Anonim. *Spatial Statistiks*. [http:// www.css.cornell.edu /courses /620/lecture8.ppt](http://www.css.cornell.edu/courses/620/lecture8.ppt). [terhubung ber kala](13 Mei 2009)
11. Anonim. *Parametric Test* Quadrat Analysis. <http://www.webspaceship.edu/pgmarr/ eo441 Examples/Quadrat%20Analysis.pdf>. [terhubung berkala] (13 Mei 2009)
12. Anonim. *Quadrat analysis of grid datasets*. [http:// www. spatialanalysisonline.com /output/html /Quadratanalysisofgriddatasets.html](http://www.spatialanalysisonline.com/output/html/Quadratanalysisofgriddatasets.html) . . [terhubung berkala] (13 Mei 2009)

13. Cohan Y & Cohen JY. 2008. *Statistics and Data with R: An applied approach through examples*. This edition first published 2008. John Wiley & Sons Ltd.
14. Daniel W W. 1990. *Applied Nonparametrics Statistics*. Boston: PWS-KENT Publishing Company.
15. Dina Rakhmawati. dan Muhammad Nur Aidi. 2009. Perbandingan Pendugaan Data Spasial dengan Metode Ordinary Kriging dengan Co-Kriging (Studi Kasus Pemantauan Kualitas Udara Ambien Kota Bogor Tahun 2003), Skripsi Departemen Statistika-IPB.
16. Fauzi RF & Aidi.MN.. Analisis Efektifitas Metode Kriging Dan Invers Distance Dalam Melakukan Pendugaan Data Hilang Secara Spasial Melalui Simulasi Interpolasi Terhadap Data Hasil Perolehan Suara PILKADA Jawa Barat Tahun 2008. Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Penvsylvania State University, USA. Bogor 12-13 January 2009.
17. Hardiansyah J& Aidi.MN 2002. Strategi Perhitungan Akurasi pada Metode Ordinary Kriging dengan Menggunakan Teknik Jackknife. Skripsi Departemen Matematika-IPB.
18. Isaaks, E. H. & R. M. Srivastava. 1989. *Applied Geostatistics*. Oxford University Press, New York.
19. Niknami KA &Amirkhiz AC. 2008. A GIS Technical Approach to The Spatial Pattern Recognition of Archeological Site Distributions on The Eastern Shores of Lake Urmia, Northwestern Iran. Di dalam *The International Archives of the Photogrammetry, Remote sensing and Spatial Information Sciences, Volume XXXVII, 2008 :Part B4*.
20. Novianti C & Aidi.MN .& Masykur M, 2008. Perbandingan Metode Invers Distance dan Kriging dalam Pemetaan Fosfor Tanah Sawah Kabupaten Ngawi. Skripsi Departemen Statistika-IPB.
21. Nurhayati & Aidi MN. 1999. Pendugaan Spasial pada Peubah Regional dengan Ordinary Kriging. Skripsi Departemen Matematika IPB.
22. Nursaid N & Aidi MN. 2002. Pendugaan dengan 2 kondisi Ketakstabilan pada Teknik Cokriging. Skripsi Departemen Matematika IPB.
23. Olea RA. 1974. *Optimum Mapping Techniques using Regionalized Variable Theory*. Kansas Geological Survey.
24. Reimann *et al.* 2008. *Statistical Data Analysis Explained Applied Environmental Statistics With R*. Vienna University of Technology. England : John Wiley & Sons Ltd
25. Rogers A. 1974.. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited.
26. Rogerson, P. 2001. *Statistical Methods for Geography*. London : SAGE.

27. Rokhma W &, Aidi MN. 2006. Sistem Ordinary Kriging untuk Matriks Data yang Dipartisi menjadi Empat Bagian. Wenny Rokhma S. 2006. Skripsi Departemen Matematika IPB.
28. Saufitra I & Aidi.MN 2006. Perbandingan Tingkat Akurasi antara Ordinary Kriging Partisi dengan Ordinary Kriging non Partisi dengan Menggunakan Teknik Jackknife. Skripsi Departemen Matematika IPB.
29. Schabenberger H. 2009. *Spatial count regression Repository* John Wiley and Sons. CRAN
30. Shier R. 2004. Statistics: 1.4 Chi-squared Goodness of Fit Tes. http://www.mlsc.lboro.ac.uk/resources/_statistics/gofit.pdf [terhubung berkala] (16 Juni 2009).
31. Silk J. 1979. *Statistical Concept in Geography*. John Wiley and Sons, London
32. Skelton A G. 1996. Quadrat Analysis Software for the Detection of Spatial or Temporal Clustering. *Statistics in Medicine* 15: 939-941.
33. Sugeng Purnomo, Aidi MN. 1999. Proses Desagregasi Dalam Klimatologi.. Skripsi Departemen Matematika IPB.
34. Swastika Andi DN, dan, Aidi MN. 2009. Point Distribution of Women Perception about Husband Allowed Beat His Wife in Nanggoe Aceh Darussalam” Naskah Ilmiah yang disampaikan pada pertemuan *International Seminar kerjasama antara Pasca Sarjana dengan The Pennsylvania State University, USA*. Bogor 12-13 January 2009.
35. Wicaksono A & Aidi.MN.. 2002. Perbandingan antara Ordinary Kriging dan Cokriging untuk Pendugaan Data Spasial. Skripsi Departemen Matematika IPB.

BAB 4

PENGERTIAN DAN STATISTIK UKUR

Muhammad Nur Aidi

4.1. Pengertian

Kehidupan dan kegiatan makhluk hidup berada di setiap ruang di muka bumi. Banyak persoalan yang dapat timbul terkait ruang, salah satunya adalah persoalan pola penyebaran. Beberapa contoh dari pola penyebaran adalah pola penyebaran penduduk, pola penyebaran penyakit, serta pola penyebaran flora dan fauna. Pola penyebaran tersebut harus diteliti untuk menentukan kebijakan yang tepat. Oleh karena itu diperlukan analisis spasial untuk meneliti pola penyebaran (Rogers, 1974).

Konfigurasi titik dalam ruang adalah posisi geografis dari titik dalam suatu *plane* (wadah) yang diakibatkan oleh suatu realisasi Proses Spasial dari titik yang memenuhi dua kondisi berikut :

1. *Mempunyai peluang sama.* Setiap titik mempunyai peluang yang sama untuk berada pada posisi tertentu dalam wadah
2. *Independen.* Posisi suatu titik dalam wadah adalah independen terhadap titik lain pada wadah tersebut

Dengan pengertian di atas : pola yang dibentuk oleh M titik dan secara acak menempati suatu wadah maka sebuah titik ada di dalam sub divisi tertentu dari area A dapat dianggap sebagai kejadian dimana dengan peluang λA , λ adalah kerapatan (jumlah titik per unit area).

Contoh penjelasan tersebut adalah suatu subregion yang berbentuk kotak dengan luas a dibagi menjadi n kecil yang berbentuk kotak dan katakan sebagai sub divisi. Asumsi bahwa subdivisi ini begitu kecil sehingga peluang dari satu titik untuk ada di dalamnya adalah sangat kecil dan akan menuju nol bila n makin besar. Maka $A = a/n$, yang berarti peluang sub divisi mempunyai titik $(\lambda a/n)$ dan peluang sub divisi tidak mempunyai titik adalah $(1 - \lambda a/n)$

Jika ada n subdivisi maka kombinasi menempatkan r titik adalah $\binom{n}{r}$ cara, dimana setiap cara mempunyai peluang $(\lambda a/n)^r (1 - \lambda a/n)^{n-r}$. Dengan demikian peluang menentukan titik dalam subregion segi empat dari area α adalah:

$$\begin{aligned}
(R = r) = P(r) &= \binom{n}{r} \left(\frac{\lambda a}{n}\right)^r \left(1 - \frac{\lambda a}{n}\right)^{n-r} \\
&= \frac{n(n-1) \dots (n-r+1)}{r!} \frac{(\lambda a)^r}{n^r} \left(1 - \frac{\lambda a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda a}{n}\right)^{-r} \\
&= \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{r-1}{n}\right) \left(1 - \frac{\lambda a}{n}\right)^{-r} \left[\left(1 - \frac{\lambda a}{n}\right)^n \frac{(\lambda a)^r}{r!} \right]
\end{aligned}$$

Dengan n menuju tak hingga, maka

$$P(r) = \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!}, \text{ dengan } r = 0, 1, \dots, n$$

Nilai harapan r titik

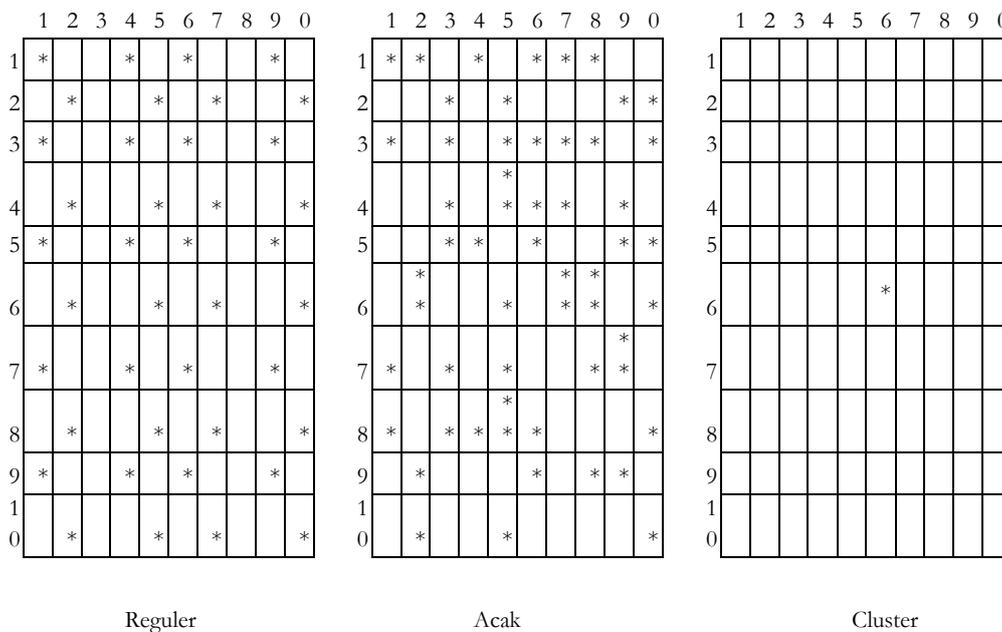
$$\begin{aligned}
E(r) = m_1 &= \sum_{r=0}^n r \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} = \sum_{r=0}^n r \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)(\lambda a)^{r-1}}{r(r-1)!} \\
&= (\lambda a) \sum_{r=1}^n \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^{r-1}}{(r-1)!} \\
&= (\lambda a) \sum_{x=0}^n \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^{r-1}}{(m)!} = (\lambda a)
\end{aligned}$$

Momen kedua:

$$\begin{aligned}
E(r^2) &= \sum_{r=0}^n r^2 \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^n r(r-1) \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} + \sum_{r=0}^n r \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} \\
&= \sum_{r=0}^n r(r-1) \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)(\lambda a)(\lambda a)^{r-2}}{r(r-1)(r-2)!} + (\lambda a) \\
&= (\lambda a)^2 \sum_{r=2}^n \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^{r-2}}{(r-2)!} + (\lambda a) = (\lambda a)^2 + (\lambda a)
\end{aligned}$$

Dengan demikian ragam dari distribusi Poisson adalah $\text{Var}(r) = E[r^2] - (E[r])^2 = (\lambda a)^2 + (\lambda a) - (\lambda a)^2 = (\lambda a)$. Dengan demikian nilai rata-rata dan ragam adalah sama yakni (λa) .

Pada gambar 4.1 menampilkan pola acak titik spasial yang memiliki 52 titik, dimana gambar 4.2 (a) menampilkan kasus maksimum regular atau regular sempurna. Gambar 4.2 (b) pola acak titik dan 1.2 (c) menampilkan kasus titik bergerombol sempurna.



Gambar 4.1 Kuadran dari Sebaran Titik pada Regular Sempurna, Pola Acak dan Pola Gerombol Sempurna

Ada tiga macam penyebaran titik spasial pada suatu wilayah, yaitu acak, regular, dan gerombol (Crawley, 2007). Salah satu metode untuk mengetahui penyebaran titik spasial di suatu wilayah adalah analisis kuadran. Aplikasi dari analisis kuadran dipengaruhi oleh masalah skala karena pemilihan jumlah dan ukuran kuadran adalah prosedur yang arbitrer (Thomas, 1977). Suatu sebaran titik spasial mungkin dapat menyebar regular bila dianalisis dengan kuadran yang berukuran kecil, menyebar gerombol bila dianalisis dengan kuadran berukuran sedang, atau menyebar acak bila dianalisis dengan kuadran berukuran besar (Crawley, 2007). Oleh karena itu, pemilihan jumlah dan ukuran kuadran akan mempengaruhi hasil intepretasi sebaran spasial yang sebenarnya.

Telah dikembangkan 50 tahun lalu di bidang tanaman, hewan dan ekologi. Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak. Kuadran umumnya berbentuk segi empat.

Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau clustered daripada random atau tidak random

Regular point process adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik

Clustered point process adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai banyak titik. Penengah dari dua hal diatas adalah *random point process*.

Rasio varian dengan rata-rata merupakan nilai ragam populasi dan rata-rata populasi pada distribusi poisson dengan nilai sama sehingga $\text{var}/\text{rata-rata} = 1$. Dengan untuk menguji ketiga bentuk point process dari kondisi random di atas bagaimana simpangan $\text{var}/\text{rata-rata}$ terhadap nilai satu. Makin besar perbedaan rasio dari nilai satu maka makin cluster dengan standar errornya = $[2/(N-1)]^{1/2}$ dimana N adalah jumlah yang diobservasi. Analisis Kuadran memiliki beberapa persoalan yaitu:

- a. Ukuran Kuadran
- b. Jumlah Kuadran
- c. Bentuk Kuadran

Pada gambar 4. 1 menampilkan ketiga contoh konfigurasi titik dalam ruang dimana $N = 100$ (banyaknya grid), $r = 52$ (banyaknya titik)

1. Pada Perfectly regular
 - a. Dugaan $m_1 = 0.5200$
 - b. Dugaan $m_2 = 0.2521$
 - c. Dugaan $m_2/\text{Dugaan } m_1 = 0.4848$
 - d. $t_{\text{hitung}} = (0.4848 - 0.1)/(0.1421) = -3.6256$
2. Pada Random
 - a. Dugaan $m_1 = 0.5200$
 - b. Dugaan $m_2 = 0.5148$
 - c. Dugaan $m_2/\text{Dugaan } m_1 = 0.9899$
 - d. $t_{\text{hitung}} = (0.9899 - 0.1)/(0.1421) = -0.0711$
3. Pada Perfect Clustered
 - a. Dugaan $m_1 = 0.5200$
 - b. Dugaan $m_2 = 27.400$
 - c. Dugaan $m_2/\text{Dugaan } m_1 = 52.00$
 - d. $t_{\text{hitung}} = (52.00 - 0.1)/(0.1421) = 358.9021$

4.2 Contoh Perhitungan

Tahapan perhitungan metode kuadran adalah sebagai berikut

- Bagilah area menjadi m sel yang kira-kira berukuran sama
- Hitunglah total kejadian pada area tersebut, katakan n
- Tentukan rata-rata banyaknya kejadian per sel, katakan

$$\bar{x} = \frac{n}{m}$$

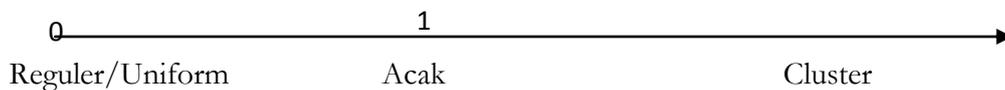
- Tentukan nilai variance banyaknya kejadian per cell, katakan

$$S^2 = \sum_{i=1}^m \frac{(x_i - \bar{x})^2}{m - 1}$$

- Hitung VMR

$$VMR = \frac{S^2}{\bar{x}}$$

Hasil perhitungan ada beberapa kemungkinan, yakni $VMR=0$ yang menandakan konfigurasi titik dalam ruang adalah *uniform* atau *perfect* reguler. Bili $VMR=1$, hal ini menunjukkan bahwa konfigurasi titik dalam ruang adalah acak. $VMR < 1$, yakni nilai ragam lebih kecil daripada rata-rata. Konfigurasi titik dalam ruang lebih mengarah ke bentuk reguler. $VMR > 1$, konfigurasi titik dalam ruang lebih kearah cluster dibandingkan dengan acak.



Hipotesis yang dikembangkan adalah sebagai berikut

H_0 : Konfigurasi titik dalam ruang adalah acak

H_1 : Konfigurasi titik dalam ruang bukan acak

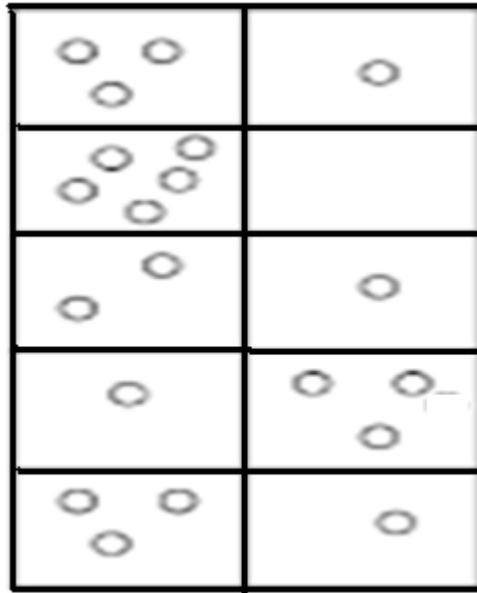
Dengan statistik hitung= $(m-1)VMR$

Jika $m < 30$, maka $(m-1)VMR$ akan mempunyai sebaran Khi-Kuadrat dengan derajat bebas = $m-1$

$$\begin{aligned} \chi^2 = (m - 1)VMR &= \frac{(m - 1)S^2}{\bar{x}} = \frac{(m - 1) \sum (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}(m - 1)} \\ &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}} \end{aligned}$$

Tolak Hipotesis nol jika $(m-1)VMR$ lebih besar daripada Khi-Kuadrat Tabel

Suatu kasus sebaran 20 orang yang terkena penyakit aid pada 10 wilayah yang digambarkan pada Gambar 4.2. berikut :



Gambar 4.2. Konfigurasi Penderita Aid di 10 Wilayah

Pertanyaannya adalah apakah konfigurasi penderita penyakit aid di 10 wilayah bersifat acak atau tidak ?.

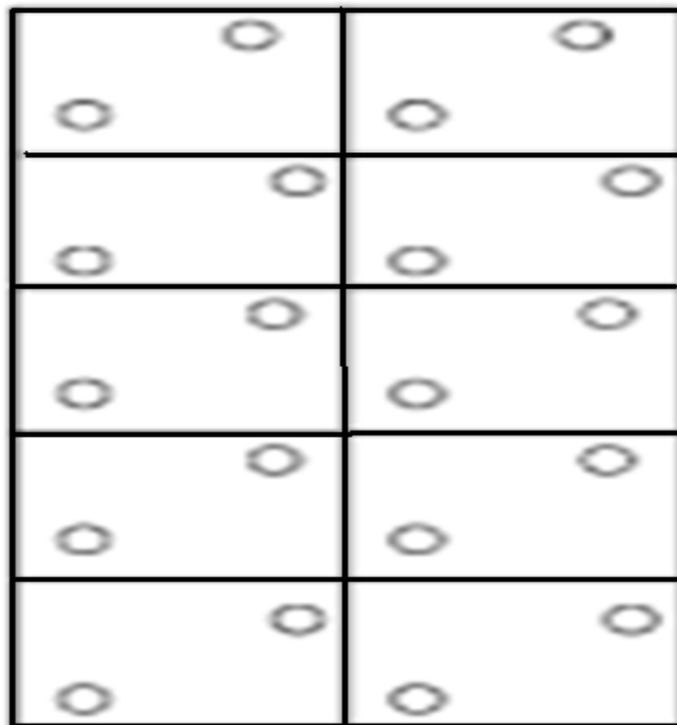
Wilayah	Banyaknya Penderita
1	3
2	1
3	5
4	0
5	2
6	1
7	1
8	3
9	3
10	1
Rata-Rata	2
Variance	2.222

$$VMR = 1.111$$

$$\chi^2 = (m - 1)VMR = 9 * 1.111 = 9.99$$

Dengan $df=10-1=9$, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_0 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah acak.

Seandainya konfigurasi penyakit aid di 10 wilayah diubah menjadi seperti pada Gambar 4.3., Pertanyaannya adalah apakah konfigurasi penderita penyakit aid di 10 wilayah masih bersifat acak ataukah berubah ?.



Gambar 4.3. Konfigurasi Kedua Penderita Aid di 10 Wilayah

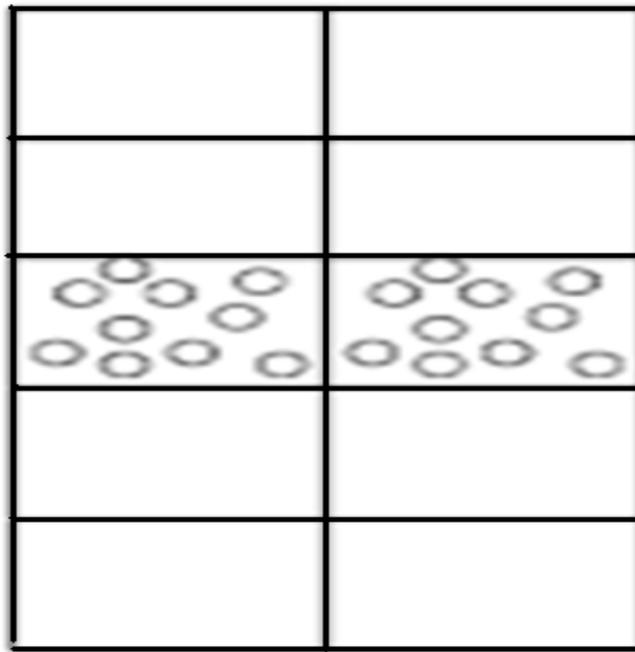
Wilayah	Banyaknya Penderita
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
Rata-Rata	2
Variance	0

$$VMR=0$$

$$\chi^2 = (m - 1)VMR = 9 * 0 = 0$$

Dengan $df=10-1=9$, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_0 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah acak juga. Perhitungan dengan Khi Kuadrat kurang sensitif untuk kasus ini, karena pada Gambar 4.3. nampak konfigurasi dalam ruang adalah reguler.

Kita coba lagi pada kasus 20 orang penderita aid di 10 wilayah dengan konfigurasi dalam ruang yang disajikan pada Gambar 4.4.. Pertanyaannya apakah konfigurasi penderita aid tersebut masih acak atautkah berubah ?



Gambar 4.4. Konfigurasi Ketiga Penderita Aid di 10 Wilayah

Wilayah	Banyaknya Penderita
1	0
2	0
3	0
4	0
5	10

6	10
7	0
8	0
9	0
10	0
Rata-Rata	2
Variance	17.778

$$VMR=8.889$$

$$\chi^2 = (m - 1)VMR = 9 * 8.889 = 80.001$$

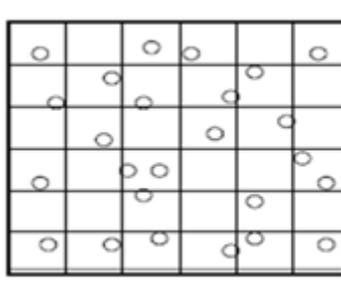
Dengan $df=10-1=9$, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_1 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah bukan acak, yakni cluster. Perhitungan dengan Khi Kuadrat sensitif untuk kasus ini, karena sudah bisa membedakan antara acak dan bukan acak pada kasus Khi-kuadrat hitung lebih besar dan Khi-kuadrat tabel.

Selanjutnya bila Jika $m > 30$, maka $(m-1)VMR$ akan mempunyai sebaran normal dengan rata-rata bernilai $m-1$ serta ragam bernilai $2(m-1)$ jika hipotesis nol benar. Tranformasi Z adalah sebagai berikut

$$Z = \frac{(m - 1)VMR - (m-1)}{\sqrt{2(m - 1)}} = \sqrt{(m - 1)/2} (VMR - 1)$$

Jika Z hitung > 1.96 berarti tolak pernyataan konfigurasi titik dalam ruang bersifat acak pada kesalahan 5 % dan mengarah pada konfigurasi titik dalam ruang bersifat cluster. Namun jika Z hitung < -1.96 berarti tolak pernyataan konfigurasi titik dalam ruang bersifat acak pada kesalahan 5 % dan mengarah pada konfigurasi titik dalam ruang bersifat reguler. Pada teknik perhitungan ini mampu dibedakan antara acak dan reguler. Sedangkan dengan perhitungan Khi-kuadrat (seperti contoh di atas) hasil perhitungan tidak bisa membedakan antara antara acak dan reguler.

Contoh berikut sebaran pabrik penghasil limbah B3 di kecamatan-kecamatan di Banten. Ada 25 pabrik penghasil limbah B3 yang diamati penyebarannya pada 36 kecamatan di Banten



Gambar 4.5. Konfigurasi Keberadaan pabrik penghasil limbah B3 di 36 Kecamatan di Banten

Perhitungan :

$m = 36, N = 25$, maka

$$\bar{x} = \frac{N}{m} = 0.6944$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2}{m - 1} = 0.3325$$

$$VMR = \frac{S^2}{\bar{x}} = 0.4789$$

$$Z = \sqrt{(m - 1)/2} (VMR - 1) = \sqrt{(36 - 1)/2} (0.4789 - 1) = -2.18$$

Z hitung < -1.96 , artinya sebaran pabrik penghasil limbah B3 bersifat reguler

4.3. Kelemahan Metode Kuadran

Ada beberapa kelemahan metode kuadran, antara lain

a. Ukuran Kuadran

Ukuran kuadran sangat menentukan hasil analisis konfigurasi titik dalam ruang. Bila ukuran kuadran terlalu kecil sehingga mungkin hanya menampung satu titik setiap sel maka hasil analisis konfigurasi akan menghasilkan pola reguler. Demikian apabila ukuran sel terlalu besar sehingga menampung semua titik pada satu sel, maka hasil analisis konfigurasi akan cenderung berpola cluster.

b. Hasil perhitungan pada kuadran merupakan ukuran dispersi titik dalam ruang, bukan benar-benar konfigurasi titik dalam ruang. Hal ini disebabkan hasilnya merupakan pengukuran kepadatan titik dalam ruang, bukan bagaimana pengaturan konfigurasi antar titik.

*			
	*		
*		*	

	*		*
*		*	
	*		



Gambar 4.6. Dua Konfigurasi yang Berbeda, Hasil Perhitungan Kuadran Sama

- c. Hasil perhtungan tidak memperlihatkan variasi konfigurasi dalam wilayah atau dalam sel. Hasil perhitungan hanya menggambarkan keseluruhan distribusi titik dalam wilayah.

4.4. Uji Kebaikan Suai Khi Kuadrat

Uji kebaikan suai khi-kuadrat adalah alternatif metode untuk menentukan sebaran titik yang diamati secara spasial adalah random. $m_1 = \lambda$. dengan nilai dugaan \hat{m}_1 maka nilai harapan frekuensi adalah $NP(r)$ dimana:

$$NP(r) = N \exp(-\hat{m}_1) \frac{\hat{m}_1^r}{r!} \text{ dimana } r = 1, 2, \dots$$

$$\chi^2 = \sum_{r=0}^w \frac{(f_r - NP(r))^2}{NP(r)}$$

Dimana:

w = jumlah dari kelas frekuensi

f_r = jumlah observasi dalam kelas frekuensi

N = ukuran sample ($\sum_{r=0}^w f_r = N$)

$P(r)$ = peluang sebuah titik masuk ke kelas frekuensi ke r

H_0 = Proses menyebar acak

H_1 = Proses tidak menyebar acak

Contoh

Dari data Gambar 4.1. sebelumnya $M=52$ (banyaknya titik), $N=100$ (banyaknya grid)

Jumlah Titik per kuadran	Frekuensi			Frekuensi harapan dgn Poisson
	Perfect Regular	Random	Perfect Cluster	
0	48	59	99	59.45
1	52	32	0	30.92
2	0	7	0	8.04
3+	0	2	1	1.59
N	100	100	100	100
	-	0.08	64.96	
$P_{0.05}$	-	3.84	3.84	

Perfect Regular

$$\chi^2 = \frac{(48 - 59.45)^2}{59.45} + \frac{(52 - 30.92)^2}{30.92} + \frac{(0 - 8.04)^2}{8.04} + \frac{(0 - 1.59)^2}{1.59} = 26,21$$

Acak

$$\chi^2 = \frac{(59 - 59.45)^2}{59.45} + \frac{(32 - 30.92)^2}{30.92} + \frac{(7 - 8.04)^2}{8.04} + \frac{(2 - 1.59)^2}{1.59} = 0,2814$$

Cluster

$$\chi^2 = \frac{(99 - 59.45)^2}{59.45} + \frac{(0 - 30.92)^2}{30.92} + \frac{(0 - 8.04)^2}{8.04} + \frac{(1 - 1.59)^2}{1.59} = 65.49$$

4.5. Metode Tetangga Terdekat

Metode tetangga terdekat merupakan nilai rata-rata jarak antara titik pengamatan dengan tetangga terdekatnya dibandingkan dengan nilai harapan rata-rata jarak yang terjadi jika titik-titik tersebut menyebar spasial secara acak.

Tahapan yang dilakukan adalah sebagai berikut :

- a. Hitung Jarak terdekat titik-titik pengamatan dengan rumus

$$d_0 = \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{n}$$

d_i adalah jarak antara titik ke I dengan titik tetangga terdekatnya, n jumlah titik pada konfigurasi spasial

- b. Hitung nilai harapan jarak tetangga terdekat dengan rumus sebagai berikut :

$$d_e = \frac{1}{2\sqrt{n/A}}$$

A adalah luas wilayah studi

- c. Tentukan Indeks Tetangga Terdekat (ITT)

$$ITT = \frac{d_0}{d_e}$$

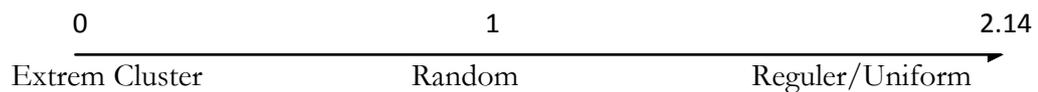
Interpretasi ITT secara teori adalah

$$0 \leq ITT \leq 2.14$$

ITT=0 artinya semua titik pada satu lokasi

ITT=1.00 konfigurasi titik dalam ruang adalah acak

ITT=2.14 konfigurasi perfect uniform atau perfect reguler atau perfect sistematik atau titik menyebar pada wilayah dengan luasan tak hingga



Hipotesisnya adalah

H_0 = Konfigurasi titik adalah acak

H_1 = Konfigurasi titik bukan acak

Standar error dari jarak rata-rata tetangga terdekat dari konfigurasi acak adalah

$$Se = \sqrt{\frac{(4 - \pi)A}{4\pi N^2}} = \frac{0.26136}{\sqrt{\frac{N^2}{A}}}$$

Z hitung adalah

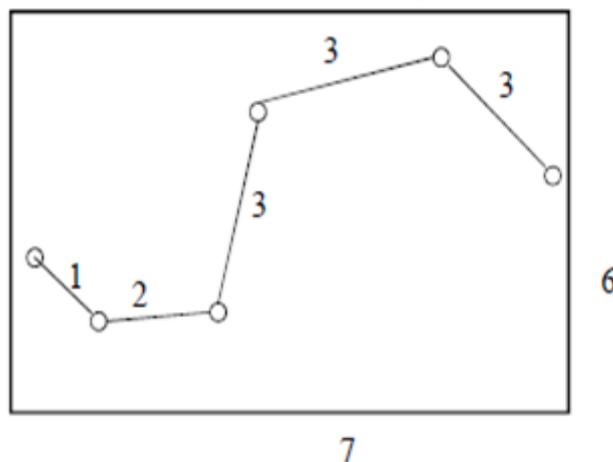
$$Z = \frac{d_0 - d_e}{Se}$$

Keputusan

- Z hitung > 1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau uniform
- Z hitung < -1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau cluster

Contoh

Misalkan suatu konfigurasi titik yang disajikan pada gambar berikut



Titik Pengamatan	Tetangga Terdekat	Jarak
1	2	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	3
6	5	3

$$d_0 = \sum_{i=1}^6 \frac{(1 + 1 + 2 + 3 + 3 + 3)}{6} = 2.167$$

$$d_e = \frac{1}{2\sqrt{6/(6 * 7)}} = 1.323$$

$$ITT = \frac{d_0}{d_e} = \frac{2.167}{1.323} = 1.638$$

(mengarah ke uniform atau reguler)

$$Se = \sqrt{\frac{(4 - \pi)A}{4\pi N^2}} = \frac{0.26136}{\sqrt{\frac{N^2}{A}}} = \frac{0.26136}{\sqrt{36/42}} = 0.2823$$

$$Z = \frac{d_0 - d_e}{Se} = \frac{2.167 - 1.323}{0.2823} = 2.9897$$

Keputusan

Z hitung > 1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau uniform

4.6. Daftar Pustaka

1. Baddeley, Adrian. 2008. *Analysing Spatial Point Patterns in R*. <http://www.csiro.au/resources/SpatialPoint-Patterns-in-R.html> (19 Juli 2009)
2. Crawley, Michael J. 2007. *The R Book*. Inggris : John Wiley & Sons, Ltd
3. Daniel, Wayne W. 1990. *Applied Nonparametric Statistics*. Boston : PWS-Kent Publishing Company
4. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
5. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
6. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd

BAB 5

FUNDAMENTAL DISTRIBUSI PELUANG

MUHAMMAD NUR AIDI

5.1. Pendahuluan

Untuk mendeteksi bagaimana konfigurasi titik dalam ruang apakah bersifat acak atau random, regular, ataupun *cluster* (kelompok); pertama-tama kita harus mendefinisikan terminologi matematika tentang bentuk distribusi peluang. Prosedure yang biasanya digunakan adalah Distribusi Peluang Poisson untuk mendeteksi tingkat keacakan. Selanjutnya kita akan mengembangkan distribusi ini untuk menganalisis ketidak acakan.

5.2. Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok (*Cluster*).

Bayangkan suatu wilayah studi yang di grid dengan sel berbentuk segi empat. Asumsikan pada saat awal ($t=0$) tidak ada sel yang berisi sembarang titik, dan $p(r,t)$ adalah peluang sebuah sel grid mempunyai r titik selama waktu t . Asumsi : selama selang waktu ($t, t+dt$) sebuah titik menempati sebuah sel tertentu dimana telah mempunyai r titik dengan peluang $f(r,t) dt$ dan bahwa selang waktu tersebut adalah cukup pendek untuk tidak lebih dari satu titik untuk menempati satu sel yang diberikan pada selang waktu tersebut.

$$p(0, t+dt) = p(0,t) [1-f(0,t) dt]$$

$$p(r, t+dt) = p(r,t) [1-f(r,t) dt] + p(r-1, t) f(r-1, t) dt \text{ dimana } r=1,2,3,\dots$$

dan kiri-kanan dikurangi $p(r,t)$ dan dibagi dengan dt dalam limit $dt \rightarrow 0$, maka

$$\frac{d}{dt} p(0, t) = - f(0,t) p(0,t)$$

$$\frac{d}{dt} p(r, t) = -f(r, t) p(r, t) + f(r-1, t) p(r-1, t) \quad (r=1, 2, 3, \dots)$$

Persamaan $\frac{d}{dt} p(0, t) = - f(0,t) p(0,t)$ dikalikan dengan s^0 , persamaan $-f(r, t) p(r, t)$ dikalikan s dan persamaan $f(r-1, t) p(r-1, t)$ dikalikan dengan s^2 dan secara umum s^{n-1} ke n .

Penjumlahan :

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r \right] = (s - 1) \left[\sum_{r=0}^{\infty} f(r, t) p(r, t) s^r \right]$$

Dan lebih kompak

$$\frac{d}{dt} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$$

dimana $G(s;t) = [\sum_{r=0}^{\infty} p(r,t) s^r]$ adalah peluang fungsi momen dengan peubah r dan

$$L(s;t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r,t) p(r,t) s^r$$

Untuk menemukan $G(s;t)$ kita harus memecahkan persamaan diferensial pada $\frac{d}{dt} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$. Hasil distribusi apakah acak, regular atau kelompok tergantung pada asumsi yang dibuat pada $f(r,t)$. Catatan $f(r,t)$ adalah sebuah peluang dan satu kesatuan dengan nilai r .

Perlu ditekankan peluang bahwa sebuah sel dengan r titik telah didapatkan dan satu titik lagi masuk pada selang waktu $(t, t+dt)$. Jika peluang ini adalah independen terhadap titik-titik yang ada dalam sel, maka dikenal sebagai *random dispersion*. Pada sisi lain peluang ini menurun pada saat jumlah titik dalam sel meningkat didefinisikan sebagai disperse *spasial yang regular*. Terakhir, jika peluang meningkat seiring dengan meningkatnya jumlah titik yang ada dalam sel dikenal sebagai *disperse spasial "Cluster"*.

5.3. Dispersi Spasial Acak/Random : Distribusi Poisson

Asumsikan : peluang bahwa sebuah sel menerima satu titik dalam selang waktu $(t, t+dt)$ adalah benar-benar independen dari sejumlah titik yang telah ada dalam sel.

Maka

$$f(r,t) = f(t)$$

$$L(s;t) = \sum_{r=0}^{\infty} f(r,t) p(r,t) s^r = f(t) G(s;t)$$

Persamaan $\frac{d}{dt} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$ menjadi $\frac{d}{dt} G(s;t) = (s-1) f(t) G(s;t)$

dan solusi

$$G(s;t) = \exp [(s-1) \int_0^t f(t') dt']$$

Untuk sembarang titik dalam waktu \vec{t}

$$G(s; \vec{t}) = G(s) = \exp [\lambda a (s - 1)]$$

Dimana $\lambda a = \int_0^{\vec{t}} f(t') dt'$

Persamaan $G(s; \vec{t}) = G(s) = \exp [\lambda a(s - 1)]$ adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson dengan parameter λa . Dengan demikian

$$p(r, \vec{t}) = p(r) = \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} \quad r=0, 1, 2, \dots$$

Untuk mengecek fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r$$

Maka

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} \exp(-\lambda a) \frac{(\lambda a)^r}{r!} s^r = \exp(-\lambda a) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\lambda a)^r}{r!} \\ &= \exp(-\lambda a) \exp(\lambda a s) \\ &= \exp[\lambda a(s - 1)] \end{aligned}$$

Dengan menggunakan hubungan yang standar

$$\text{Exp}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Dengan hubungan yang telah dikenal

$$E[r] = m_1 = \frac{\partial}{\partial s} G(s) \Big|_{s=1} = G'(1)$$

Dan

$$\text{Var}(r) = m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

Maka

$$\begin{aligned} G'(s) &= \lambda a \exp[\lambda a(s - 1)] \\ m_1 = G'(1) &= \lambda a \exp(0) = \lambda a \\ G''(s) &= (\lambda a)^2 \exp[\lambda a(s - 1)] \\ G''(1) &= (\lambda a)^2 \end{aligned}$$

Maka

$$m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = (\lambda a)^2 + \lambda a - (\lambda a)^2 = \lambda a$$

5.4. Dispersi Spasial Reguler : Distribusi Binomial

Asumsi :

Peluang bahwa sebuah titik menempati ke dalam sebuah sel adalah independen terhadap waktu dan peluangnya menurun secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

Secara khusus, katakanlah c/b adalah integer dan

$$f(r, t) = \begin{cases} c - br & \text{untuk } c > br \geq 0 \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Maka

$$\begin{aligned} L(s;t) &= \sum_{r=0}^{\infty} (c - br) p(r, t) s^r = c \sum_{r=0}^{\infty} p(r, t) s^r - b \sum_{r=0}^{\infty} (r) p(r, t) s^r \\ &= c G(s;t) - bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t) \end{aligned}$$

Maka persamaan $\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$ menjadi

$$\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) [c G(s;t) - bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t)]$$

Dengan solusinya :

$$G(s;t) = \{ \exp(-bt) - [\exp(-bt) - 1]s \}^{c/b}$$

Dengan demikian untuk sembarang titik dalam \vec{t} waktu kita dapat mensubstitusikan

$$p = 1 - \exp(-b \vec{t}) \text{ dan } n = c/b$$

Untuk mendapatkan

$$G(s;t) = G(s) = (1-p+ps)^n$$

Persamaan $G(s;t) = G(s) = (1-p+ps)^n$ merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial

$$p(t) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \quad r=0, 1, 2, \dots, n$$

Untuk *check* apakah persamaan di atas fungsi pembangkit momen dari binomial

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} s^r \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} (ps)^r (1-p)^{n-r} \\ &= (1-p+ps)^n \end{aligned}$$

Turunan dari

$$G'(s) = n p (1-p+ps)^{(n-1)}$$

$$G'(1) = np (1) = np$$

$$E(r) = G'(1) = np$$

$$G''(s) = np(n-1)p(1-p+ps)^{n-2}$$

$$G''(1) = n(n-1) p^2$$

$$\text{Var}(r) = m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2$$

$$= n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

$$= np(1-p)$$

Perhatikan

$$\frac{\text{var}(r)}{\bar{x}} = \frac{np(1-p)}{np} = 1-p$$

Yang mana lebih kecil dari 1.

Bila n besar dan p kecil, maka, jika $n \rightarrow \infty$ dan $p \rightarrow 0$ maka $np = \lambda a$. Dengan demikian sebaran Poisson cukup rasional sebagai pendekatan sebaran Binomial.

Bukti :

$$G(s) = (1-p+ps)^n$$

Jika jika $n \rightarrow \infty$ dan $p \rightarrow 0$ dan $np = \lambda a$ adalah fix

$$(1-p+ps)^n \left[1 - \frac{\lambda a(1-s)}{n} \right]^n$$

Dan

$$\lim_{n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \left[1 - \frac{\lambda a(1-s)}{n} \right]^n = \exp [\lambda a(s-1)]$$

5.5. Dispersi Spasial Cluster (Kelompok) :Distribusi Binomial Negatif

Asumsi :

Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel adalah independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

$$f(r,t) = c + br \quad (c > 0, b > 0)$$

Maka

$$L(s;t) = \sum_{r=0}^{\infty} (c + br)p(r,t)s^r = c \sum_{r=0}^{\infty} p(r,t)s^r + b \sum_{r=0}^{\infty} r p(r,t)s^r$$

$$= c G(s;t) + bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t)$$

Dan persamaan $\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) L(s;t)$ menjadi

$$\frac{\partial}{\partial s} G(s;t) = (s-1) [cG(s;t) + bs \frac{\partial}{\partial s} G(s;t)]$$

Dengan solusi

$$G(s;t) = [\exp bt - (\exp bt - 1)s]^{-c/b}$$

Untuk sembarang titik dalam \vec{t} waktu, kita melakukan substitusi

$$p = \exp b\vec{t} - 1 \text{ dan } k = c/b$$

Maka

$$G(s;t) = G(s) = (1+p-ps)^{-k}$$

Persamaan $G(s;t) = G(s) = (1+p-ps)^{-k}$ merupakan fungsi pembangkit momen distribusi binomial negative

$$p(r) = \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k$$

kita menghitung fungsi pembangkit momen

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} p(r) s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left(\frac{p}{1+p}\right)^r \left(\frac{1}{1+p}\right)^k s^r$$

$$= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \sum_{r=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{r} \left[\left(\frac{p}{1+p}\right) s\right]^r$$

$$= \left(\frac{1}{1+p}\right)^k \left[1 - \left(\frac{p}{1+p}\right) s\right]^{-k} = (1+p-ps)^{-k}$$

Turunan $G(s)$ untuk mendapatkan rata-rata dan varian

$$E(r) = m_1 = G'(1) = kp$$

Dan

$$\text{Var}(r) = m_2 = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = kp(1+p)$$

Catatan

$$\frac{\text{var}}{\bar{x}} > 1$$

Ketika k besar dan p kecil, $k \rightarrow \infty$ & $p \rightarrow 0$

Maka $kp = \lambda a$ fix

Maka

$$(1+p-ps)^{-k} = \left[1 + \frac{\lambda a(1-s)}{a}\right]^{-k}$$

Dan

$$\lim_{k \rightarrow \infty, p \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\lambda a(1-s)}{a} \right]^{-k} = \frac{1}{\exp(\lambda a(1-s))} = \exp \lambda a(s-1)$$

Yang merupakan fungsi pembangkit momen poisson

5.6. Daftar Pustaka

1. Engelhardt, M. and L.J. Bain. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Ed. PWS-Kent Pub., Boston.
2. Ghahramani, S. 1996. *Fundamentals of Probability*. Prentice Hall, New Jersey.
3. Golberg, S. 1962. Probability. An Introduction. Printice-Hall, Inc. Englewood Cliff, New York
4. Hogg, R.V, and A.T. Craig, 2005. Introduction to Mathematical Statistics. 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
5. Hogg, R.V and E.A. Tanis. 2001. Probability and Statistical Inference, 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
6. Hurtsbinger, D.V. dan P. P. Bilingsley. 1987. *Element of Statistical Inference*. 6th ed. Allyn and Bacon. Boston.
7. Koopmans, L. H. 1987. *Introduction to Contemporary Statistical Methods 2nd ed*. Duxbury Press. Boston.
8. Larson, H. J. 1969. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. John Wiley and Sons, New York
9. Mendenhall, W., Wackerly, D. D., & Scheaffer, R. L. 1990. *Mathematical Statistics with Applications*. Fourth ed. PWS Kent Publishing Co, Boston.
10. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
11. Ross, S. 1989. A First Course in Probability. Macmillian Publishing Company. New York
12. Scheaffer, R.L. 1990. *Introduction to Probability and Applications*. PWS Kent, Boston.
13. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
14. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd
15. Walpole, R.E, Myers, R.H, Myers, S.L, & Ye, K. 2002. Probability & Statistics for Engineers & Scientist 7th edition. Prentica Hall. New Jersey.

BAB 6

PENDUGAAN PARAMETER

MUHAMMAD NUR AIDI

6.1 Pendahuluan

Analisis dengan metode kuadran memiliki dua pendekatan teori: Deduktif dan Induktif. Pendekatan deduktif diawali dengan adanya data empirik kemudian dianalisis agar didapatkan pola sebaran yang akhirnya berakhir pada kesimpulan pola konfigurasi (*pattern*). Sebaliknya pendekatan induktif berawal dari analisis sebaran sampai pada pola *pattern* titik-titik yang dihasilkan oleh sebaran tersebut dan merupakan landasan teori untuk analisis data empirik. Salah satu pokok bahasan dari analisis dengan pendekatan induktif adalah masalah Pendugaan Parameter.

Metode pendugaan parameter yang dilakukan pada pembahasan ini adalah penurunan rumus pendugaan parameter dari berbagai jenis sebaran. Sebagaimana diketahui bahwa dengan metode deduktif (dalam pembahasan *Compound and generalized distributions*) diperoleh kesimpulan bahwa jenis sebaran titik merupakan representasi dari pola *pattern*. Misalnya titik-titik pengamatan memiliki sebaran poisson, maka ia memiliki pola random, kemudian secara berurutan sebaran poisson-binomial, Neyman Type A, Poisson Negative Binomial, Negative Binomial, titik-titik pengamatan tersebut semakin memiliki pola kluster.

Oleh karena itu diperlukan penduga parameter dari sebaran-sebaran tersebut agar dapat dilakukan perhitungan, yaitu perhitungan data empirik agar dapat diduga bentuk sebarannya. Metode pendugaan parameter dilakukan dengan dua cara : metode momen dan maksimum Likelihood, karena dua metode tersebut dikenal memiliki penduga tak bias. Untuk metode momen memiliki keunggulan lebih mudah dalam menurunkan rumus penduga parameternya, namun maksimum likelihood juga dikenal memiliki penduga yang efisien dari sekian banyak penduga yang ada, walaupun kadang tidak mudah untuk mencari bentuk rumus penduganya.

6.2 Penduga Momen

Untuk memudahkan pencarian penduga parameter dengan metode momen, perlu dilakukan penyederhanaan prosedur yaitu dengan mencari bentuk-bentuk hubungan yang lebih sederhana. Penduga momen diturunkan melalui Fungsi Pembangkit Peluang dari sebuah sebaran (*Distribution's Generating Function* – p.g.f) dengan rumus umum :

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} P(r)S^r \quad (1)$$

Dari bentuk tersebut kemudian dicari hubungan untuk memudahkan perhitungan penduga parameter dari berbagai bentuk sebaran sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G'(1) &= \frac{d}{ds} G(s)|_{s=1} = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r)(1)^{r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r) = m_1 \\ G''(1) &= \frac{d^2}{ds^2} G(s)|_{s=1} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r)(1)^{r-2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r) \\ &= m_2' - m_1 \\ &= m_2 + m_1^2 - m_1 \text{ (lihat catatan di bawah)} \end{aligned} \quad (2)$$

Catatan:

m_2 : momen ke-2 terhadap nilai tengahnya (m_1)

m_2' : momen ke-2 terhadap titik nol

$$m_2 = E(r^2) - [E(r)]^2$$

$$m_2' = E(r^2) - [0]^2 = E(r^2) = \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r)]$$

$$m_2 = m_2' - m_1^2 \quad \rightarrow m_2' = m_2 + m_1^2$$

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r)(1)^{r-2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r) - rP(r)] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r)] - \sum_{r=0}^{\infty} rP(r) \\ &= m_2' - m_1 \\ &= m_2 + m_1^2 - m_1 \end{aligned}$$

Dari hubungan di atas, momen k-1 (m_1) dan momen ke-2 (m_2) dapat peroleh sebagai berikut :

$$G'(1) = m_1 \rightarrow m_1 = G'(1)$$

$$G''(1) = m_2 + m_1^2 - m_1 \rightarrow m_2 = G''(1) - m_1^2 + m_1 = G''(1) - [G'(1)]^2 + G'(1)$$

Jika k_1, k_2, k_3 adalah parameter sebaran teoritik yang tidak diketahui, maka :

$$\hat{m}_1(k_1, k_2, k_3) = u_1 = \hat{m}_1 \text{ dimana } u_1 \text{ adalah nilai tengah sampel dimana :}$$

$$u_1 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^W r f_r \text{ dan } N = \sum_{r=0}^W f_r \text{ (W adalah frekuensi pengamatan terbesar, } f_r \text{ adalah frekuensi dan } r_i \text{ adalah frekuensi kelas ke-}i\text{)}$$

6.3. Penduga Maksimum Likelihood

Penduga maksimum Likelihood diperoleh dengan cara memaksimumkan fungsi Likelihood dari fungsi sebaran peluang teoritik $[P(r)]$ dimana fungsi

$$\text{Likelihoodnya adalah : } L(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \prod_{r=0}^W [P(r)]^{f_r} \quad (3)$$

W adalah frekuensi pengamatan terbesar, $f_w \neq 0$ dan $f_r = 0$ untuk semua $r > W$. Kemudian untuk mendapatkan nilai maksimum dari fungsi likelihood di atas, maka fungsi harus diturunkan pada orde pertama terhadap parameter k dan dicari penyelesaiannya jika fungsi turunan tersebut sama dengan nol. Jika dituliskan notasinya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_1} \ln L &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \ln L &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_3} \ln L &= 0 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \frac{\partial}{\partial k_n} \ln L &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \sum_r \ln [p(r)]^{f_r} \right\} &= 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ atau} \\ \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

Namun dalam banyak kasus, fungsi di atas masih sulit untuk diselesaikan sehingga seringkali untuk menyelesaikan persamaan tersebut harus menggunakan prosedur iterasi pendekatan.

Dengan demikian, untuk mencari penduga parameter dapat digunakan dengan dua metode di atas dengan rumus yang telah disederhanakan. Berikut ini adalah proses pencarian penduga parameter untuk berbagai fungsi sebaran :

6.4. Sebaran Poisson

6.4.1 Metode Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Poisson adalah $G(s) = e^{v(s-1)}$. Maka dengan memanfaatkan persamaan hubungan momen dengan fungsi turunannya sebagaimana dijelaskan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= G'(1) \\
 \ln G(1) &= \ln e^{v(s-1)} \\
 \frac{\partial}{\partial s} G(1) &= \frac{\partial}{\partial s} [V(s-1) \ln e] \\
 \frac{G'(1)}{G(1)} &= v \\
 G'(1) &= vG(1) \\
 G'(1) &= ve^{v(1-1)} \\
 G'(1) &= ve^0 \\
 G'(1) &= v
 \end{aligned} \tag{7}$$

Jadi penduga momen untuk $\hat{v} = \hat{m}_1$

6.4.2. Metode Maksimum Likelihood

Fungsi peluang sebaran Poisson adalah : $P(r) = e^{-v} \frac{(v)^r}{r!}$ dan turunan pertama $P(r)$ adalah : $\frac{\partial}{\partial v} P(r) = \frac{r}{v} P(r) - P(r)$. Maka dengan memanfaatkan model persamaan Fungsi Maksimum Likelihood yang telah disederhanakan dapat diperoleh nilai dugaan parameter v sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \\
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \left[\frac{r}{v} P(r) - P(r) \right] &= 0 \\
 \sum_r f_r \left[\frac{r}{v} - 1 \right] &= 0 \\
 \sum_r f_r \left[\frac{r}{v} \right] &= \sum_r f_r
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v} &= \sum_r r f_r / \sum_r f_r \\
\hat{v} &= \sum_r r f_r / N \\
\hat{v} &= \widehat{m}_1
\end{aligned} \tag{8}$$

Catatan:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \frac{v^r}{r!} \\
\ln \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \frac{v^r}{r!} \right] \\
\frac{\partial}{\partial v} \ln P(r) &= \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \right] + \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} v^r \right] - \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} r! \right] \\
P'(r) / P(r) &= -1 + r \frac{\partial}{\partial v} \ln v - 0 \\
P'(r) / P(r) &= -1 + r / v \\
P'(r) &= P(r) [r / v - 1] \\
P'(r) &= \frac{r}{v} P(r) - P(r)
\end{aligned}$$

Jadi penduga parameter untuk sebaran poisson baik dengan menggunakan metode momen maupun maksimum likelihood adalah sama yaitu \widehat{m}_1 .

6.5. Sebaran Binomial

6.5.1 Metode momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran binomial adalah $G(s) = (1 - p + ps)^n$ dimana n adalah bilangan bulat positif. Maka penduga parameter untuk p adalah $G'(1)$ atau m_1 dan jika dilakukan perhitungan adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
G(s) &= (1 - p + ps)^n \\
G'(s) &= n(1 - p + ps)^{n-1} \frac{\partial}{\partial s} (1 - p + ps) \text{ (ingat aturan rantai untuk turunan)} \\
G'(1) &= n(1 - p + p \cdot 1)^{n-1} p \\
G'(1) &= n(1)^{n-1} p \\
G'(1) &= np \\
\widehat{m}_1 &= n\hat{p} \\
\hat{p} &= \frac{\widehat{m}_1}{n} = \frac{\widehat{m}_1}{w}
\end{aligned} \tag{9}$$

6.5.2 Metode Maksimum Likelihood

Sebaran binomial memiliki fungsi peluang $P(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$ sedangkan $P'(r)$ adalah :

$$\begin{aligned}
 P(r) &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\
 \ln P(r) &= \ln \binom{n}{r} + \ln p^r + \ln (1-p)^{n-r} \\
 \frac{\partial}{\partial p} P(r) &= \frac{\partial}{\partial p} \left[\ln \binom{n}{r} + \ln p^r + \ln (1-p)^{n-r} \right] \\
 P'(r)/P(r) &= 0 + r \frac{\partial}{\partial p} \ln p + (n-r) \frac{\partial}{\partial p} \ln(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= 0 + r/p + (n-r)/(1-p) (-1) \\
 P'(r)/P(r) &= r/p - (n-r)/(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= [r(1-p) - p(n-r)]/p(1-p) \quad \dots\dots\text{penyamaan penyebut} \\
 P'(r)/P(r) &= [(r-rp) - (np+rp)]/p(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= (r-np)/p(1-p) \\
 P'(r) &= [(r-np)/p(1-p)] P(r) \tag{10}
 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) di atas diperoleh nilai dugaan parameter :

$$\begin{aligned}
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \\
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} [(r-np)/p(1-p)] P(r) &= 0 \\
 \sum_r f_r [(r-np)/p(1-p)] &= 0 \\
 \sum_r f_r [(r-np)] &= 0 \\
 \sum_r r f_r - \sum_r n p &= 0 \\
 \sum_r r f_r &= \sum_r n p \\
 n \hat{p} &= \sum_r r f_r / \sum_r f_r \\
 n \hat{p} &= \widehat{m}_1 \\
 \hat{p} &= \widehat{m}_1/n = \widehat{m}_1/w \tag{11}
 \end{aligned}$$

Jadi penduga parameter untuk sebaran Binomial baik dengan menggunakan metode momen maupun maksimum likelihood adalah sama yaitu \widehat{m}_1/w .

6.6. Sebaran Binomial Negatif

6.6.1 Penduga Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Binomial Negatif adalah sebagai berikut:

$$G(s) = (1 + p - ps)^{-k} \quad (12)$$

Maka dengan metode momen jika $p=w/k$ maka dapat dituliskan

$$G(s) = \left(1 + \frac{w}{k} - \frac{ws}{k}\right)^{-k} \quad (13)$$

Kemudian dicari penduga parameter untuk w dan k dengan pendekatan momen-1 dan momen-2:

$$\frac{d}{ds}G(s) = w\left(1 + \frac{w}{k} - \frac{ws}{k}\right)^{-(k+1)}$$

$$G'(1) = w$$

$$G''(1) = \frac{w^2(k+1)}{k} = w^2 + \frac{w^2}{k}$$

$$m_1 = w$$

$$m_2 = w^2 + \frac{w^2}{k} - w^2 + w = w + \frac{w^2}{k}$$

$$\widehat{w} = \widehat{m}_1$$

$$\widehat{k} = \frac{\widehat{m}_1^2}{\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1} \quad (14)$$

6.6.2. Maksimum Likelihood

Fungsi sebaran peluang untuk sebaran binomial negatif adalah :

$$P(r) = \frac{k(k+1) \dots (k+r-1)}{r!} \left(\frac{k}{w+k}\right)^k \left(\frac{w}{w+k}\right)^r \quad (15)$$

Maka dengan menggunakan metode maksimum likelihood fungsi tersebut dicari turunan pertamanya dulu:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial w} P(r) &= \frac{r}{w} P(r) - \frac{r+k}{w+k} P(r) = \frac{r(w+k) - w(w+k)}{w(w+k)} P(r) \\ &= \frac{k}{w+k} \left(\frac{r}{w} - 1 \right) P(r)\end{aligned}\quad (16)$$

Setelah itu dicari penduga parameternya dengan fungsi maksimum likelihood yang sudah disederhanakan :

$$\begin{aligned}\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= 0 \\ \frac{k}{w+k} \sum_r \left(\frac{r}{w} - 1 \right) f_r &= 0 \\ \widehat{w} &= \frac{\sum_r r f_r}{\sum_r f_r} = \widehat{m}_1 \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P(r)}{k+i} + P(r) \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) + \left(1 - \frac{k+r}{w+k} \right) P(r) \\ \sum_r f_r \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{1}{k+i} \right) & \\ &+ \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) \sum_r f_r + \frac{1}{w+k} \sum_r f_r (w-r) \\ &= 0\end{aligned}\quad (17)$$

Untuk memecahkan persamaan di atas digunakan aturan deret hingga sehingga bentuk persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned}\sum_r f_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{k+i} & \\ &= f_1 \left(\frac{1}{k} \right) + f_2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) + \dots \\ &+ f_w \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+w-1} \right) \\ &= \frac{1}{k} (f_1 + f_2 + \dots + f_w) + \frac{1}{k+1} (f_1 + f_2 + \dots + f_w) + \dots \\ &+ \frac{1}{k+w-1} f_w\end{aligned}\quad (18)$$

Ingat Deret Hingga

$$S_r = f_{r+1} + f_{r+1} + \dots + f_w = \sum_{i=r+1}^w f_i \quad (r = 0, 1, \dots, w)$$

$$\sum_{r=0}^{w-1} \frac{S_r}{k+r} + N \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) = 0 = Q(k)$$

Untuk memperoleh nilai k diperlukan aproksimasi dengan Newton-Raphson:

$$k_2 = k_1 - \frac{Q(k_1)}{Q'(k_1)}$$

$$Q'(k) = N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+w} \right) - \sum_{r=0}^{w-1} \frac{S_r}{(k+r)^2}$$

Akhirnya diperoleh hasil yang sama dengan metode momen untuk penduga parameter K

$$\hat{k} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1} \quad (19)$$

6.6.3 Efisiensi Penduga Parameter

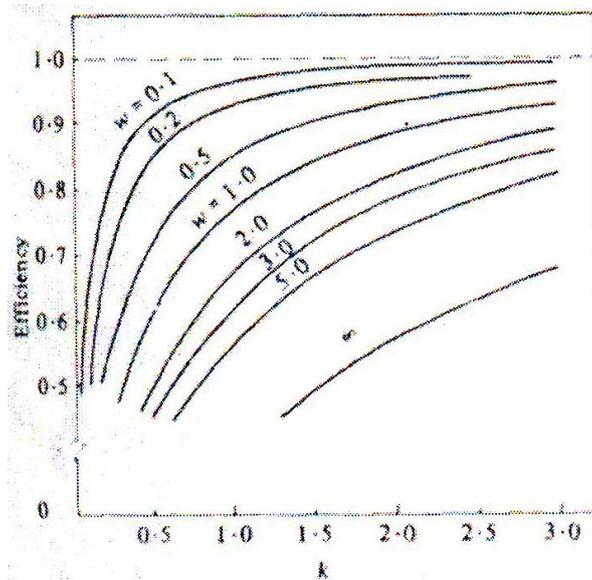
Jika dibandingkan antara metode momen dan maksimum likelihood dalam mencari penduga parameter untuk sebaran binomial negatif dapat dihitung sebagaimana tabel di bawah, kesimpulannya tingkat efisiensi tergantung nilai w dan k, semakin tinggi nilai w dan k maka metode maksimum likelihood sangat efisien dibandingkan dengan metode momen

Tabel 6.1. Efisiensi penduga parameter untuk metode momen dan maksimum likelihood

Jumlah poin tiap sel	Jumlah sel yang diobservasi	NB (mom) $\hat{w} = 0.5200$ $\hat{k} = 0.6781$	NB (mle) $\hat{w} = 0.5200$ $\hat{k} = 0.7352$
0	67	67.98	67.48
1	23	20.01	20.55
2	5	7.29	7.39
3	2	} 2.82 1.13 0.78	} 2.79 1.08 0.70
4	2		
5+	1		
Total sel = 100			
Total poin = 52			

$X^2 =$		$[2.05]^a$	$[2.12]^a$
$\hat{m}_1 = 0.5200 ;$	$\hat{m}_2 = 0.9188$		
$P_{0.05} =$		5.99	5.99
$\hat{m}_2/\hat{m}_1 = 1.7669$			

^a $[X^2] = X^2$ statistic computed with grouping \geq instead of ≥ 5



Gambar 6.1 Efisiensi dari Metode Penduga Momen k untuk Sebaran Binomial Negatif

6.7. Sebaran Neyman Type A

6.7.1 Penduga Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Neyman Type A adalah sebagai berikut :

$$G(s) = \exp\{v\{\exp[a(s-1)] - 1\}\}$$

$$\frac{d}{ds}G(s) = va \exp[a(s-1)]G(s)$$

$$G'(1) = va$$

$$m_1 = va$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{\hat{m}_1} \quad (20)$$

$$G''(1) = va(a + va)$$

$$m_2 = va(a + 1)$$

$$\hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{a}} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1} \quad (21)$$

6.7.2 Penduga Maksimum Likelihood

Fungsi sebaran peuan Neyman Type A :

$$P(r) = \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} [v \exp(-a)]^i \quad (22)$$

Agar dapat diperoleh penduga parameter melalui maksimum likelihood dicari turunan pertamanya :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= -P(r) + \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} i \exp(-a) [v \exp(-a)]^{i-1} \\ &= -P(r) + \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^{r+1}}{i!} \frac{[v \exp(-a)]^i}{v} \\ &= -P(r) + \frac{r+1}{va} \exp(-v) \frac{a^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^{r+1}}{i!} [v \exp(-a)]^i \\ &= -P(r) + \frac{r+1}{va} P(r+1) \frac{\partial}{\partial a} P(r) \\ &= \frac{r}{a} P(r) \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} i [-v \exp(-a)] [v \exp(-a)]^{i-1} \\ &= \frac{r}{a} P(r) - \frac{r+1}{a} P(r+1) \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \sum_r f_r \left[-1 + \frac{r+1}{va} \frac{P(r+1)}{P(r)} \right] \\ &= -N + \frac{1}{va} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} = 0 \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial a} P(r) &= \sum_r f_r \left[\frac{r}{a} - \frac{r+1}{a} \frac{P(r+1)}{P(r)} \right] \\ &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r - \frac{1}{a} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} = 0 \\ &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r - Nv = 0 \\ va &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r = \hat{m}_1 \\ va &= \hat{m}_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_r f_r H_r - N \hat{m}_1 &= 0 \\
Q(a) &= \sum_r f_r H_r(a) - N \hat{m}_1 = 0 \\
\frac{d}{da} P(r) &= \frac{\partial}{\partial a} P(r) + \frac{\partial}{\partial v \partial} [P(r)] \frac{dv}{da} = \frac{\partial}{\partial a} P(r) - \frac{\hat{m}_1}{a^2} \frac{\partial}{\partial v} P(r) \\
\frac{d}{da} P(r) &= \frac{rP(r) - (r+1)P(r+1)}{a} + \frac{\hat{m}_1 P(r) - (r+1)P(r+1)}{a^2} \\
\frac{d}{da} H_r &= \frac{r+1}{a} \frac{P(r+1)}{P(r)} \\
&\quad + \frac{a+1}{a^2} \left[\frac{(r+1)^2 P^2(r+1)}{P^2(r)} - \frac{(r+1)(r+2)(r+2)}{P(r)} \right] \\
&= H_r \left[\frac{1}{a} - \frac{a+1}{a^2} (H_{r+1} - H_r) \right] \\
Q'(a) &= \sum_r f_r \frac{d}{da} H_r \\
&= \sum_r f_r H_r \left[\frac{1}{a} - \frac{a+1}{a^2} (H_{r+1} - H_r) \right] \tag{23}
\end{aligned}$$

6.7.3 Efisiensi Penduga Momen dan Maksimum Likelihood pada sebaran Neyman Type A

Kebalikan dari sebaran negatif binomial, pada Neyman Type A semakin besar nilai dugaan parameternya, maka tingkat efisiensi penduga maksimum likelihood semakin melemah.

6.8. Sebaran Poisson-Binomial

6.8.1 Penduga Momen

P.g.f dari sebaran poisson-binomial adalah

$$G(s) = \exp\{v[(1-p+ps)^n - 1]\}$$

Dimana n adalah integer positif. Karena sebaran ini sering konvergen terhadap sebaran Neyman Type A di mana n meningkat, dan sejak n adalah integer, kebanyakan aplikasi-aplikasi dari Piosson-binomial mengasumsikan n

menjadi a data dan bukan parameter yang tidak diketahui untuk pendugaan ⁽¹⁰⁾.

Biasanya n diasumsikan sama dengan 2 atau 4.

Maka dari itu kita mendapatkan bahwa

$$\frac{d}{ds}G(s) = vnp(1-p+ps)^{n-1}G(s)$$

$$G'(1) = vnp$$

$$G''(1) = vnp[(n-1)p + vnp]$$

Karena itu

$$m_1 = vnp \quad (24)$$

$$m_2 = vnp[1(n-1)p] \quad (25)$$

Dan penduga momen adalah

$$p = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{(n-1)\hat{m}_1} \quad (26)$$

$$\hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{n\hat{p}} = \frac{n-1}{n} \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}$$

6.8.2. Penduga Kemungkinan Maksimum Likelihood

Untuk Sebaran Poisson-binomial

$$P(r) = \exp(-v) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r}$$

dimana

$$\binom{ni}{r} = \frac{(ni)!}{(ni-r)!r!}$$

Akan kita lihat nanti,asumsi yang sama tidak diambil secara umum untuk sebaran negatif Poisson-binomial

Pada berikut ini kita akan membutuhkan untuk menggunakan identitas

$$\begin{aligned} (ni-r) \binom{ni}{r} &= \frac{(ni)! (ni-r)}{(ni-r)!r!} = \frac{(ni)! (r+1)}{(ni-r-1)! (r+1)!} \\ &= (r+1) \binom{ni}{r+1} \end{aligned} \quad (27)$$

Kita mulai dengan menghitung penurunan parsial dari $P(r)$:

$$\frac{\partial}{\partial v} P(r) = -P(r) + \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{iv^{i-1}}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r}$$

$$= -P(r) + \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i (n-1) + r}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r}$$

Menggunakan identitas pada persamaan (27) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= -P(r) \\ &+ \frac{\exp(-v)}{vn} (r+1) \frac{1-p}{p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r+1} p^{r+1} (1-p)^{ni-r-1} \\ &+ \frac{r \exp(-v)}{vn} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r} \\ &= -P(r) + \frac{(r+1)(1-p)}{vnp} P(r+1) + \frac{r}{vn} P(r) \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} P(r) &= \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} \left[\frac{r}{p} - \frac{ni-r}{(1-p)} \right] p^r (1-p)^{ni-r} \\ &= \frac{r}{p} P(r) - \frac{r+1}{p} P(r+1) \end{aligned} \quad (29)$$

Maka dari itu persamaan kemungkinan maksimum bisa dijelaskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial (v)} P(r) \\ &= - \sum_r f_r + \frac{(1-p)}{vnp} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} \\ &+ \frac{1}{vn} \sum_r f_r = 0 \end{aligned}$$

Misalkan

$$H_r = (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} \quad \text{dan} \quad \sum_r r f_r = \hat{m}_1 \sum_r f_r = N \hat{m}_1 .$$

Maka

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = -N + \frac{N \hat{m}_1}{vn} + \frac{(1-p)}{vnp} \sum_r f_r H_r = 0 \quad (30)$$

Dengan cara yang sama

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial p} P(r) = \frac{1}{p} \sum_r f_r - \frac{1}{p} \sum_r f_r H_r = 0$$

Atau

$$\frac{N\hat{m}_1}{p} - \frac{1}{p} \sum_r f_r = 0$$

Yang akan menghasilkan

$$\sum_r f_r H_r - N\hat{m}_1 = 0$$

Ganti persamaan (20) $\sum_r f_r H_r$ dengan \hat{m}_1 , kita akan mendapatkan

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = -N + \frac{N\hat{m}_1}{vn} + \frac{(1-p)}{vnp} N\hat{m}_1 = N \left(-1 + \frac{\hat{m}_1}{vnp} \right) = 0$$

Maka dari itu penduga kemungkinan maksimum adalah solusi bagi sistem persamaan berikut:

$$vnp = \hat{m}_1, \quad (31)$$

$$\sum_r f_r H_r - N\hat{m}_1 = 0 \quad (32)$$

Perhatikan bahwa persamaan (31) sama dengan persamaan momen pertama, dan persamaan (32) menghasilkan persamaan yang mirip dengan persamaan (21).

Menentukan $H_r(p)$ untuk nilai H_r dimana $v = \hat{m}_1 / np$, kita dapatkan

$$Q(p) = \sum_r f_r H_r - N\hat{m}_1 = 0, \quad (33)$$

Dan, seperti sebelumnya, kita bisa menyelesaikan persamaan ini dengan prosedur iterative Newton-Rhapon. Jadi:

$$\frac{d}{dp} P(r) = \frac{\partial}{\partial p} P(r) + \frac{\partial}{\partial v \partial} P(r) \frac{dv}{dp} = \frac{\partial}{\partial p} P(r) - \frac{\hat{m}_1}{np^2} \frac{\partial}{\partial v} P(r)$$

Persamaan tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P(r) &= \frac{rP(r) - (r+1)P(r+1)}{p} \\ &= + \frac{\hat{m}_1}{np^2} \left[P(r) - \frac{r}{vn} P(r) - \frac{(r+1)(1-p)}{vnp} P(r+1) \right] \end{aligned}$$

Ganti ν dengan \widehat{m}_1 / np , dan berdasarkan persamaan pada $P(r)$ dan $P(r+1)$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P(r) &= P(r) \left[\frac{(n-1)r}{n} \frac{1}{p} + \frac{\widehat{m}_1}{np^2} \right] \\ &\quad - (r+1)P(r+1) \left[\frac{(n-1)1}{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{np^2} \right] \end{aligned} \quad (34)$$

Satu yang dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan persamaan (34) adalah

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} H_r &= (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} \frac{n-1}{np} \\ &\quad - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) \left[\frac{(r+1)(r+2)P(r+2)}{P(r)} - \frac{(r+1)^2 p^2 (r+2)}{P(r)} \right] \\ &= H_r \left[\frac{n-1}{np} - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right] \end{aligned}$$

Maka dari itu

$$\begin{aligned} Q'(p) &= \sum_r f_r \frac{d}{dp} H_r \\ &= \sum_r f_r H_r \left[\frac{n-1}{np} - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Dapat diperhatikan bahwa $n \rightarrow \infty$ dalam cara seperti itu $np \rightarrow a$, maka persamaan (35) cenderung pada persamaan (23)

6.8.3. Eksistensi dan efisiensi penduga

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, penduga momen nyata jika dan hanya jika ragam ν_2 berada di antara ν_1 dan \widehat{m}_1 . Sprott (1958), dan Katti dan Gurland (1962) telah mentabulasikan keefisiensannya untuk $n = 2, 3$, dan 5 , untuk beragam nilai p dan ν . Hasil untuk $n = 2$, diringkas pada gambar 4.3, yang memperlihatkan bahwa efisiensi metode momen sangat rendah ketika p lebih besar dari 0.2 . Faktanya, untuk berapapun nilai ν , efisiensi cenderung nol ketika $p \rightarrow 1$.

Penulis mengobservasi bahwa peningkatan efisiensi bisa diperoleh dengan menggunakan metode frekuensi contoh nol – sebuah metode yang mengobservasi proporsi dari jumlah nol yang digunakan untuk memperoleh

satu pendugaan persamaan, yang lainnya menjadi cocok dengan persamaan kemungkinan maksimum.persamaan (21). Kita lalu memiliki

$$P(0) = \frac{f_0}{N} = \exp\{-v[1 - (1 - p)^n]\} \quad (36)$$

Di mana saat nilai $n = 2$ akan menghasilkan

$$\hat{p} = 2 + \frac{2}{\hat{m}_1} \ln \frac{f_0}{N} \quad \text{dan} \quad \hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{n\hat{p}}$$

Saat n lebih besar dari 2, persamaan (36) tidak dapat diselesaikan dengan mudah, tapi metode Newman-Rhapon selalu bisa digunakan.

Ketika penduga \hat{p} harus berada diantara 0 dan 1, penduga frekuensi contoh nol nyata, asalkan memenuhi pertidaksamaan berikut

$$N \exp(-\hat{m}_1) \leq f_0 \leq N \exp(-\hat{m}_1 / n)$$

Karena itu, bisa saja penduga momen tidak nyata, padahal penduga frekuensi contoh nol nyata – dan sebaliknya. Efisiensi metode ini jauh lebih besar daripada metode momen. Ini diperlihatkan pada saat $n = 2$ dalam gambar 6.4 , yang diturunkan menggunakan hasil dari Sprott (1958) , dan Katti dan Gurland (1962).

Tabel 6.2 mengilustrasikan perbedaan estimasi dari parameter Poisson-Binomial yang bisa dihasilkan oleh contoh numerik. Dalam penambahan terhadap model dengan $n = 2$, kita juga memasukan model yang cocok dengan $n = 4$ untuk menunjukkan kekonvergenan yang tinggi dari sebaran frekuensi harapan terhadap Neyman Type A. Perhatikan bahwa pendugaan frekuensi contoh nol berada di antara momen dan pendugaan kemungkinan maksimum.

Tabel 6.2. Observasi dan Sebaran Kuadran Harapan dari Simulasi sebaran dengan Momen dan Kemungkinan Maksimum dari Model Poisson dan Binomial

Jumlah titik tiap sel	Jumlah sel yang diobservasi	P.B(n=2) (mom) $\hat{v} = 0.3390$ $\hat{p} = 0.7669^b$	P.B(n=2) (m.l.e) $\hat{v} = 0.7379$ $\hat{p} = 0.3524$	P.B(n=4) (m.l.e) $\hat{v} = 0.8438$ $\hat{p} = 0.1541$
0	67	75.57	65.16	66.25
1	23	8.80	21.94	20.86
2	5	15.00	9.66	8.98

3	2	1.78	2.43	2.83
4	2	1.55	0.65	0.80
5+	1	0.30	0.17	0.28
Total sel = 100				
Total poin = 52				
$X^2 =$		[30.72] ^a	[4.31] ^a	[5.63] ^a
$\hat{m}_1 = 0.5200 ;$	$\hat{m}_2 = 0.9188$			
$P_{0.05} =$		5.99	4.84	5.99
$\hat{m}_2/\hat{m}_1 = 1.7669$				

^a[X²] = X² Perhitungan statistik dengan pengelompokan ≥ 1 sebagai pengganti ≥ 5

^bPendugaan frekuensi contoh nol untuk \hat{v} dan \hat{p} adalah 0.5656 dan 0.4597, respectively.

6.9. Sebaran Poisson Binomial Negatif

6.9.1 Penduga momen

P.g.f dari sebaran Poisson-binomial negatif adalah

$$G(s) = \exp\{v[1 + (p - ps)^{-1} - 1]\}$$

dimana p dan k adalah positif. Secara formal, ini sama dengan sebaran Poisson-binomial, kecuali bahwa p telah digantikan dengan $-p$, dan n dengan $-k$. bagaimanapun juga, k tidak lebih panjang dari integer tetpi ini adalah parameter ketiga yang tidak diketahui yang akan diestimasi berdasarkan data.

Proses dilakukan sebagaimana sebelumnya, kita menghitung

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G(s) &= vkp(1 + p - ps)^{-k-1} G(s), \\ \frac{d^2}{ds^2} G(s) &= vkp[(k + 1)p(1 + p - ps)^{-k-2} \\ &\quad + vkp(1 + p - ps)^{-2(k+1)}] G(s), \end{aligned}$$

Dan menghasilkan

$$\begin{aligned} G'(1) &= vkp \\ G''(1) &= vkp[(k + 1)p + vkp] \\ G'''(1) &= vkp[(k + 1)(k + 2)p^2 + 2vkp(k + 1)p + vkp(k + 1)p \\ &\quad + v^2k^2p^2] \end{aligned}$$

Maka dari itu, berdasarkan persamaan sebelumnya

$$m_1 = vkp, \tag{37}$$

$$m_2 = vkp\{1 + (k + 1)p\}, \tag{38}$$

Atau

$$p = \frac{m_2 - m_1}{(k + 1)m_1}$$

Akhirnya, sekali lagi kita mendapatkan bahwa:

$$\begin{aligned} m_3 &= vkp[(k + 1)(k + 2)p^2 + 3vkp(k + 1)p + v^2k^2p^2 - 3vkp(k + 1)p \\ &\quad - 3v^2k^2p^2 + 2v^2k^2p^2 + 3(k + 1)p + 1] \\ &= vkp[(k + 1)(k + 2)p^2 + 3(k + 1)p + 1]. \end{aligned}$$

Menggunakan persamaan (27) dan (29), kita dapatkan

$$m_3 = m_1 \left[\frac{(k + 1)(k + 2)(m_2 - m_1)^2}{(k + 1)^2 m_1^2} + \frac{3(k + 1)(m_2 - m_1)}{(k + 1)m_1} + 1 \right]$$

$$= \frac{(m_2 - m_1)^2 k + 2}{m_1 K + 1} + 3m_2 - 3m_1$$

Yang bisa ditulis sebagai berikut

$$(k + 1)m_1(m_3 - 3m_2 + 2m_1) = (m_2 - m_1)^2(k + 2)$$

Atau

$$\begin{aligned} k &= \frac{2(m_2 - m_1)^2 - (m_3 - 3m_2 + 2m_1)m_1}{m_1(m_3 - 3m_2 + m_1) - (m_2 - m_1)^2} \\ &= \frac{2m_2^2 - m_1(m_2 + m_3)}{m_1(m_1 - m_2 + m_3) - m_2^2} \end{aligned} \quad (39)$$

Dari persamaan (37), (38), dan (39), kita dapatkan penduga momen :

$$\hat{k} = \frac{2\hat{m}_2^2 - \hat{m}_1(\hat{m}_2 + \hat{m}_3)}{\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2 + \hat{m}_3) - \hat{m}_2^2} \quad (40)$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{(k + 1)\hat{m}_1} \quad (41)$$

$$\hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{k}\hat{p}} \quad (42)$$

6.9.2 Penduga Kemungkinan Maksimum

Untuk sebaran Poisson-binomial negatif,

$$P(r) = \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i ki(ki + 1) \dots (ki + r - 1)}{r!} p^r (1 + p)^{-ki-r}$$

Lalu, menggunakan proses yang sama sebagaimana sebaran Poisson-binomial, kita dapatkan

$$\frac{\partial}{\partial v} P(r) = -P(r) + \frac{(r + 1)(1 + p)}{vkp} P(r + 1) + \frac{r}{vk} P(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} P(r) = \frac{rP(r) - (r + 1)P(r + 1)}{p}$$

Dan persamaan dua kemungkinan yang pertama adalah

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = 0$$

Dan

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial p} P(r) = 0$$

Yang menurunkan kepada

$$v k p = \widehat{m}_1 \quad (43)$$

Dan

$$Q(p, k) = \sum_r f_r H_r(p, k) - N \widehat{m}_1 = 0,$$

Dimana

$$H_r = (r + 1) \frac{P(r + 1)}{P(r)}$$

Mengingat k konstan, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} Q(p) &= Q'(p) \\ &= \sum_r f_r H_r \left[\frac{k + 1}{kp} - \left(\frac{k + 1}{kp} + \frac{1}{kp^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Untuk menyelesaikan persamaan kemungkinan ketiga

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial k} P(r) = 0, \quad (45)$$

Kita harus menemukan $\partial P(r)/\partial k$. Shumway dan Gurland (1960) memperlihatkan, setelah perhitungan yang rumit, maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} P(r) &= \frac{rP(r)}{k} \\ &\quad - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) \\ &\quad - \left[\frac{(1+p)(r+1)}{pk} P(r+1) - \frac{r}{k} P(r) \right] \ln(1+p), \end{aligned}$$

Dimana

$$B_{ri} = \left(\frac{p}{1+p} \right)^{r-1} \frac{i}{(r-i)(r-i+1)}$$

Lalu persamaan menjadi

$$\frac{1}{k} \sum_r f_r - \frac{\ln(1+p)}{k} \left[\frac{1+p}{p} \sum_r f_r H_r - \sum_r r f_r \right] - \frac{1}{k} \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0.$$

Mengingat fakta bahwa $\sum_r r f_r = N\hat{m}_1$, dan mengalikan dengan k, kita dapatkan

$$N\hat{m}_1 - \ln(1+p) \left(\frac{1+p}{p} - 1 \right) N\hat{m}_1 - \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0,$$

Atau

$$Nm_1 \left[1 - \frac{\ln(1+p)}{p} \right] - \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0.$$

Sejak $\hat{m}_1 = vkp$, persamaan diatas menjadi

$$k = \frac{1}{Nv[p - \ln(1+p)]} \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i)$$

Kita sekarang dapat menemukan penduga kemungkinan maksimum dengan mengikuti prosedur iteratif berikut :

1. Anggap v', k', p' penduga awal
 2. Hitung penduga baru untuk p
- $$p'' = p' \frac{Q(v', k', p')}{Q'(v', k', p')}.$$
3. Menghitung dugaan baru untuk k, $k'' =$ fungsi dari (v', k', p')
 4. Menghitung nilai baru untuk v, $v'' = \frac{\hat{m}_1}{k'' p''}$
 5. Jika v'', k'', p'' berbeda nyata dari v', k', p' , ulangi langkah 2, 3, dan 4 dengan v'', k'', p'' sebagai pendugaan baru.
 6. Eksistensi dan efisiensi penduga

Penduga momen nyata jika persamaan (40), (41), dan (42) menghasilkan nilai positif. Kasus ini jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan berikut :

$$\hat{m}_2 \geq \hat{m}_1, \quad \frac{\hat{m}_2 + \hat{m}_1 \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_1} \leq \hat{m}_3 \leq \frac{\hat{m}_2 (2\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}{\hat{m}_1}$$

Katti dan Gurlang (1961) menghitung efisiensi dari penduga momen untuk beragam nilai v, k , dan p ; mereka sangat rendah saat p lebih besar dari 0.1 atau k lebih besar dari 1. Rupanya hasil yang didapat jauh lebih baik bila

menggunakan rasio dari frekuensi dua observasi yang pertama, dibandingkan dengan momen ketiga, untuk menghasilkan persamaan penduga ketiga. Dalam metode ini nilai p dicari dahulu, sebagai solusi untuk

$$\hat{p} \ln\left(\hat{m}_1 \frac{f_0}{f_1}\right) - \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{\hat{m}_1} \ln(1 + \hat{p}) = 0$$

Yang bisa diselesaikan dengan mudah menggunakan metode Newton-Rhapson. Penduga \hat{k} dan \hat{v} didapat dari persamaan (41) dan (42). Penduga ini nyata jika dan hanya jika

$$1 + \ln\left(\hat{m} \frac{f_0}{f_1}\right) m \leq \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \leq \hat{m}_1 \frac{f_0}{f_1}$$

Dan mereka memberikan nilai awal yang lebih baik dari penduga momen untuk proses iteratif yang dibutuhkan untuk menghasilkan penduga kemungkinan maksimum.

Bagaimanapun, dalam bentuk hal, proses iteratif tidak konvergen. Alasannya mungkin karena iteratif menggunakan persamaan yang memiliki bentuk $k = f(k)$.

Jika kita memiliki perkiraan nilai k_1 dari solusi persamaan, maka $k_2 = f(k_1)$ adalah pendugaan yang lebih baik jika $df(k)/dk < 1$, dalam selang (k_1, \hat{k}) .

Tabel 6.4 menyajikan penduga momen dari parameter model Poisson-binomial negatif saat mereka cocok terhadap contoh numerik. Algoritma untuk metode kemungkinan maksimum dan rasio dari metode dua frekuensi observasi pertama kedua-duanya divergen.

6.10. Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran

Teori pendugaan telah dikembangkan dalam bab ini berdasarkan pada contoh kuadran—prosedur yang menyeleksi kuadran secara acak di daerah pembelajaran. Ini jelas bahwa teori ini tidak tepat untuk aplikasai dalam kasus cacat kuadran, yang telah kita gunakan dalam contoh numerik. Ini adalah ‘ contoh ‘ yang diambil dengan kuadran perbatasan yang meliputi seluruh daerah

pembelajaran, yang dalam kasus ini nomor poin perbatasan kuadran dengan jelas bergantung.

Tabel 6.3. Perbandingan Hasil Sebaran Frekuensi Observasi Menggunakan Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran.^a

Jumlah poin tiap sel	Nomor sel yang diobservasi menggunakan contoh kuadran				Jumlah observasi sel dengan cacah kuadran
	Jumlah contoh Percobaan				
	5	10	20	50	
0	16.0	16.5	16.35	16.70	16.75(67)
1	4.8	5.3	5.70	5.72	5.75(23)
2	2.6	1.9	1.70	1.42	1.25(5)
3	0.8	0.6	0.50	0.40	0.50(2)
4	0.6	0.5	0.45	0.42	0.50(2)
5+	0.2	0.2	0.30	0.34	0.25(1)

^a Jumlah dalam tanda kurung berdasarkan gambar untuk 100% contoh

Tabel 6.4. Perbandingan untuk Pendugaan Parameter yang Dihasilkan oleh Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran

Parameter	Penduga parameter dengan contoh kuadran				Penduga parameter dengan cacah kuadran
	Jumlah contoh Percobaan				
	5	10	20	50	
Rataan	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
Ragam	10.807	0.9430	0.9590	0.9326	0.9097
<i>Binomial Negative Penduga momen</i>					
\hat{w}	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
\hat{k}	0.8902	0.7989	0.7672	0.6787	0.6781
Penduga kemungkinan maksimum					
\hat{w}	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
\hat{k}	0.7329	0.7487	0.7821	0.7316	0.7352
<i>Neyman Type-A Penduga momen</i>					
\hat{v}	0.8902	0.7989	0.7672	0.6787	0.6781
\hat{a}	0.7099	0.6960	0.7247	0.7744	0.7669
Penduga kemungkinan maksimum					

\hat{v}	0.8551	0.9233	10.026	0.9733	0.9791
\hat{a}	0.7391	0.6028	0.5545	0.5400	0.5311

Teori untuk pendugaan cacah kuadran belum dikembangkan. Maka kita terpaksa pada posisi menggunakan prosedur yang ditemukan pada asumsi yang kita tahu akan salah. Untuk menguji kemungkinan ini, kita mengadakan eksperimen contoh kecil pada contoh numerik yang telah digunakan sepanjang bab ini. Mengambil contoh acak sebanyak 25 % setiap waktu, kita telah pelajari bahwa perilaku dari sebaran frekuensi observasi dan beberapa parameter yang diduga, sebagai jumlah dari percobaan contoh pada eksperimen contoh adalah meningkat dari lima ke lima puluh. Hasil pokok dikumpulkan pada tabel 6.3 dan 6.4. Tabel-tabel ini memaparkan bahwa hasil yang didapat dengan contoh kuadran cenderung kepada hasil yang didapat oleh cacah kuadran ketika jumlah percobaan contoh meningkat.

6.11 Contoh Kasus

1. Pola Sebaran Pasar

Mengetahui pola penyebaran kemunculan pasar/mal di wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi dengan metode analisis spasial. Data keberadaan pasar/mal dalam peta dianalisis dimulai dengan membuat grid pada wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi. Dari proses itu kelima wilayah tersebut terbagi dalam 100 kotak dan setelah itu dihitung dalam setiap kotak banyaknya jumlah pasar/mal. Data perhitungan kemudian disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berdasarkan kotak, misalnya ada berapa kotak yang tidak berisi jumlah pasar, atau yang berisi satu pasar dan seterusnya.. Dari data tersebut kemudian dianalisis tentang pola penyebaran kemunculan pasar/mal. Data dalam tabel tersebut kemudian dianalisis polanya dengan menggunakan Uji Kebaikan Suai (*Goodness of Fit*).

- a. Langkah pertama adalah membagi peta wilayah JABODETABEK dalam grid (dalam hal ini 100). Grid yang dibuat sebetulnya adalah 8 baris x 13 kolom sehingga menghasilkan 104 grid. Namun setelah diamati ternyata ada 4 kotak yang berisi lautan sehingga keempat kotak tersebut tidak dilibatkan dalam perhitungan dengan alasan tidak mungkin ada pasar/mal di tengah laut, sehingga sisanya tinggal 100 kotak. Berikut ini adalah ilustrasi pembuatan grid tersebut:

- b. Kemudian dilakukan perhitungan banyaknya pasar/mal di setiap kotak, lalu dibuat tabel frekuensi yang memuat berapa banyaknya kotak yang memuat pasar/mal sebagai berikut:

Tabel 6.5. Banyaknya Kotak yang Berisi Jumlah Pasar di Wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi

JUMLAH PASAR/MAL SETIAP KOTAK	BANYAKNYA KOTAK
x_1	f_1
0	63
1	20
2	10
3	4
4	2
5	0
6	1
JUMLAH	100

Berdasarkan tabel 6.5 yang telah disusun di atas kemudian dilakukan analisis spasial dengan metode kuadran. Analisis pertama adalah apakah data menyebar secara Poisson dengan menggunakan uji kebaikan suai Khi Kuadran. Sebelum melakukan analisis, harus ditentukan dahulu nilai-nilai peluang munculnya pasar/mal dalam setiap kotak jika menyebar secara Poisson. Fungsi sebaran peluang Poisson dan parameternya dilukiskan sebagai berikut :

$$P(R = r) = e^{-v} \frac{v^r}{r!}$$

$$\text{Nilai tengah} = \text{Ragam} = v = \frac{\sum_{i=1}^{\sigma} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{\sigma} f_i}$$

$$= [(0 \times 63) + (1 \times 20) + (2 \times 10) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 0) + (6 \times 1)] / 100 = \mathbf{0.66}$$

Karena pada sebaran Binomial penduga nilai tengah sama dengan pada Poisson, maka nilai v di atas tersebut sekaligus dapat juga digunakan untuk menentukan peluang sukses pada sebaran Binomial yaitu sebesar $0.66/6 = 0.11$ (karena enam kelompok sebaran frekuensi). Setelah itu dilakukan perhitungan uji kesesuaian sebaran dengan menggunakan uji Chi Square dihitung menggunakan MS Excel dengan hasil sebagai berikut :

Tabel 6.6. Perhitungan Uji Chi-square untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan $\alpha = 3\%$

Data Jumlah Pasar/Mal di JABODETABEK			POISSON			BINOMIAL		
i	Frekuensi	fi.xi	p(X)	Harapan	χ^2 Hitung	p(X)	Nilai Harapan	χ^2 Hitung
0	63	0	0.517	32.562	28.454	0.497	31.310	30.324
1	20	20	0.341	6.822	25.453	0.369	7.371	6.652
2	10	20	0.113	1.126		0.114	1.139	0.922
3	4	12	0.025	0.099		0.019	0.075	0.042
4	2	8	0.004	0.008		0.002	0.003	0.001
6	1	6	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
	100	0.66						
	P(sukses) >	0.11	$\chi^2 Tbl >>$	54.781	54.91	$\chi^2 Tbl >>$	54.78	37.942

Dari tabel perhitungan di atas terlihat bahwa uji Chi Square baik untuk Poisson maupun Binomial dengan $\alpha = 3\%$ menghasilkan hasil yang sama yaitu terima hipotesis nol. Hipotesis ini berarti bahwa pola pattern kemunculan pasar/mal di wilayah JABODETABEK peluangnya menyebar secara Poisson dan Binomial. Dengan demikian pola point pattern kemunculan pasar/mal di wilayah JABODETABEK adalah acak (bukan kluster) sekaligus reguler.

Pola tersebut berarti kemunculan/keberadaan pasar di wilayah JABODETABEK secara umum menyebar acak/merata atau tidak mengumpul di titik-titik tertentu. Penyebaran pun memiliki pola reguler yang berarti ada semacam keteraturan dalam posisinya, dan hal ini mungkin dipengaruhi adanya upaya penataan kota/wilayah. Namun jika diperhatikan, perbedaan nilai Chi-square hitung dan tabel untuk sebaran poisson sangat dekat. Jika nilai α dilonggarkan menjadi 5 % akan menghasilkan kesimpulan yang berbeda yaitu hipotesis nol ditolak yang berarti peluangnya tidak menyebar secara poisson. Adapun uji pada sebaran binomial tidak berubah, yang berarti memang berpola reguler. Perhatikan tabel berikut jika nilai α diperlonggar menjadi 5 %.

Tabel 6.7. Perhitungan Uji Chisquare Untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan $\alpha = 5\%$

Data Jumlah Pasar/Mal di JABODETABEK			POISSON			BINOMIAL		
x	Frekuensi	f _i .xi	p(X)	Nilai Harapan	χ^2 Hitung	p(X)	Nilai Harapan	χ^2 Hitung
0	63	0	0.517	32.562	28.454	0.497	31.310	30.324
1	20	20	0.341	6.822	25.453	0.369	7.371	6.652
2	10	20	0.113	1.126		0.114	1.139	0.922
3	4	12	0.025	0.099		0.019	0.075	0.042
4	2	8	0.004	0.008		0.002	0.003	0.001
6	1	6	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
	100	0.66						
	P(sukses)>	0.11	χ^2 Tbl	52.192	54.906	χ^2 Tbl>	52.192	37.942

Fenomena di atas menunjukkan bahwa pola/pattern random yang ditunjukkan dari hasil uji Chi-Square untuk sebaran Poisson tidak bersifat **Perfectly**, jadi sudah agak bergeser ke arah pola kluster jika menggunakan α yang tidak begitu ketat. Hal ini memang terlihat pada gambar peta dimana keberadaan pasar/mal di sebagian wilayah mengumpul, terutama di luar Jakarta. Oleh karena itu diperoleh adanya kemungkinan antara wilayah Jakarta memiliki point Pattern yang berbeda.

Lalu apakah diperlukan pengujian untuk mengetahui pola kluster dengan Chi Square untuk sebaran Negative Binomial? Jawabannya adalah tidak perlu. Sebab dari analisis di atas sudah tergambar bahwa pola penyebaran pasar/mal di wilayah JABODETABEK menunjukkan Random dan sedikit bergerak ke arah kluster. Adapun pola reguler bersifat robust/tetap baik dengan $\alpha = 3\%$ maupun $\alpha = 5\%$ tidak mengalami perubahan.

2. Distribusi lokasi rumah sakit di DKI Jakarta dengan analisis kuadran.

Uji kebaikan suai (Goodness of Fit) dalam menentukan sebaran rumah sakit dalam kasus ini menggunakan Uji Chi-Square (χ^2). Sebelum menggunakan Uji Chi-Square, maka dilakukan pendugaan rata-rata populasi dengan asumsi sebaran Poisson (X), dilanjutkan dengan menghitung frekuensi harapan:

$$NP(r) = N \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!}, r = 0, 1, 2, \dots$$

Dan uji Chi-Square yang digunakan:

$$\chi^2 = \sum_{r=0}^w \frac{[f_r - NP(r)]^2}{NP(r)}$$

Dimana:

$W+1$ = jumlah kelas frekuensi

f_r = jumlah pengamatan di kelas frekuensi ke- r .

N = ukuran jumlah rumah sakit ($\sum f_r = N = 90$)

$P(r)$ = peluang sebuah pengamatan masuk kedalam kelas frekuensi ke- r .

Selanjutnya membandingkan nilai Chi-Square hasil perhitungan di atas dengan nilai tabel Chi-Square menggunakan derajat bebas = $W-1$ dan $\alpha = 0.05$. Jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$ maka disimpulkan bahwa sebaran rumah sakit tidak menyebar acak secara distribusi Poisson.

Dari data yang dihitung dari masing-masing kuadran (kotak) dalam travel map diperoleh bahwa dari seluruh kuadran (90 kuadran), jumlah rumah sakit yang tersebar sebanyak 24. Jadi peluang untuk mendapatkan titik rumah sakit di DKI Jakarta sebesar $23/90 = 0.256$ (25,6%)

Tabel 6.8. Frekuensi Harapan dari Sebaran Poisson Rumah Sakit di DKI Jakarta

Jumlah titik dalam satu kuadran	Banyak kuadran (f_r)	λ	$P(r)$	Frekuensi harapan $NP(r)$ ($N=90$)	$\frac{[f_r - NP(r)]^2}{NP(r)}$
0	75	0.256	0.774	69.704	0.402
1	9	0.256	0.198	17.813	4.360
2	4	0.256	0.025	2.276	-
3	2	0.256	0.002	0.194	-

Dari tabel di atas diperoleh $\chi^2 = 0.402 + 4.360 = 4.764$. Jika dibandingkan χ^2_{hitung} tabel (derajat bebas = 1 dan $\alpha = 0.05$) = 4.84 maka $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$, sehingga disimpulkan sebaran rumah sakit di DKI Jakarta tidak menyebar acak secara Poisson.

Selanjutnya dilakukan analisa terhadap sebaran Binomial. Parameter X dalam Poisson adalah parameter np dalam Binomial sehingga $P(r)$ dalam Binomial = $X/n = 0.256 / 3 = 0.085$. Dengan n menunjukkan nilai maksimum/ banyaknya r (titik) dalam kuadran, dimana maksimum ada 3 titik dalam satu kuadran.

Tabel 6.9. Frekuensi Harapan dari Sebaran Binomial Rumah Sakit di DKI Jakarta

Jumlah Titik Dalam Satu Kuadran (Kotak) r	Banyak Kuadran (Kotak) (fr)	$P(r)$	N	Frekuensi Harapan $E(r)$	$\frac{[f_r - E(r)]^2}{E(r)}$
0	75	0.085	3	68.904	0.539
1	9	0.085	3	19.248	5.457
2	4	0.085	3	1.793	-
3	2	0.085	3	0.056	-

Dari tabel di atas diperoleh $X_z = 0.539 + 5.457 = 5.996$. Jika dibandingkan X_z tabel (derajat bebas = 1 dan $\alpha = 0.05$) = 4.84 maka X_z (hitung) > X_z (tabel), sehingga disimpulkan sebaran rumah sakit di DKI Jakarta tidak menyebar acak secara Binomial. Dari dua analisa sebaran di atas (Poisson dan Binomial) maka disimpulkan bahwa pola sebaran rumah sakit cenderung bersifat clustered (bergerombol) karena tidak menyebar acak secara Poisson dan Binomial. Dengan hasil ini diketahui memang belum ada pemerataan dalam pelayanan kesehatan di DKI Jakarta khususnya dalam pembangunan rumah sakit.

6.12. Daftar Pustaka

16. Engelhardt, M. and L.J. Bain. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Ed. PWS-Kent Pub., Boston.
17. Ghahramani, S. 1996. Fundamentals of Probability. Prentice Hall, New Jersey.
18. Golberg, S. 1962. Probability. An Introduction. Printice-Hall, Inc. Englewood Cliff, New York
19. Hogg, R.V, and A.T. Craig, 2005. Introduction to Mathematical Statistics. 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
20. Hogg, R.V and E.A. Tanis. 2001. Probability and Statistical Inference, 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
21. Hurtsbinger, D.V. dan P. P. Bilingsley. 1987. Element of Statistical Inference. 6th ed. Allyn and Bacon. Boston.
22. Katti, S.K. , Gurland, J. 1962. "Some method s of estimation for the Poisson Binomial Distribution". Biometrics, 18, 42-51.
23. Koopmans, L. H. 1987. *Introduction to Contemporary Statistical Methods* 2nd ed. Duxbury Press. Boston.

24. Larson, H. J. 1969. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. John Wiley and Sons, New York
25. Mendenhall, W., Wackerly, D. D., & Scheaffer, R. L. 1990. *Mathematical Statistics with Applications*. Fourth ed. PWS Kent Publishing Co, Boston.
26. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
27. Ross, S. 1989. A First Course in Probability. Macmillian Publishing Company. New York
28. Scheaffer, R.L. 1990. *Introduction to Probability and Applications*. PWS Kent, Boston.
29. Sprott, D.A. 1958. "The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution". *Biometrika*, 14, 97-106.
30. Shumway, R. Gurland, J. 1960. *A fitting procedure for some generalized Poisson Distribution*. *Biometrika*, 43, 87-108.
31. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
32. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd
33. Walpole, R.E, Myers, R.H, Myers, S.L, & Ye, K. 2002. Probability & Statistics for Engineers & Scientist 7th edition. Prentice Hall. New Jersey.

BAB 7

DISTRIBUSI-COMPOUND DAN GENERALIZED SPASIAL

MUHAMMAD NUR AIDI

7.1. Pendahuluan

Pada bab sebelumnya, penyebaran spasial (konfigurasi spasial) dimana ditunjukkan sebagai ragam sampel quadran. Bab ini akan mempelajari distribusi teoritis mungkin diperoleh dengan menggunakan berbagai asumsi yang jelas.

Dua alternatif prosedur konfigurasi spasial cluster adalah: proses compound dan generalized.

7.2. Definisi dan Notasi

7.2.1 Sebaran Coumpound

Jika R_1 , adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang (fkp) $P_1(r_1|R_2)$ untuk nilai R_2 ; dimana R_2 dianggap sebagai peubah acak dengan fkp $P_2(r_2)$ maka peubah acak $R = R_1 \cap R_2$ dengan fkp :

$$P(r) = P(R = r) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(r|cr_2)P_2(r_2)dr_2 \quad (1)$$

Disebut dengan sebaran coumpound R_1 dengan coumpounder R_2 . Nilai c adalah konstan. Nilai konstant ini selalu konsisten dengan syarat dari sebaran yang terlibat.

7.2.2 Sebaran Generalized

Jika R_1 adalah peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $P_1(r_1)$, dan jika R_2 dianggap sebagai peubah acak dengan fungsi kepekatan peluang $P_2(r_2)$ maka peubah acak

$$R \equiv R_1 \cup R_2 = \sum_{i=1}^{R_1} R_{2i} = R_{21} + R_{22} + \dots + R_{2R_1} \quad (2)$$

dengan fkp

$$P(r) = P(R = r) = \sum_{r_1=0}^{\infty} P_{2*}(r|r_1)P_1(r_1) \quad (3)$$

Dimana $P_{2*}(r|r_1)$ adalah r_1 "fold convolution" dari r_2 , dan $P(r)$ disebut distribusi generalized R_1 dengan memperhatikan generalizer R_2 dimana R_{2_i} ($i = 1, 2, \dots, R_1$) adalah keluarga independent and distribusi (iid) peubah acak integer yang bebas terhadap R_1 .

Untuk Sebaran Compound, Jika $G(s)$ adalah fungsi pembangkit peluang (fpp) peubah acak R dan $P(r)$ adalah fkp-nya maka

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} P(r) s^r$$

Peubah acak peubah acak $R \equiv R_1 \cap R_2$ dengan fkp diatas mempunyai fpp sebagai berikut:

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} P(r) s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} P_1(r|cr_2)P_2(r_2)dr_2 \right] s^r \\ G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^{\infty} P_1(r|cr_2)s^r \right] P_2(r_2)dr_2 \\ G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s|cr_2)P_2(r_2)dr_2 \end{aligned} \quad (4)$$

Untuk Sebaran Generalized, Jika $G(s)$ adalah fpp peubah acak R dan $P(r)$ adalah fkp-nya maka

$$\begin{aligned} G(s) &= \sum_{r=0}^{\infty} P(r) s^r = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{r_1=1}^{\infty} P_{2*}(r|r_1)P_1(r_1) \right] s^r \\ G(s) &= \sum_{r_1=1}^{\infty} P_1(r_1) \sum_{r=0}^{\infty} P_{2*}(r|r_1)s^r \\ G(s) &= \sum_{r_1=1}^{\infty} P_1(r_1) G_{2*}(s|r_1) \end{aligned} \quad (5)$$

Dimana $G_{2*}(s|r_1)$ adalah fpp dari $P_{2*}(r|r_1)$. Untuk r_1 yang tetap maka $G_{2*}(s|r_1) = [G_2(s)]^{r_1}$ sehingga:

$$\begin{aligned}
G(s) &= \sum_{r_1=1}^{\infty} P_1(r_1) G_{2*}(s|r_1) \\
G(s) &= \sum_{r_1=1}^{\infty} P_1(r_1) [G_2(s)]^{r_1} \\
G(s) &= G_1[G_2(s)]
\end{aligned} \tag{6}$$

7.3 Sebaran Coumpound Poisson

Jika $R_1 \sim \text{Poisson}(\lambda a)$ dan peubah acak $R \equiv R_1 \cap R_2$ dengan fkp

$$P(r) = \int_{-\infty}^{\infty} P_1(r|cr_2)P_2(r_2)dr_2 \tag{7}$$

Sebaran Coumpound Poisson adalah:

$$G_1(s|cr_2) = G_1(s|\lambda a) = \exp[\lambda a(s - 1)] \tag{8}$$

dimana c dan r_2 diatur sama dengan a dan λ sehingga

$$\begin{aligned}
G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s|cr_2)P_2(r_2)dr_2 \\
G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp[\lambda a(s - 1)] P_2(\lambda)d\lambda \\
G(s) &= M_2[a(s - 1)]
\end{aligned} \tag{9}$$

Dimana $M_2(\theta)$ merupakan fungsi pembangkit momen (fpm) dari fkp $P_2(r_2)$

7.3.1. Sebaran Neyman Type-A

Salah satu dari sebaran coumpound Poisson yang sederhana dan umum digunakan adalah menghasilkan peubah Poisson baru lainnya sebagai coumpounder R_2 , sehingga:

$$P_2(r_2) = \exp\left[(-v) \frac{v^{r_2}}{r_2!}\right] \tag{10}$$

dan

$$M_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(r_2\theta) P_2(r_2)dr_2$$

$$M_2(\theta) = \sum_{r=2=0}^{\infty} \exp(r_2\theta) \exp\left[(-v) \frac{v^{r_2}}{v_2!}\right]$$

$$M_2(\theta) = \exp [v|\exp(\theta - 1)] \quad (11)$$

Sehingga

$$G(s) = M_2[a(s - 1)] = \exp[v\{\exp(a(s - 1)) - 1\}] \quad (12)$$

Fungsi $G(s)$ ini adalah fungsi sebaran **Newman Type-A** dengan fkp

$$P(r) = \exp\left[(-v) \frac{a^r}{r!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} [v \exp(-a)]^i, \quad \text{jika } 0^0$$

$$\equiv 1 \quad (13)$$

Dan mean dan ragamnya adalah sebagai berikut :

$$E(r) = m_1 = v a$$

$$Var(r) = m_2 = v a (a + 1) \quad (14)$$

7.3.2. Sebaran Binomial Negatif

Sebaran Binomial Negatif diperoleh dari sebaran coumpound Poisson yang digabung dengan sebaran Gamma, sehingga :

$$P_2(r_2) = P_2\lambda = \frac{x^k \lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp[-\lambda x] \quad (15)$$

Dan

$$M_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda\theta) P_2(\lambda) d\lambda$$

$$M_2(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\lambda\theta) \frac{x^k \lambda^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp[-\lambda x] \quad (16)$$

Jika $y = \lambda x$ maka $dy = x d\lambda$ sehingga:

$$M_2(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\exp(\theta y|x)}{\Gamma(k)} y^{k-1} \exp[-y] dy$$

$$M_2(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{y^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp\left[-y\left(1 - \frac{\theta}{x}\right)\right] dy$$

$$M_2(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{x}\right)^{-k} \int_0^\infty \frac{\left(1 - \frac{\theta}{x}\right)^k}{\Gamma(k)} y^{k-1} \exp\left[-y\left(1 - \frac{\theta}{x}\right)\right] dy$$

$$M_2(\theta) = \left(1 - \frac{\theta}{x}\right)^{-k} = \left(\frac{x}{x - \theta}\right)^k \quad (17)$$

Sehingga

$$G(s) = M_2[a(s - 1)] = \left(\frac{x}{x - a(s - 1)}\right)^k$$

$$G(s) = \left(\frac{x}{x + a - as}\right)^k = \left(1 + \frac{a}{x} - \frac{a}{x}s\right)^{-k}, \text{ jika } p = \frac{a}{x} \text{ maka:}$$

$$G(s) = (1 + p - ps)^{-k} \quad (18)$$

Persamaan tersebut merupakan fpps sebaran **Binomial Negatif** dengan fungsi kepadatan peluang :

$$P(r) = \binom{k+r-1}{r} Q^r P^k \quad (19)$$

$$\text{Dimana } P = \frac{x}{x+a} = \frac{1}{1+p} \text{ dan } Q = 1 - P = \frac{a}{x+a} = \frac{p}{1+p}$$

7.4. Sebaran Generalized Poisson

Jika $R_1 \sim \text{Poisson}(v)$ dan peubah acak $R \equiv R_1 \cup R_2$ dengan fkp :

$$P(r) = P(R = r) = \sum_{r_1=0}^{\infty} P_{2*}(r|r_1)P_1(r_1) \quad (20)$$

Disebut sebagai peubah acak generalized poisson

$$G_1(s) = \sum_{r_1=0}^{\infty} \exp(-v) \frac{v^{r_1}}{r_1!} s^{r_1} = \exp[v(s - 1)] \quad (21)$$

Dan

$$G(s) = G_1[G_2(s)] = \exp\{v[G_2(s) - 1]\} \quad (22)$$

7.4.1. Sebaran Neyman Type-A

Sebaran Neyman Type-A juga berasal dari sebaran Generalized Poisson

$$P_2(r_2) = \exp\left[(-a) \frac{a^{r_2}}{r_2!}\right] \quad (23)$$

Dengan fungsi pembangkit peluang

$$G(s) = M_2[a(s - 1)] = \exp\{v[\exp(a(s - 1)) - 1]\} \quad (24)$$

Fungsi peluang Neyman Type-A

$$P(r) = \exp\left[(-v) \frac{a^r}{r!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} [v \exp(-a)]^i, \quad \text{jika } 0^0 \equiv 1 \quad (25)$$

7.4.2. Sebaran Binomial Negatif

Sebaran binom negatif juga dapat dihasilkan dari sebaran Generalized Poisson dimana “penyamaan“-nya adalah sebaran logaritmik.

Jika

$$P_2(r_2) = \frac{bQ^{r_2}}{r_2} \quad (r_2 = 1, 2, \dots \text{ dan } 0 < Q < 1) \quad (26)$$

Maka $\sum_{r_2=1}^{\infty} P_2(r_2) = 1$ dan $\sum_{r_2=1}^{\infty} \frac{Q^{r_2}}{r_2} = -\ln(1 - Q)$

Sedangkan kita punya $b = \frac{1}{\ln(1-Q)}$

Maka akan diperoleh :

$$G_2(s) = \sum_{r_2=1}^{\infty} \frac{bQ^{r_2}s^{r_2}}{r_2} = \frac{\ln(1 - Qs)}{\ln(1 - Q)} - b \ln(1 - Qs) \quad (27)$$

Jika diketahui bahwa :

$$G(s) = \exp\{v[G_2(s) - 1]\} \quad (28)$$

Maka

$$G(s) = \exp\{v[-b \ln(1 - Qs) - 1]\}$$

$$G(s) = \exp[-vb \ln(1 - Qs) - v]$$

$$G(s) = \exp[\ln(1 - Qs)^{-vb} - v]$$

$$G(s) = (1 - Qs)^{-vb} \exp(-v) \quad (29)$$

Misalnya $k = vb$ maka $v = k/b$

$$G(s) = (1 - Qs)^{-k} \exp\left(-\frac{k}{b}\right) \quad (30)$$

Jika $b = -[\ln(1 - Q)]^{-1}$

$$G(s) = (1 - Qs)^{-k} \exp(k \ln(1 - Q))$$

$$G(s) = (1 - Qs)^{-k} \exp(\ln(1 - Q)^k)$$

$$G(s) = (1 - Qs)^{-k}(1 - Q)^k$$

$$G(s) = \left(\frac{1 - Q}{1 - Qs}\right)^k = \left(\frac{p}{1 - Qs}\right)^k \quad (31)$$

Jika $Q = p/(1+p)$

$$G(s) = (1 + p - ps)^{-k} \quad (32)$$

Ini disebut fungsi sebaran binom negatif.

7.5 Sebaran Coumpound dan Generalized Lainnya

Prosedur untuk membuat sebaran Neyman Type-A dan Binomial nehatif sebagai distribusi Compound dan Generalized Poisson dapat dilakukan dengan banyak cara dari bernagai sebaran untuk membuat sebaran peluang diskret lainnya.

Contoh:

Dengan asumsi sebaran lainnya untuk peubah yang digabungkan dan di generized dan dengan mengganti fungsi pembangkit momen dan fungsi peluang sebaran tersebut ke persamaan $G(s) = M_2[a(s - 1)] = \exp\{v[G_2(s) - 1]\}$, membuat sebaran compound dan generalized Poisson lainnya.

Prosedur lainnya adalah kita sepakat sebaran compound dan generalized bukan sebaran Poisson

7.5.1. Sebaran Poisson — Binomial

Jika $R_1 \sim Poisson(v)$ dan $R_2 \sim Binom(np)$, maka sebaran generalized Poisson untuk peubah acak $R \equiv R_1 \cup R_2$ dengan fkp:

$$G(s) = \exp\{v[G_2(s) - 1]\} = \exp\{v[(1 - p + ps)^n - 1]\} \quad (33)$$

Dengan fungsi peluang binom-poisson:

$$P(r) = \exp[-v] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{n_i}{r} p^r (1 - p)^{n_i - r} \quad (34)$$

Dengan mean dan variance:

$$E(r) = m_1 = v n p$$

$$Var(r) = m_2 = v n p [1 + (n - 1) p]$$

Jika $R_1 \sim \text{Binom}(nr_2, p)$, dan $R_2 \sim \text{Poisson}(v)$ maka sebaran compound binom untuk peubah acak $R \equiv R_1 \cap R_2$ mempunyai fmp:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s|c r_2) P_2(r_2) dr_2 \\
 G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1-p+ps)^{nr_2} P_2(r_2) dr_2 \\
 G(s) &= \sum_{r_2=0}^{\infty} (1-p+ps)^{nr_2} \exp(-v) \frac{v^{r_2}}{r_2!} \\
 G(s) &= \exp\{v[(1-p+ps)^n - 1]\} \tag{35}
 \end{aligned}$$

Jadi kesimpulannya

$$\text{Poisson}(v) \cup \text{Binom}(n, p) \cong \text{Binom}(nr_2, p) \cap \text{Poisson}(v)$$

7.5.2. Sebaran Poisson - Binom Negatif

Jika $R_1 \sim \text{Poisson}(v)$ dan $R_2 \sim \text{Binom Negatif}(k, p)$, maka sebaran generalized Poisson untuk peubah acak $R \equiv R_1 \cup R_2$ dengan fkp:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \exp\{v[G_2(s) - 1]\} \\
 &= \exp\{v[(1-p+ps)^k - 1]\} \tag{36}
 \end{aligned}$$

Dengan fungsi peluang poisson — binom negatif:

$$P(r) = \exp[-v] \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{k_i + r - 1}{r} p^r (1-p)^{-k_i - r} \tag{37}$$

Dengan mean dan variance:

$$\begin{aligned}
 E(r) &= m_1 = v k p \\
 Var(r) &= m_2 = v k p [1 + (k + 1) p]
 \end{aligned}$$

Jika $R_1 \sim \text{Binom Negatif}(kr_2, p)$ dan $R_2 \sim \text{Poisson}(v)$ maka sebaran compound binom negatif untuk peubah acak $R \equiv R_1 \cap R_2$ mempunyai fmp:

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} G_1(s|c r_2) P_2(r_2) dr_2 \\
 G(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (1-p+ps)^{kr_2} P_2(r_2) dr_2
 \end{aligned}$$

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} (1-p+ps)^{-kr_2} \exp(-v) \frac{v^{r_2}}{r_2!}$$

$$G(s) = \exp\{v[(1-p+ps)^{-k} - 1]\} \quad (38)$$

Jadi kesimpulannya

$$Poisson(v) \cup Binom\ Negatif(k, p) \cong Binom\ Negatif(kr_2, p) \cap Poisson(v)$$

7.6 Contoh Kasus

Pemeriksaan distribusi titik rawan kecelakaan di Yogyakarta dengan menggunakan uji kesesuaian chi-square. Jika diketahui mean data dengan sebaran Poisson $m_1 = \hat{\lambda} \hat{\alpha}$ dengan data sampel $\hat{m}_1 = \mu_1$ maka formula untuk mendapatkan frekuensi harapan adalah:

$$NP(r) = N \exp(\hat{m}_1) \frac{m_1^r}{r!}, \quad (39)$$

$r = 0, 1, 2, \dots$

Sedangkan statistik uji chi-square dengan menggunakan formula:

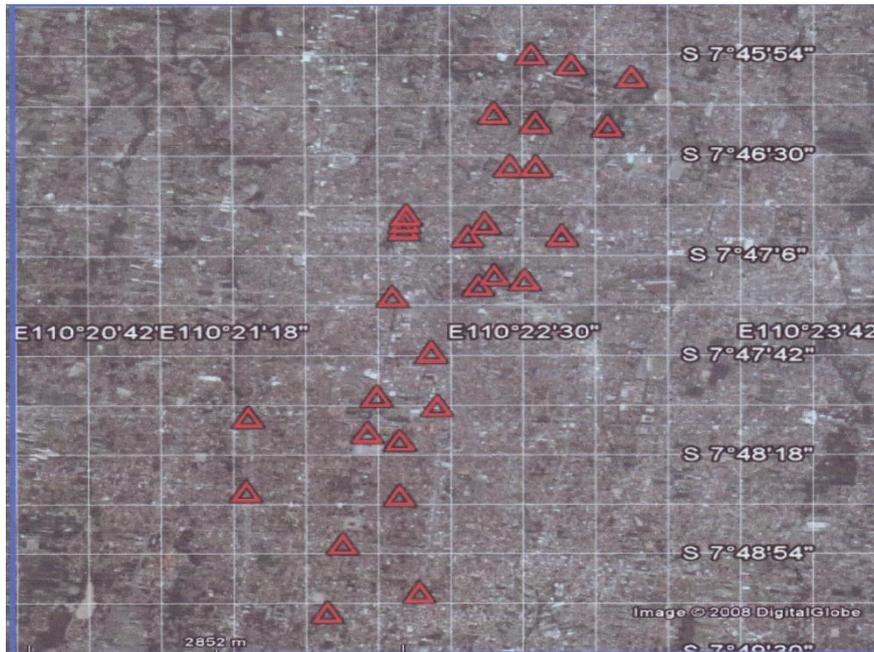
$$X^2 = \sum_{r=0}^w \frac{[f_r - NP(r)]^2}{NP(r)} \quad (40)$$

Dimana:

$W+1$ = jumlah grup/kelas jumlah titik rawan kecelakaan

f_r = jumlah pengamatan dalam hal ini jumlah grid pada tiap-tiap kelas jumlah titik rawan kecelakaan.

Nilai chi-square ini akan dibandingkan dengan nilai chi-square tabel dengan $\alpha=0.05$ dan derajat bebas $W-1$. Jika nilai chi-square hasil perhitungan lebih besar dibandingkan nilai chi-square tabel maka kita dapat simpulkan bahwa pola data titik rawan kecelakaan tidak acak dengan distribusi Poisson.



Gambar 7.1. Konfigurasi Titik Kerawanan Kecelakaan

Gambar 7.1 adalah gambaran titik rawan kecelakaan hasil pengumpulan Hub sepeda. Dalam studi ini, wilayah kota Yogyakarta dibagi dalam 156 grid kotak, sedangkan simbol segi tiga (merah) merupakan titik-titik rawan kecelakaan, dan jumlahnya ada 29 titik rawan kecelakaan. Sehingga peluang untuk mendapatkan titik rawan kecelakaan di Yogyakarta adalah 0.186.

Tabel 7.1. Perhitungan sebaran Poisson dan Binomial

Jml titik rawan kecelakaan	Jumlah Grid	Poisson			Binom		
		$\hat{\lambda}\hat{\alpha} = 0.1859$			$n=3$		
		$p(x)$	Nilai Harapan (E)	$\frac{(F-E)^2}{F}$	$\hat{p} = \frac{0.1859}{3} = 0.06197$	Nilai Harapan (E)	$\frac{(F-E)^2}{E}$
0	134	0.830	129.5	0.15	0.825	128.8	0.21
1	17	0.154	24.1	2.08	0.164	25.5	2.84
2	3	0.014	2A		0.011	1.71	
3	2	0.001	0.0.		0.000	0.0	
		X^2	2.24		X^2	3.1	
		$X^2 (0.05,1)$	3.84		$X^2 (0.05, 1)$	3.84	

Untuk mengetahui sebaran grid dengan titik rawan kecelakaan, maka hipotesis yang kita gunakan adalah:

H_0 : Konfigurasi Data titik rawan kecelakaan berdistribusi Poisson

H_1 : Konfigurasi Data titik rawan kecelakaan tidak berdistribusi Poisson.

Diketahui bahwa distribusi Poisson mempunyai momen ke-1 $m_1 = \sim C1 = 0.1859$. Tabel 3.1 diatas menunjukkan perhitungan statistik uji chi-square. Untuk distribusi poisson diperoleh bahwa nilai chi-square sebesar 2.24. Jika dibandingkan dengan nilai chi-square tabel dengan ($x=0.05$ dengan derajat bebas $db=1$ maka nilainya 3.84, sehingga keputusannya adalah kita tolak H_0 bahwa data titik rawan kecelakaan menyebar acak dengan distribusi Poisson.

Uji berikutnya adalah menguji apakah distribusi titik rawan kecelakaan menyebar Binomial. Paramater untuk sebaran Binomial disini adalah n dan p dimana n jumlah grup/kelas untuk titik rawan kecelakaan, dalam hal ini $n=3$, sedangkan p adalah peluang ditemukan titik rawan kecelakaan $p(x)$, dalam hal ini sebesar $m_1/n=0.06197$. Tabel 7.1 diatas menunjukkan perhitungan statistik uji chi-square. Untuk distribusi binomial diperoleh bahwa nilai chi-square sebesar 3.1. Jika dibandingkan dengan nilai chi-square tabel dengan ($x=0.05$) dengan derajat bebas $db=1$ yang bernilai 3.84, sehingga keputusannya adalah kita tolak H_0 atau data titik rawan kecelakaan tidak menyebar acak dengan distribusi Binomial.

7.7. Daftar Pustaka

34. Engelhardt, M. and L.J. Bain. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Ed. PWS-Kent Pub., Boston.
35. Ghahramani, S. 1996. Fundamentals of Probability. Prentice Hall, New Jersey.
36. Golberg, S. 1962. Probability. An Introduction. Printice-Hall, Inc. Englewood Cliff, New York
37. Hogg, R.V, and A.T. Craig, 2005. Introduction to Mathematical Statistics. 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
38. Hogg, R.V and E.A. Tanis. 2001. Probability and Statistical Inference, 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
39. Hurtsbinger, D.V. dan P. P. Bilingsley. 1987. Element of Statistical Inference. 6th ed. Allyn and Bacon. Boston.

40. Katti, S.K. , Gurland, J. 1962. “*Some method s of estimation for the Poisson Binomial Distribution*”. Biometrics, 18, 42-51.
41. Koopmans, L. H. 1987. *Introduction to Contemporary Statistical Methods 2nd ed.* Duxbury Press. Boston.
42. Larson, H. J. 1969. *Introduction to Probability Theory and Statistical Inference.* John Wiley and Sons, New York
43. Mendenhall, W., Wackerly, D. D., & Scheaffer, R. L. 1990. *Mathematical Statistics with Applications.* Fourth ed. PWS Kent Publishing Co, Boston.
44. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion.* London : Pion Limited
45. Ross, S. 1989. *A First Course in Probability.* Macmillian Publishing Company. New York
46. Scheaffer, R.L. 1990. *Introduction to Probability and Applications.* PWS Kent, Boston.
47. Sprott, D.A. 1958. “*The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution*”. Biometrika, 14, 97-106.
48. Shumway, R. Gurland, J. 1960. *A fitting pocedure for some generalized Poisson Distribution.* Biometrika, 43, 87-108.
49. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography.* London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
50. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis.* Norwich : Geo Abstracts Ltd
51. Walpole, R.E, Myers, R.H, Myers, S.L, & Ye, K. 2002. *Probability & Statistics for Engineers & Scientist 7th edition.* Prentica Hall. New Jersey.

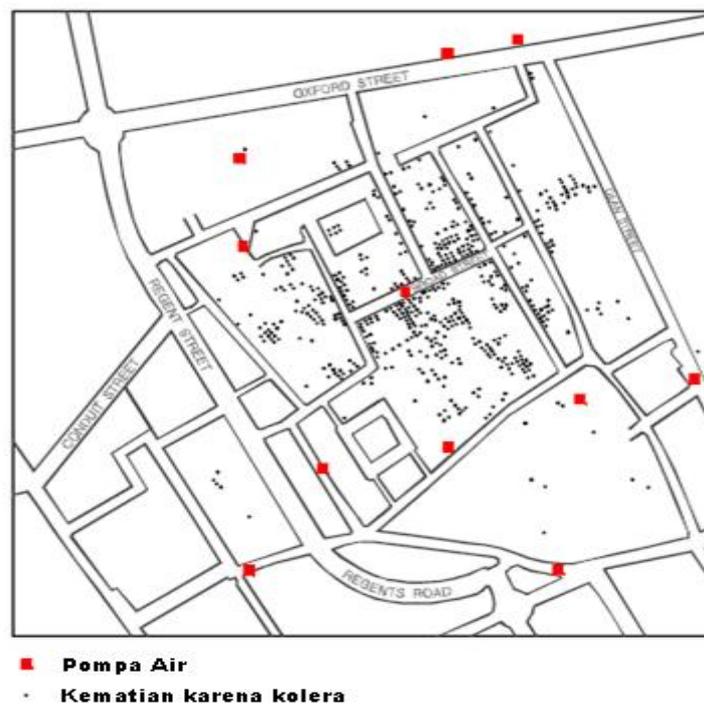
BAB 8

SEBARAN DUA TIITIK ATAU LEBIH

Muhammad Nur Aidi

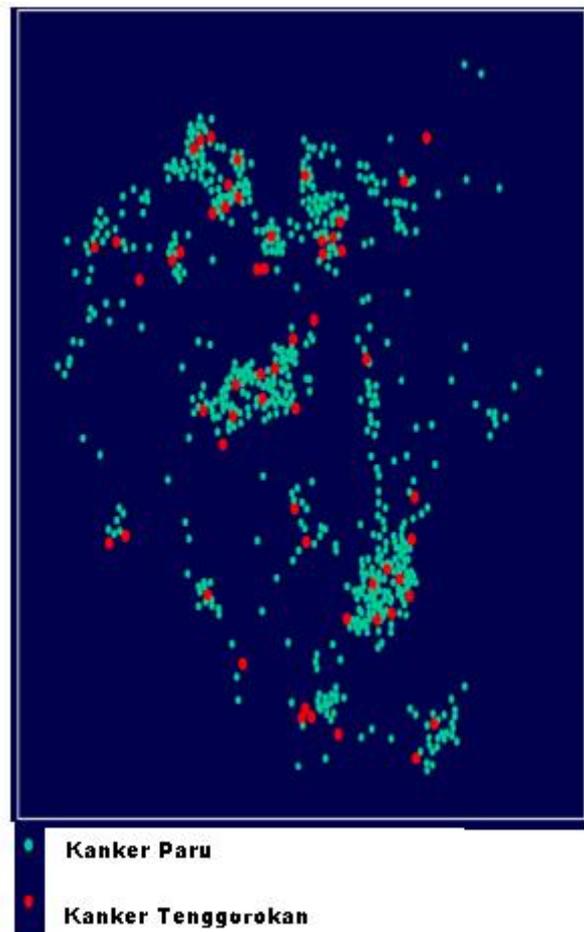
Pada pembiaraan sebelumnya kita membahas sebarang satu jenis/tipe titik dalam ruang. Pembahasan pada topik tersebut mendeteksi apakah titik-titik tersebut menyebar dalam ruang secara reguler, acak atau cluster/bergerombol. Metode yang ditempuh adalah dengan teknik kuadran atau teknik tetangga terdekat. Metode lainnya adalah menguji apakah titik dalam ruang tersebut mempunyai sebaran Poison, Binomial atau Binomial Negatif. Pengujian dilakukan dengan Khi-Kuadrat.

Bagaimana seandainya yang dibicarakan adalah sebaran dua tipe atau lebih titik-titik dalam ruang. Misalkan sebaran orang-orang yang mati karena kolera serta letak pompa air (Gambar 8.1).



Gambar 8.1. Sebaran Lokasi Penduduk Terkenan Kolera serta Sumber Air

Contoh lain adalah Sebaran spasial penderita penyakit kanker paru-paru dengan penderita kanker tenggorokan (Gambar 8.2)



Gambar 8.2. Sebaran Penduduk Terkena Kanker Paru dan Kanker Tenggorokan

Pada kasus di atas kita akan menemui berbagai variasi pola dari sebaran spasial dari dua tipe sebaran titik. Di dunia nyata, hal yang terpenting dari pola tersebut adalah kesamaan pola antara dua sebaran titik tersebut. Jika sebaran spasial dua tipe titik tersebut menunjukkan pola yang sama, maka dapat diduga bahwa dua-duanya berhubungan antar sesamanya, baik secara langsung maupun tidak langsung. Kesamaan antara dua sebaran titik tersebut ada dua bentuk

- a. Satu sebaran titik adalah penyebab keberadaan sebaran titik lainnya
- b. Dua sebaran titik mempunyai penyebab yang sama

Untuk kasus sebaran kematian karena kolera dengan sebaran keberadaan pompa air dapat diduga bahwa penyakit kolera disebabkan sumber air pompa yang ada di lokasi sudah tercemar bibit kolera. Sedangkan sebaran

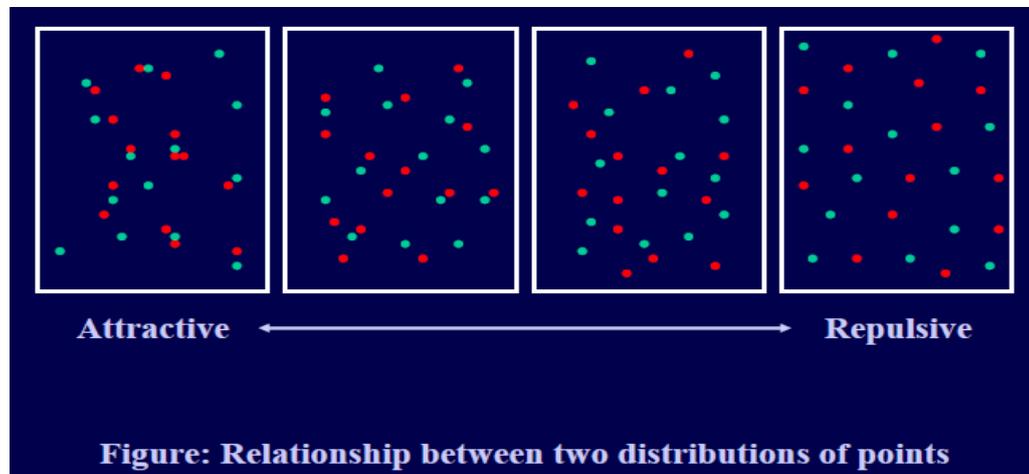
spasial keberadaan penyakit kanker paru dengan kanker tenggorokan disebabkan oleh faktor lingkungan yang kurang baik pada lokasi bersangkutan.

Untuk kasus yang lain, kita akan menemui kesamaan antara dua distribusi spasial pada

- a. Plankton dan predatornya
- b. Lokasi yang tercemar limbah berbahaya dan sebuah penyakit yang diakibatkannya
- c. Pertemuan jalan bebas hambatan dengan supermarket-supermarket
- d. Gedung bioskop dan rumah makan.

Jika sebuah distribusi adalah komplement dari distribusi lainnya, ini menunjukkan sebuah hubungan antara distribusi tersebut. Hubungan ini menunjukkan bahwa sebuah himpunan dari obyek-obyek spasial menyerang himpunan obyek-obyek lainnya. Sebuah contoh ini adalah distribusi kejahatan dengan kantor polisi. Kantor polisi mengurangi kejadian kriminalitas.

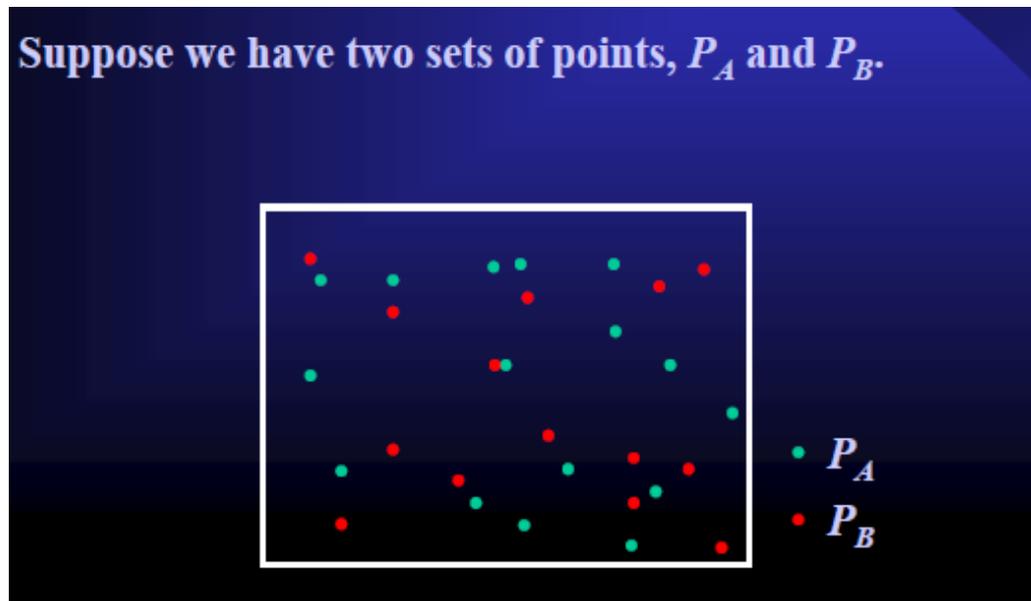
Spasial similaritas antara dua distribusi dapat dijelaskan secara kuantitatif oleh spasial prosimitas antara distribusi-distribusi tersebut.



8.1. Metode Kuadran

Metode kuadran adalah sebuah statistika uji untuk mengevaluasi similaritas antara dua distribusi. Statistik ini digunakan untuk menganalisis tidak hanya untuk sebuah himpunan titik tetapi juga untuk hubungan antara dua himpunan titik-titik.

Sebagai contoh kita mempunyai dua himpunan titik-titik, katakan P_A dan P_B yang digambarkan pada Gambar 8.3 berikut.



Gambar 8.3. Sebaran Dua Himpunan Titik

Hipotesis yang dikembangkan keadaan di atas adalah

H_0 = Titik-titik pada Himpunan P_A dan P_B adalah menyebar secara independen.

Mereka tidak berkorelasi secara spasial antara sesamanya.

H_1 = Titik-titik pada Himpunan P_A dan P_B adalah menyebar secara tidak independen. Mereka berkorelasi secara spasial antara sesamanya.

Metode kuadran mempertimbangkan apakah apakah dua distribusi tersebut independen secara spasial. Metode ini tidak menjawab secara langsung apakah dua distribusi tersebut bergerombol atau memisah secara spasial.

Dalam metode kuadran, pertama kita merubah data titik pada data raster. Kita selanjutnya mengklasifikasi sel-sel menjadi empat kategori dan menghitung banyaknya sel untuk setiap kategori yakni :

- Sel yang berisi dua himpunan titik-titik P_A dan P_B
- Sel yang hanya berisi himpunan titik-titik P_A
- Sel yang hanya himpunan titik-titik P_B
- Sel kosong

Dari banyaknya sel-sel tersebut, kita menghitung statistik Khi-kuadran, χ^2 , dan melakukan uji.

C_{AB} = Banyaknya sel yang berisi kedua himpunan P_A dan P_B

C_{A0} = Banyaknya sel yang hanya berisi himpunan P_A

C_{0B} = Banyaknya sel yang hanya berisi himpunan P_B

C_{00} = Banyaknya sel kosong

$C_A = C_{AB} + C_{A0}$

$C_B = C_{AB} + C_{0B}$

$C = C_{AB} + C_{A0} + C_{0B} + C_{00}$

Hubungan antara dua peubah dapat ditunjukkan melalui table 2 x 2 berikut

:

C_{AB}	C_{0B}	C_B
C_{A0}	C_{00}	$C - C_B$
C_A	$C - C_A$	C

Jika P_A dan P_B independen secara spasial maka tabel 2 x 2 tersebut akan proporsional, sebagai contoh adalah berikut

10	20	30
30	60	90
40	80	120

Khi-kuadrat test membandingkan antara data hasil observasi dengan nilai harapan dari model teori. Pada kasus kita, kita menggunakan pola proporsional sebagai distribusi teori dari banyaknya sel.

C_{AB} = Banyaknya sel yang berisi kedua himpunan P_A dan P_B

C_{A0} = Banyaknya sel yang hanya berisi himpunan P_A

C_{0B} = Banyaknya sel yang hanya berisi himpunan P_B

C_{00} = Banyaknya sel kosong

$C_A = C_{AB} + C_{A0}$

$C_B = C_{AB} + C_{0B}$

$C = C_{AB} + C_{A0} + C_{0B} + C_{00}$

Y_{AB} adalah nilai harapan banyaknya sel yang berisi titik-titik P_A dan P_B

Y_{A0} adalah nilai harapan banyaknya sel yang berisi hanya titik-titik P_A

Y_{0B} adalah nilai harapan banyaknya sel yang berisi hanya titik-titik P_B

Y_{00} adalah nilai harapan banyaknya sel koson

$$Y_{AB} = \frac{C_A C_B}{C}$$

$$Y_{A0} = \frac{C_A (C - C_B)}{C}$$

$$Y_{0B} = \frac{C_B (C - C_A)}{C}$$

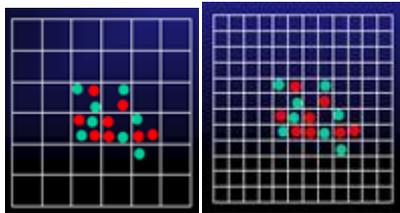
$$Y_{00} = \frac{(C - C_B)(C - C_A)}{C}$$

$$\chi^2 = \frac{(C_{AB} - Y_{AB})^2}{Y_{AB}} + \frac{(C_{A0} - Y_{A0})^2}{Y_{A0}} + \frac{(C_{0B} - Y_{0B})^2}{Y_{0B}} + \frac{(C_{00} - Y_{00})^2}{Y_{00}}$$

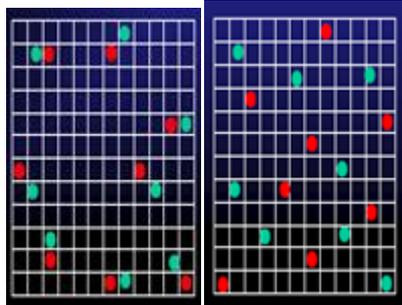
Jika P_A dan P_B adalah independen secara spasial, maka statistik uji tersebut akan mengikuti sebaran χ^2 dengan derajat bebas 1

Ada beberapa kelemahan metode kuadran yang digunakan pada dua distribusi titik secara spasial yang mirip dengan kelemahan metode kuadran untuk melihat pola spasial pada satu populasi titik, antara lain :

- a. Tergantung ukuran daripada sel pada metode kuadran

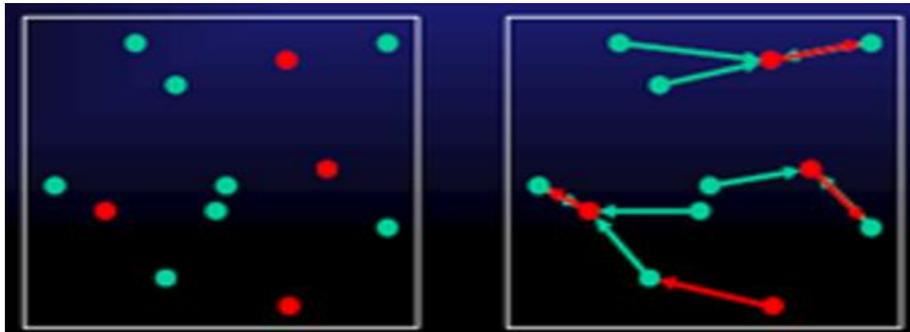


- b. Metode kuadran tidak dapat membedakan beberapa perbedaan distribusi.



8.2. Metode Silang-Tetangga Terdekat

Metode Silang tetangga terdekat merupakan pengembangan dari metode tetangga terdekat sederhana (*ordinary*) yang digunakan untuk mempelajari homogenitas distribusi titik. Metode silang tetangga terdekat menghitung jarak terdekat satu populasi titik ke tetangga terdekatnya dari populasi titik yang lain.



Gambar 8. 4. Proses Penghitungan Jarak dengan Metode Silang Tetangga Terdekat

Seperti pada metode tetangga terdekat sederhana, metode silang tetangga terdekat mempunyai dua metode statistik untuk mengukur pola gerombol dari distribusi titik secara spasial. Hal ini disebabkan ada dua perlakuan distribusi titik secara spasial yang erat kaitannya dengan kesamaan (*similarity*) antara dua distribusi, yakni satu distribusi disebabkan disebabkan distribusi lainnya atau dua distribusi mempunyai penyebab yang sama.

8.2.1. Pengujian Dua Arah

Jika kita ingin mengetahui apakah dua distribusi mempunyai penyebab yang sama, kita memperlakukan distribusi-distribusi tersebut adalah ekuivalen. Sebagai contoh kejadian kasus sebaran spasial penderita kanker tenggorokan dengan kanker paru-paru, sebaran restoran Hamburger dengan rumah makan cepat saji. Pengujian dua arah ini juga sangat berguna ketika dua distribusi saling mempengaruhi. Hal ini mengasumsikan saling mempengaruhi secara spasial antara distribusi-distribusi tersebut. Contoh lain : Stasiun pompa bensin dengan restoran pada jalan bebas hambatan, toko obat dengan *groceries*

Katakan ada dua himpunan titik yakni P_A dan P_B pada sebuah daerah S

d_A : Jarak dari titik ke i pada himpunan titik P_A ke titik terdekat dari himpunan titik P_B

d_B : Jarak dari titik ke i pada himpunan titik P_B ke titik terdekat dari himpunan titik P_A

n_A : jumlah titik pada Himpunan P_A

n_B : jumlah titik pada Himpunan P_B

Formulasi dari Silang tetangga terdekat adalah sebagai berikut

$$V = \frac{1}{n_A + n_B} \left(\sum_{i=1}^{n_A} d_{Ai} + \sum_{i=1}^{n_B} d_{Bi} \right)$$

Nilai V kecil apabila dua distribusi tersebut menggerombol secara spasial dan V besar apabila dua distribusi tersebut saling terpisah. Hipotesis yang dikembangkan adalah

H_0 : Dua distribusi independen secara spasial. Setiap distribusi mengikuti sebaran poisson secara independen.

H_1 : Dua distribusi berkorelasi secara spasial. Distribusi-distribusi tersebut secara spasial saling mempengaruhi.

Jika V adalah signifikan kecil atau besar, kita menerima hipotesis satu, dan kita katakan bahwa distribusi-distribusi tersebut secara spasial saling mempengaruhi. Sebaliknya, menerima hipotesis nol, kita katakan distribusi-distribusi tersebut independen.

Di bawah hipotesis nol, jika titik-titik tersebar secara acak pada ruang yang tak terbatas, distribusi peluang dari statistik V yang didapatkan mempunyai sebaran normal dengan nilai

$$N\left(\frac{1}{n_A + n_B} \left(\frac{n_A}{2\sqrt{\lambda_A}} + \frac{n_B}{2\sqrt{\lambda_B}}\right), \frac{n_A\lambda_A(4 - \pi n_A) + n_B\lambda_B(4 - \pi n_B) + 2\pi n_A n_B \sqrt{\lambda_A \lambda_B}}{4\pi\lambda_A\lambda_B(n_A - n_B)}\right)$$

λ_A adalah kepekatan peluang himpunan $P_A (= \frac{n_A}{A})$

λ_B adalah kepekatan peluang himpunan $P_B (= \frac{n_B}{A})$

$A = \text{Luas wilayah}$

8.2.2. Pengujian Satu Arah

Pengujian satu arah digunakan ketika hanya satu distribusi mempunyai pengaruh terhadap distribusi lainnya. Ini berarti ada pengaruh satu arah secara spasial. Hal ini menandakan kita tidak memperlakukan dua distribusi secara sama. Sebagai contoh pada kasus ini adalah distribusi tempat sumber air dengan distribusi penyakit kolera, distribusi tempat pembuangan limbah berbahaya dengan distribusi spasial kasus leukemia.

Test hipotesis satu arah, silang jarak tertangga terdekat adalah berbeda. Jika kita tertarik sebuah himpunan titik P_A adalah menggerombol secara spasial di sekitar himpunan titik P_B , kita menghitung Silang jarak tetangga terdekat dari himpunan titik P_A

$$V_A = \frac{1}{n_A} \sum_{i=1}^{n_A} d_{Ai}$$

d_{Ai} adalah jarak dari titik ke i dari P_A ke tetangga terdekatnya dari himpunan P_B

Hipotesis yang dikembangkan adalah

$H_0 =$ Titik-titik P_A adalah independen secara spasial dari titik-titik P_B .

Titik-titik P_A mengikuti sebaran poisson homogen

$H_1 =$ Titik-titik P_A dipengaruhi oleh titik-titik P_B . Titik-titik berkecenderungan bertempat tidak jauh dari titik P_B

Untuk menguji hipotesis ini, kita menetapkan lokasi titik-titik P_B dan menganggap distribusi himpunan titik PA adalah acak.

8.3. Kasus Anak Kekurangan Gizi dengan Ibu Kekurangan Gizi

Pada kasus ini kita melihat data tentang jumlah ibu yang kurang gizi dengan jumlah anak yang kekurangan gizi di beberapa desa. Data disajikan pada Tabel 8.1.

Tabel 8.1. Sebaran Jumlah Ibu dan Anak yang Kekurangan Gizi

Desa	Jumlah anak kurang Gizi	Jumlah Ibu kurang Gizi	Desa	Jumlah anak kurang Gizi	Jumlah Ibu kurang Gizi
A	1	0	P	3	1
B	1	1	Q	1	0
C	1	1	R	3	0
D	1	0	S	2	1
E	3	2	T	2	1
F	0	0	U	2	0
G	2	1	V	0	0
H	4	0	W	2	0
I	0	0	X	0	0
J	3	1	Y	2	2
K	3	1	Z	2	1
L	1	2	AA	0	0
M	2	0	AB	1	2
N	5	2	AC	1	1
O	2	2	AD	0	0

Pertanyaan :

- Apakah ada korelasi antara banyaknya Anak kurang gizi dengan banyak ibu kurang gizi

Hipotesis : H_0 : Tidak ada korelasi antara banyaknya anak kurang gizi dengan banyaknya ibu kurang gizi

H_1 : Ada korelasi antara banyaknya anak kurang gizi dengan banyaknya ibu kurang gizi

Pearson correlation of Anak and Ibu (r)= 0,392 P-Value = 0,032

Taraf nyata $\alpha = 5\%=0,05$, Karena nilai P-value = 0,032 < $\alpha = 0,05$ maka H_0 ditolak artinya ada korelasi antara banyaknya anak kurang gizi dengan banyaknya ibu kurang gizi.

- b. Apakah ada asosiasi secara spasial antara banyaknya Anak kurang gizi dengan banyak ibu kurang gizi.

Desa	Jumlah anak kurang gizi	Jumlah ibu kurang gizi
A	1	0
B	1	1
C	1	1
D	1	0
E	1	1
F	0	0
G	1	1
H	1	0
I	0	0
J	1	1
K	1	1
L	1	1
M	1	0
N	1	1
O	1	1
P	1	1
Q	1	0
R	1	0
S	1	1
T	1	1
U	1	0
V	0	0
W	1	0
X	0	0
Y	1	1
Z	1	1
AA	0	0
AB	1	1

AC	1	1
AD	0	0

Hipotesis : H_0 : Tidak ada asosiasi spasial antara banyaknya anak kurang gizi dengan banyaknya ibu kurang gizi

H_1 : Ada asosiasi spasial antara banyaknya anak kurang gizi dengan banyaknya ibu kurang gizi

$$\text{Statistik uji: } \chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 N}{(a+d)(b+c)(a+c)(b+d)}$$

Ibu Kurang Gizi	Anak Kurang Gizi		Total
	Tidak ada	Ada	
Tidak ada	6 (a)	8 (b)	14
ada	0 (c)	16 (d)	16
Total	6	24	30

$$\chi^2 = \frac{(ad-bc)^2 N}{(a+d)(b+c)(a+c)(b+d)} = \frac{(6*16-0*8)^2 * 30}{(14)(16)(6)(24)} = 8.57142857$$

$$p\text{-val} = 0.003 \text{ atau } \chi^2_{(0.05,1)} = 3.841459149$$

Karena $P\text{-value} < \text{taraf nyata } 5\%$, maka tolak H_0 .

Atau

Karena nilai $\chi^2 > \chi^2_{(0.05,1)}$, maka tolak H_0

Artinya pada taraf nyata 5% ada asosiasi antara banyaknya Anak kurang gizi dengan banyak ibu kurang gizi dengan nilai asosiasi sebesar 8.571.

8.4. Daftar Pustaka

52. Ludwig, J.A, Reynold, J.F. 1988. Statistical Ecology. A Primer on Method and Computing. John Wiley and Sons. New York.
53. Rogers, A. 1974. Statistical Analysis of Spatial Dispersion. London : Pion Limited
54. Ross, S. 1989. A First Course in Probability. Macmillan Publishing Company. New York
55. Thomas, R. W. 1977. An Introduction to Quadrat Analysis. Norwich : Geo Abstracts Lt

BAB 9

ASOSIASI ANTARA BEBERAPA HIMPUNAN TITIK DALAM RUANG (STUDI KASUS)

**AMAN ABADI, DESI KURNIA,
DWI NABILAH LESTARI, LILI PUSPITA RAHAYU,
VIARTI EMINITA, TIA FITRIA SAUMI,
TUTI PURWANINGSIH, LENI MARLENA,
SHIDDIG ARDHI IRAWAN, NURUL RAHMAWATI,
MARTA SUNDARI, FITRIA MUDIA SARI,
MUHAMMAD JAJULI, CHARLES MONGI,
DWI YUNITASARI, FITRIAH ULFAH,
RIFAN KURNIA*
DAN
MUHAMMAD NUR AIDI****

***MAHASISWA PROGRAM MASTER STATISTIKA IPB 2012
PESERTA KULIAH STATISTIKA SPASIAL
DOSEN STATISTIKA IPB

Kesamaan secara spasial antara dua distribusi dapat dijelaskan secara kuantitatif oleh pendekatan spasial antara dua objek. Salah satu metode yang digunakan untuk menemukan hubungan antara dua distribusi titik adalah Metode Kuadran. Metode Kuadran adalah sebuah uji statistik untuk mengevaluasi kesamaan antara dua distribusi. Metode Kuadran juga digunakan untuk menganalisis tidak hanya sebuah gugus titik namun juga hubungan antara dua gugus titik.

Metode Kuadran mempertimbangkan benar atau tidak dua distribusi bebas secara spasial. Metode ini secara tidak langsung menjawab pertanyaan apakah dua distribusi terkelompok secara spasial atau terpisah. Metode Kuadran memiliki beberapa keterbatasan ketika diaplikasikan ke dalam analisis gugus titik. Metode ini juga memiliki keterbatasan yang hampir sama ketika diaplikasikan untuk menganalisis hubungan antara distribusi titik.

Selanjutnya kita meneliti keberadaan hubungan antara spesies burung dengan daerah tempat tinggal burung menggunakan metode Kuadran

9.1. Tujuan

Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui korelasi spasial antara spesies burung dengan daerah tinggal burung.

9.2. Data

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data keberadaan atau daerah sarang dari delapan spesies burung pada 20 daerah contoh yang berbeda.

Tabel 9.1. Keberadaan Spesies Burung dari 20 Daerah yang Berbeda

Daerah	Spesies							
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1	0	1	0	1	0	1	0
2	1	1	1	0	0	0	1	1
3	1	1	1	0	0	0	0	0
4	1	1	1	0	0	0	1	1
5	0	0	0	1	1	1	0	0
6	1	0	0	0	1	1	1	1
7	0	0	1	0	0	0	0	0
8	1	1	1	0	0	0	1	1
9	0	1	1	1	0	0	1	0
10	1	1	1	0	0	0	0	1
11	0	0	1	1	0	0	1	0
12	1	0	1	0	0	0	1	1
13	0	1	0	1	1	1	0	0
14	0	0	0	0	1	1	1	1
15	1	0	0	0	1	0	0	0
16	0	0	0	1	0	1	1	1
17	0	1	0	1	1	1	0	1
18	0	0	0	1	1	1	0	1
19	0	0	0	1	1	1	0	1
20	0	0	0	1	1	1	1	0

9.4. Metodologi

1. Menetapkan jenis spesies dengan notasi A, B, C, D, E, F, G, H
2. Menetapkan daerah contoh dengan notasi 1, 2, 3, ..., 20
3. Menetapkan keberadaan spesies dengan notasi 1 jika terdapat spesies di daerah contoh dan notasi 0 jika spesies tersebut tidak terdapat di daerah contoh
4. Menetapkan keberadaan spesies untuk masing-masing spesies dengan notasi $SPESES_{1/0}$. A_1 menunjukkan keberadaan spesies A dan A_0 menunjukkan ketidakterdapatnya spesies A. Demikian berlaku untuk spesies lain
5. Membuat tabel relasi yang menggambarkan hubungan secara spasial antara dua spesies dengan format contoh berikut :

SPESIES KE A	SPESIES KE B		
	B_1	B_0	Total Baris
A_1	C_{AB}	C_{A0}	$C_{AB}+C_{A0}$
A_0	C_{0B}	C_{00}	$C_{0B}+C_{00}$
Total Kolom	$C_{AB}+C_{0B}$	$C_{A0}+C_{00}$	$C_{AB}+C_{0B}+C_{A0}+C_{00}$

Dimana:

C_{AB} adalah jumlah sel yang berisi titik spesies A dan B

C_{A0} adalah jumlah sel yang berisi hanya titik spesies A

C_{0B} adalah jumlah sel yang berisi hanya titik spesies B

C_{00} adalah jumlah sel yang berisi sel kosong

6. Menghitung nilai khi-kuadrat statistik untuk dua jenis spesies tersebut menggunakan rumus berikut :

$$\chi_{AB}^2 = \frac{((C_{AB} \times C_{00}) - (C_{A0} \times C_{0B}))^2 \times (C_{AB} + C_{00} + C_{A0} + C_{0B})}{((C_{AB} + C_{A0}) \times (C_{0B} + C_{00}) \times (C_{AB} + C_{0B}) \times (C_{A0} + C_{00}))}$$

7. Membuat tabel nilai χ^2 untuk semua pasangan spesies dengan format berikut :

SPESIES	A	B	...	H
A				
B				
...				
H				
TOTAL				

8. Mengidentifikasi total nilai χ^2 yang tertinggi dengan kesimpulan spesies tersebut paling tidak mirip dengan spesies lainnya

9. Membagi Tabel menjadi 2 bagian, tabel bagian pertama berisi data dengan keberadaan spesies yang total nilai χ^2 paling tinggi dan tabel bagian kedua berisi data dengan ketidak beradaan spesies yang total nilai χ^2 paling tinggi
10. Membuat dendrogram yang berisi proses penyeleksian spesies
11. Melakukan kembali proses pada langkah lima untuk kedua tabel yang dihasilkan.
12. Iterasi dilakukan hingga didapat nilai χ^2 terbesar sama dengan nol.

9.5. Proses Perhitungan

Data keberadaan 8 spesies burung sebanyak dari 20 daerah yang berbeda pada Tabel 9.1 dianalisis menggunakan Metode Kuadran untuk mengetahui bentuk distribusi atau bentuk korelasi secara spasial antara spesies burung dengan daerah tinggal burung.

ITERASI KE 1

Bentuk relasi antara Spesies A dan B ditampilkan pada langkah kelima ditampilkan kedalam tabel berikut.

Tabel 9.2. Bentuk Relasi Spesies A dan B

SPESIES KE A	SPESIES KE B		
	B_1	B_0	Total Baris
A_1	5	4	9
A_0	3	8	11
Total Kolom	8	12	12

Relasi antar spesies A dengan spesies lain juga dibuat ke dalam bentuk seperti table diatas, demikian seterusnya hingga relasi terakhir antara spesies H dengan spesies G. Langkah berikutnya melakukan penghitungan nilai χ^2 untuk semua pasangan spesies yang hasilnya ditampilkan kedalam table berikut.

Tabel 9.3. Nilai χ^2 Daerah untuk Semua Spesies

SPESES	A	B	C	D	E	F	G	H
A	-	1,65	5,05	13,39	1,82	7,59	0,90	0,90
B	1,65	-	3,33	0,30	3,33	2,15	0,13	0,30
C	5,05	3,33	-	5,05	12,80	16,36	1,82	0,20
D	13,39	0,30	5,05	-	1,82	7,10	0,74	0,74
E	1,82	3,33	12,80	1,82	-	9,90	1,82	0,20
F	7,59	2,15	16,36	7,10	9,90	-	0,74	0,90
G	0,90	0,13	1,82	0,74	1,82	0,74	-	0,74
H	0,90	0,30	0,20	0,74	0,20	0,90	0,74	-
TOTAL	31,30	11,21	44,62	29,14	31,69	44,75	6,88	3,98

Total nilai χ^2 tertinggi dimiliki oleh spesies F sehingga dapat diputuskan bahwa spesies F digunakan untuk membagi data daerah menjadi dua bagian. Nilai χ^2 bernilai positif dan berhubungan dengan derajat ketidakmiripan antara 2 sebaran spesies. Spesies F dianggap sebagai spesies yang paling tidak memiliki kemiripan dalam hal tempat tinggalnya dengan spesies lainnya yang ditunjukkan dengan nilai Khi-Kuadrat terbesar. Langkah berikutnya adalah membagi data menjadi dua. Kelompok pertama terdiri dari semua daerah yang terdapat spesies F dan kelompok kedua terdiri dari semua daerah yang tidak terdapat spesies F.

ITERASI KE 2

A. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F

Data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F digambarkan oleh tabel berikut :

Tabel 9.4. Kelompok Daerah dengan Spesies F didalamnya

DAERAH	SPESES							
	A	B	C	D	E	G	H	
5	0	0	0	1	1	0	0	
6	1	0	0	0	1	1	1	
13	0	1	0	1	1	0	0	
14	0	0	0	0	1	1	1	
16	0	0	0	1	0	1	1	
17	0	1	0	1	1	0	1	

18	0	0	0	1	1	0	1
19	0	0	0	1	1	0	1
20	0	0	0	1	1	1	0

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data Tabel 9.4 diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.5. Nilai Khi-Kuadrat daerah dengan Spesies F Di dalamnya

SPESES	A	B	C	D	E	G	H
A	-	0,32	0	3,94	0,14	1,41	0,56
B	0,32	-	0	0,73	0,32	2,06	0,32
C	0	0	-	0	0	0	0
D	3,94	0,73	0	-	0,32	3,21	1,29
E	0,14	0,32	0	0,32	-	1,41	0,56
G	1,41	2,06	0	3,21	1,41	-	0,23
H	0,56	0,32	0	1,29	0,56	0,23	-
TOTAL	6,37	3,76	0	9,49	2,75	8,31	2,96

Dari Tabel 9.5 diperoleh nilai χ^2 yang terbesar terdapat pada spesies D. Langkah berikutnya adalah membagi kelompok ini menjadi dua yaitu kelompok dengan spesies D terdapat didalamnya dan tidak ada spesies D didalamnya.

B. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang tidak terdapat spesies F didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.6. Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Tidak Ada Spesies F didalamnya

SPESES	A	B	C	D	E	G	H
A	-	0,75	0,41	6,52	0,92	0,02	3,44
B	0,75	-	1,32	0,02	2,93	0,05	2,40
C	0,41	1,32	-	0,24	4,95	1,93	0,92
D	6,52	0,02	0,24	-	0,54	1,40	2,04
E	0,92	2,93	4,95	0,54	-	0,20	2,04
G	0,02	0,05	1,93	1,40	0,20	-	1,06
H	3,44	2,40	0,92	2,04	2,04	1,06	-
TOTAL	12,05	7,47	9,77	10,76	11,58	4,65	11,88

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.6 terdapat pada spesies A, sehingga kelompok daerah dengan tidak ada spesies F didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies A didalamnya dan kelompok dengan spesies A tidak ada didalamnya.

ITERASI KE 3

A. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F dan terdapat spesies D

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F dan D diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.7. Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F dan D didalamnya

SPESES	A	B	C	E	G	H
A	-	0	0	0	0	0
B	0	-	0	0,47	1,12	0,06
C	0	0	-	0	0	0
E	0	0,47	0	-	2,92	0,88
G	0	1,12	0	2,92	-	0,06
H	0	0,06	0	0,88	0,06	-
TOTAL	0	1,65	0	4,26	4,10	0,99

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.7 terdapat pada spesies E, sehingga kelompok daerah dengan spesies F dan D didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies E didalamnya dan kelompok dengan spesies E tidak ada didalamnya.

- B. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F dan tidak terdapat spesies D

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F namun tidak terdapat spesies D diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.8. Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F didalamnya namun Tidak Terdapat Spesies D

SPESES	A	B	C	E	G	H
A	-	0	0	0	0	0
B	0	-	0	0	0	0
C	0	0	-	0	0	0
E	0	0	0	-	0	0
G	0	0	0	0	-	0
H	0	0	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.8 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

- C. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan terdapat spesies A

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F namun terdapat spesies A diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.9. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F Namun Terdapat Spesies A didalamnya

SPESES	B	C	D	E	G	H
B	-	1,90	0	4,44	0,04	1,74
C	1,90	-	0	3,43	1,90	1,90
D	0	0	-	0	0	0
E	4,44	3,43	0	-	0,18	4,44
G	0,04	1,90	0	0,18	-	1,74
H	1,74	1,90	0	4,44	1,74	-
TOTAL	8,13	9,14	0	12,50	3,86	9,83

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9,9 terdapat pada spesies E, sehingga kelompok daerah tanpa spesies F namun terdapat spesies A didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies E di dalamnya dan kelompok dengan spesies E tidak ada di dalamnya.

D. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan A

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang tidak terdapat spesies F dan A didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.10. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Tanpa Spesies F dan A di dalamnya

SPESES	B	C	D	E	G	H
B	-	0	0,75	0	0,75	0
C	0	-	0	0	0	0
D	0,75	0	-	0	3,00	0
E	0	0	0	-	0	0
G	0,75	0	3,00	0	-	0
H	0	0	0	0	0	-
TOTAL	1,50	0	3,75	0,00	3,75	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.10 terdapat pada spesies D dan G, sehingga kelompok daerah tanpa spesies F dan A didalamnya dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok dengan spesies E didalamnya, kelompok

dengan spesies E tidak ada didalamnya, kelompok dengan spesies G didalamnya dan kelompok dengan spesies G tidak ada didalamnya.

ITERASI KE 4

A. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.11. Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F, D dan E di dalamnya

SPESES	A	B	C	G	H
A	-	0	0	0	0
B	0	-	0	0,60	0
C	0	0	-	0	0
G	0	0,60	0	-	1,20
H	0	0	0	1,20	-
TOTAL	0	0,60	0	1,80	1,20

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.11 terdapat pada spesies G, sehingga kelompok daerah dengan spesies F, D dan E didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies G didalamnya, kelompok dengan spesies G tidak ada didalamnya.

B. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F dan D namun tidak terdapat spesies E

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F dan D namun tanpa spesies E didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.12. Nilai Khi-Kuadrat Daerah dengan Spesies F dan D namun Tanpa Spesies E di dalamnya

SPESES	A	B	C	G	H
A	-	0	0	0	0
B	0	-	0	0	0
C	0	0	-	0	0
G	0	0	0	-	0
H	0	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.12 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

C. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F namun terdapat spesies A dan E

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F namun terdapat spesies A dan E didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.13. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F namun terdapat Spesies A dan E di dalamnya

SPESES	B	C	D	G	H
B	-	0	0	0	0
C	0	-	0	2,00	0
D	0	0	-	0	0
G	0	2,00	0	-	0
H	0	0	0	0	-
TOTAL	0	2,00	0	2,00	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.13 terdapat pada spesies C dan G, sehingga kelompok daerah tanpa spesies F namun terdapat spesies A dan E didalamnya dibagi menjadi empat kelompok yaitu kelompok dengan spesies C didalamnya, kelompok dengan spesies C tidak ada didalamnya, kelompok dengan spesies G didalamnya, kelompok dengan spesies G tidak ada didalamnya.

D. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan E namun terdapat spesies A

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan E namun terdapat spesies A didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.14. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F dan E namun terdapat Spesies A di dalamnya

SPESES	B	C	D	G	H
B	-	0	0	0,60	0,24
C	0	-	0	0	0
D	0	0	-	0	0
G	0,60	0	0	-	2,40
H	0,24	0	0	2,40	-
TOTAL	0,84	0	0	3,00	2,64

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.14 terdapat pada spesies G, sehingga kelompok daerah tanpa spesies F dan E namun terdapat spesies A didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies G didalamnya dan kelompok dengan spesies G tidak ada didalamnya.

E. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan A namun terdapat spesies D dan G

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan A namun terdapat spesies D dan G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.15. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F dan A namun terdapat Spesies D dan G di dalamnya

SPESES	B	C	E	H
B	-	0	0	0
C	0	-	0	0
E	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.15 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

F. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, A, D dan G

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, A, D dan G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.16. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F, A, D dan G di dalamnya

SPESES	B	C	E	H
B	-	0	0	0
C	0	-	0	0
E	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.16 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

ITERASI KE 5

A. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D, E dan G

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat

spesies F, D, E dan G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9. 17. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D, E dan G di dalamnya

SPESES	A	B	C	H
A	-	0	0	0
B	0	-	0	0
C	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.17 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

B. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E tanpa spesies G didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E tanpa spesies G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.18. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D dan E tanpa Spesies G di dalamnya

SPESES	A	B	C	H
A	-	0	0	0
B	0	-	0	0,14
C	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0,14

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.18 terdapat pada spesies H, sehingga kelompok daerah dengan spesies F, D dan E namun tanpa spesies G didalamnya dibagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok dengan spesies H didalamnya dan kelompok dengan spesies H tidak ada didalamnya.

- C. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F namun terdapat spesies A, C, E, dan G didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F namun terdapat spesies A, C, E, dan G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.19. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F namun Terdapat Spesies A, C, E, dan G didalamnya

SPESES	B	D	H
B	-	0	0
D	0	-	0
H	0	0	-
TOTAL	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.19 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

- D. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, C dan G namun terdapat spesies A dan E didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, C dan G namun terdapat spesies A dan E didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.20. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F, C dan G namun terdapat Spesies A dan E di dalamnya

SPESES	B	D	H
B	-	0	0
D	0	-	0
H	0	0	-
TOTAL	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.20 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

- E. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan E namun terdapat spesies A dan G didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F dan E namun terdapat spesies A dan G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.21. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F dan E namun terdapat Spesies A dan G didalamnya

SPESES	B	C	D	H
B	-	0	0	0
C	0	-	0	0
D	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.21 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

- F. Kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, E dan G namun terdapat spesies A didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya tidak terdapat spesies F, E dan G namun terdapat spesies A didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.22. Nilai Khi-Kuadrat Daerah tanpa Spesies F dan E namun terdapat Spesies A dan G di dalamnya

SPESES	B	C	D	H
B	-	0	0	0
C	0	-	0	0
D	0	0	-	0
H	0	0	0	-
TOTAL	0	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.22 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

ITERASI KE 6

- A. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D, E, dan H namun tidak terdapat spesies G didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D, E dan H namun tidak terdapat spesies G didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

Tabel 9.23. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D, E dan H namun Tidak Terdapat Spesies G di dalamnya

Spesies	A	B	C
A	-	0	0
B	0	-	0
C	0	0	-
TOTAL	0	0	0

Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.23 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

- B. Kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E namun tidak terdapat spesies G dan H didalamnya

Dengan mengulang langkah ke lima hingga ketujuh pada bagian Metodologi menggunakan data kelompok daerah yang didalamnya terdapat spesies F, D dan E namun tidak terdapat spesies G dan H didalamnya diperoleh hasil perhitungan nilai χ^2 seperti ditampilkan pada tabel berikut :

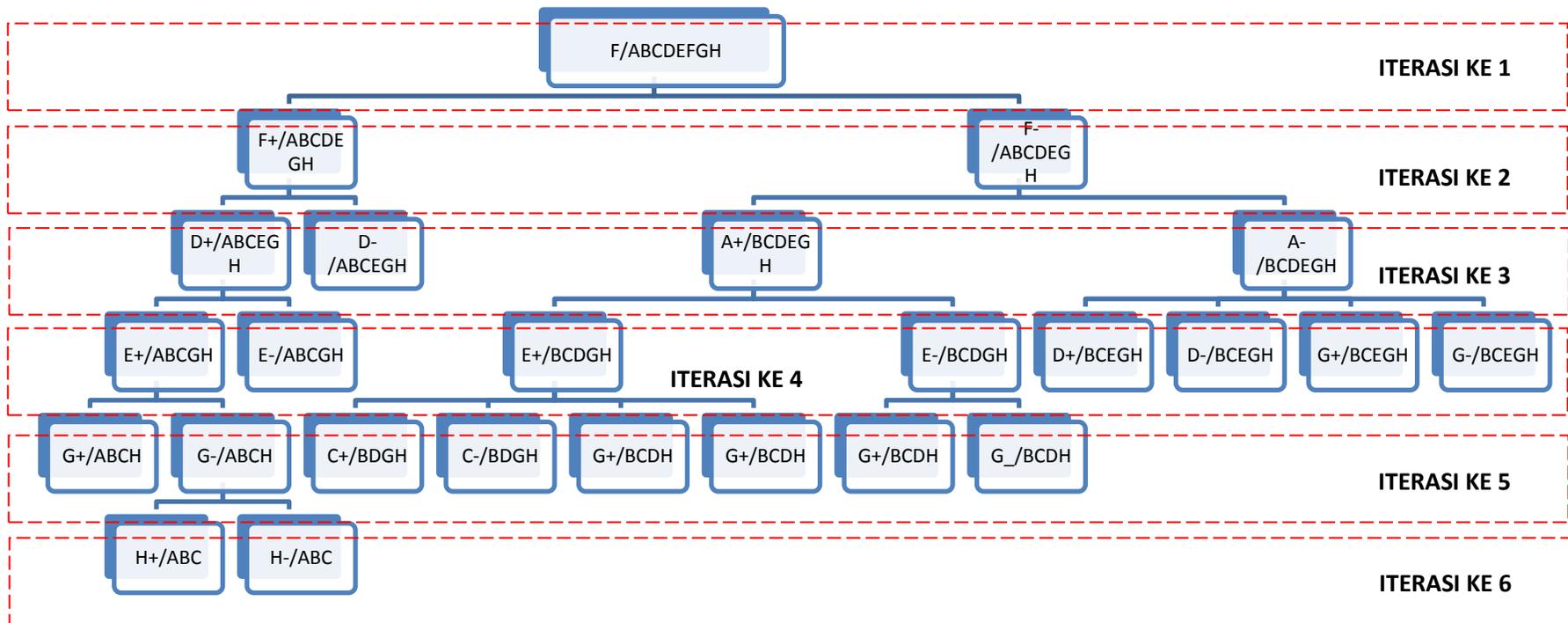
Tabel 9.24. Nilai Khi-Kuadrat Daerah Spesies F, D dan E namun tidak terdapat Spesies G dan H di dalamnya

Spesies	A	B	C
A	-	0	0
B	0	-	0
C	0	0	-
TOTAL	0	0	0

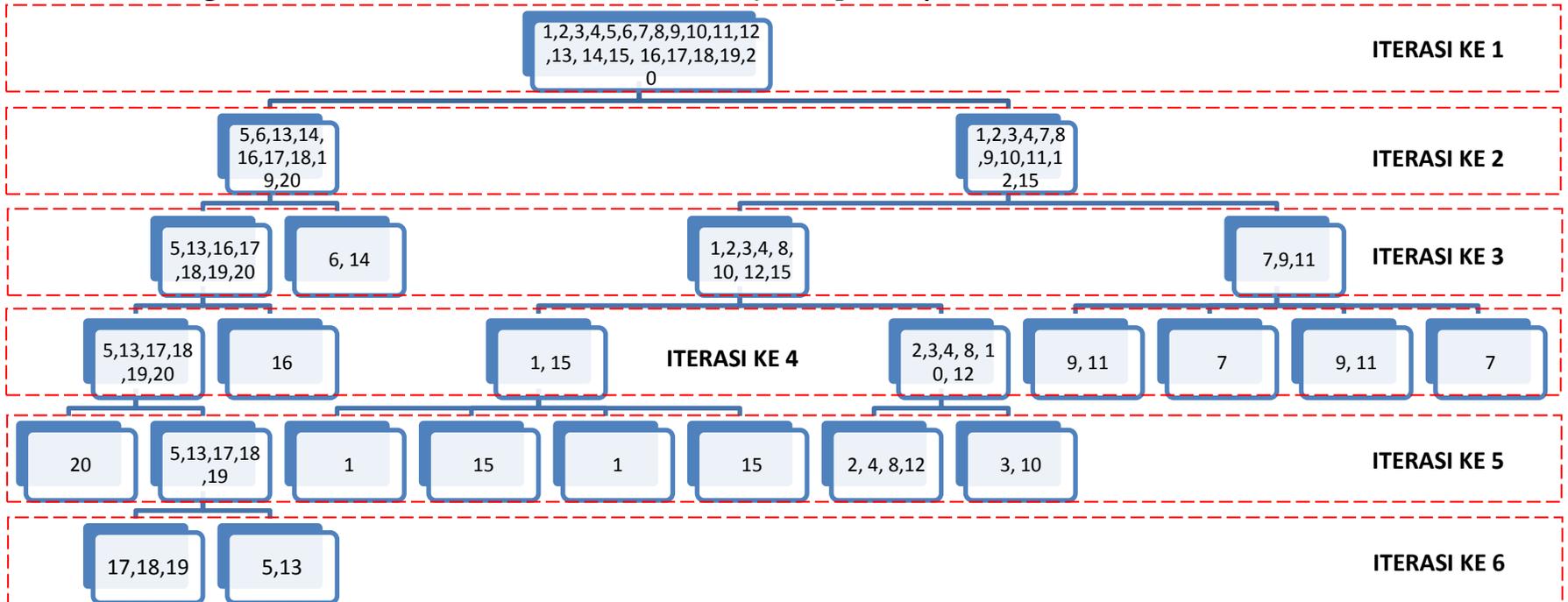
Nilai χ^2 yang terbesar dari Tabel 9.24 adalah nol sehingga iterasi untuk kelompok ini berhenti di titik ini.

Hasil perhitungan akhir pada nilai Khi-Kuadrat menunjukkan bahwa tidak ada ketidakmiripan lagi antar spesies di daerah penyebaran tersebut. Hasil seleksi spesies berdasarkan nilai χ^2 dapat digambarkan dengan bentuk dendogram seperti dibawah ini.

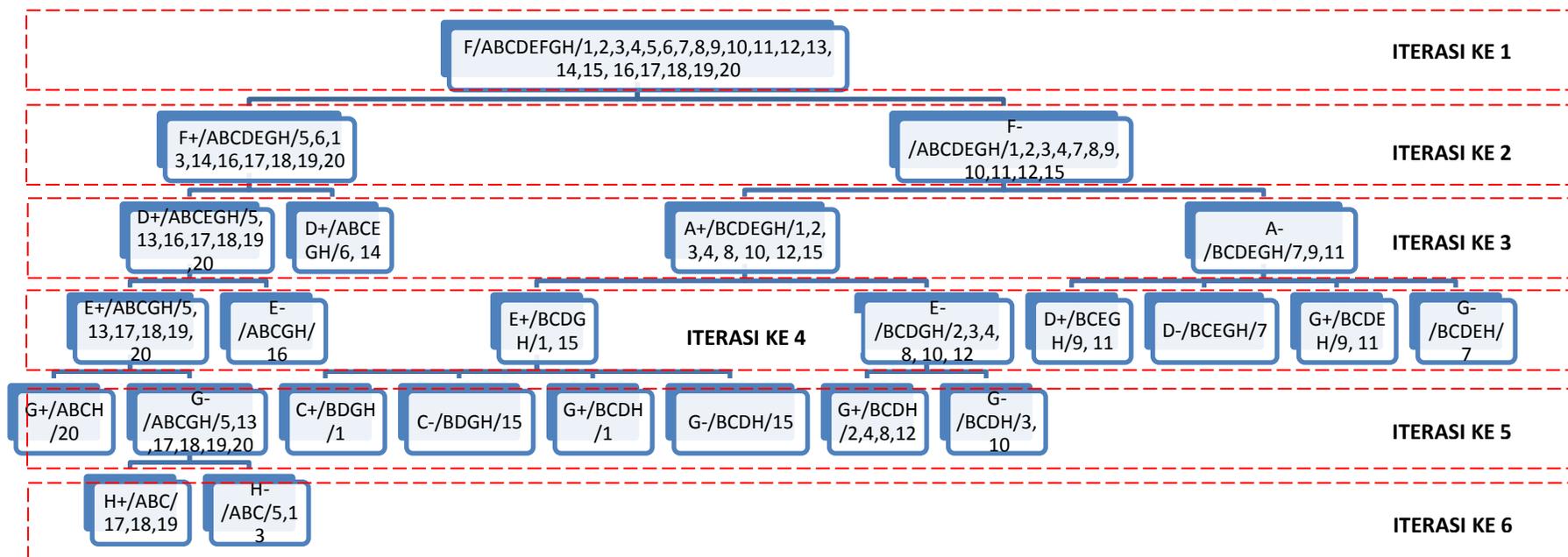
Gambar 9.1. Diagram Seleksi Spesies Berdasarkan Keberadaan Tempat Tinggalnya



Gambar 9.2. Diagram Seleksi Daerah berdasarkan Keberadaan Jenis Spesiesnya



Gambar 9.3. Diagram Alur Kedekatan Spasial antara Spesies dengan Habitat nya(*Home Range*)



9.6. Hasil

9.6.1. Hubungan antar Spesies Berdasarkan Keberadaan Tempat Tinggalnya

Dari Gambar 9.1 dapat diambil kesimpulan mengenai kedekatan hubungan berdasarkan jenis spesies burung.

Iterasi ke enam menunjukkan bahwa spesies A, B, dan C memiliki hubungan spasial yang sangat dekat satu sama lain sehingga dapat membentuk sebuah kelompok dengan tidak adanya keberadaan spesies G. Spesies A, B, dan C memiliki hubungan spasial yang dekat adanya keberadaan spesies E. Spesies A, B, dan C memiliki hubungan spasial yang cukup dekat adanya keberadaan spesies D. Spesies A, B, dan C memiliki hubungan spasial yang cukup jauh dengan adanya keberadaan spesies F.

Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang sangat dekat dengan adanya spesies E. Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang dekat dengan adanya spesies A. Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang cukup dekat dengan tidak adanya spesies F.

Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang sangat dekat dengan tidak adanya spesies E. Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang dekat dengan adanya spesies A. Spesies B, C, D, dan H memiliki hubungan spasial yang cukup dekat dengan tidak adanya spesies F.

Spesies B, C, E, G, dan H memiliki hubungan spasial yang sangat dekat dengan tidak adanya spesies A. Spesies B, C, E, G, dan H memiliki hubungan spasial yang dekat dengan tidak adanya spesies F.

9.6.2. Hubungan antar Daerah berdasarkan Keberadaan Jenis Spesiesnya

Dari Gambar 9.2 dan 9.3 dapat diambil kesimpulan mengenai kedekatan hubungan jenis spesies burung berdasarkan keberadaannya dalam wilayah tertentu.

Dengan keberadaan spesies F, spesies F ada di daerah 5, 6, 13, 14, 16, 17, 18, 19 dan 20. Spesies D ada di daerah 5, 9, 11, 13, 16, 17, 18, 19 dan 20 dan spesies D tidak bisa didapati hanya di daerah 6 dan 14. Spesies E berada di daerah 5, 13, 16, 17, 18, 19 dan 20 dan tidak ada hanya di daerah 16. Spesies G

dapat ditemui di daerah 5, 13, 17, 18 dan 19 namun tidak bisa ditemui didaerah 20. Spesies H ada di daerah 17, 18, 19, dan 20 jika didaerah tersebut tidak didapati spesies H, demikian untuk spesies H tidak dapat ditemui di daerah 5 dan 13 jika didaerah tersebut tidak ditemui spesies G.

Dengan tidak adanya keberadaan spesies F, spesies F tidak bisa ditemui didaerah 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 12 dan 15. Spesies A dapat ditemui di daerah 1, 2, 3, 4, 8, 10, 12 dan 15, namun tidak dapat ditemui di daerah 7, 9, dan 11. Spesies E bisa ditemui didaerah 1 dan 15 namun tidak dapat ditemui di daerah 2, 3, 4, 8, 10 dan 12. Spesies D dan G bisa ditemukan di daerah 9 dan 11 namun tidak akan dapat ditemukan di daerah 7. Spesies C dan G akan ditemukan didaerah 1 jika didaerah tersebut terdapat spesies E, namun kebalikannya spesies C dan G tidak akan ditemukan didaerah 15 jika didaerah tersebut ditemukan spesies E. Spesies G akan ditemukan didaerah 2, 4, 8 dan 12 jika didaerah tersebut tidak terdapat spesies E, sebaliknya spesies G tidak akan ditemukan di daerah 3, 10 jika didaerah tersebut tidak terdapat spesies E.

9.7. Kesimpulan

Berdasarkan penjelasan di atas maka dapat di simpulkan bahwa:

1. Distribusi Spesies burung memiliki Karakteristik yang berbeda-beda pada setiap Daerah sebagai habitatnya.
2. Beberapa Spesies Burung memiliki habitat yang sama yang bisa kita katakan mereka memiliki Kedekatan spasial yang cukup besar di bandingkan Spesies lainnya, seperti:
 - 2.1 Spesies ABC memiliki kedekatan Spasial yang cukup besar dan mereka terdapat pada Daerah 5, 13, 17, 18, 19 sebagai Habitatnya. Hal ini bisa kita lihat dari panjangnya alur iterasi Spasial di bandingkan dengan alur lainnya.
 - 2.2 Spesies DGH sebagai kelompok Spesies kedua yang memiliki kedekatan Spasial yang cukup besar di bandingkan dengan spesies lainnya dan mereka terdapat pada Daerah 1 dan 15 sebagai habitat utamanya.
 - 2.3 Sedangkan Spesies E dan F merupakan Spesies yang tidak memiliki kedekatan Spasial dengan Spesies manapun (tingkat Asosiasinya cukup rendah dengan Spesies lain).
3. Suatu distribusi juga mempengaruhi unsur dari distribusinya sendiri, hal ini terutama pada distribusi Spesies. Adanya keberadaan suatu spesies

menimbulkan sekelompok Spesies memiliki habitat yang berbeda. Contohnya di sini adalah Spesies ABC memiliki kedekatan Spasial yang cukup erat di akibatkan oleh ada tidaknya Spesies H.

- ✓ Daerah 5 dan 13 menjadi habitat dari ABC disebabkan tidak adanya Spesies H
- ✓ Daerah 17,18 dan 19 menjadi habitat ABC di sebabkan adanya Spesies H
- ✓ Begitu pula untuk Spesies lainnya

9.8. Daftar Pustaka

56. Ludwig, J.A, Reynold, J.F. 1988. *Statistical Ecology. A Primer on Method and Computing*. John Wiley and Sons. New York.
57. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
58. Ross, S. 1989. *A First Course in Probability*. Macmillian Publishing Company. New York
59. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Lt

