BAB 4
PENGERTIAN DAN STATISTIK UKUR

Muhammad Nur Aidi

4.1. Pengertian

Kehidupan dan kegiatan makhluk hidup berada di setiap ruang di muka bumi. Banyak persoalan yang dapat timbul terkait ruang, salah satunya adalah persoalan pola penyebaran. Beberapa contoh dari pola penyebaran adalah pola penyebaran penduduk, pola penyebaran penyakit, serta pola penyebaran flora dan fauna. Pola penyebaran tersebut harus diteliti untuk menentukan kebijakan yang tepat. Oleh karena itu diperlukan analisis spasial untuk meneliti pola penyebaran (Rogers, 1974).

Konfigurasi titik dalam ruang adalah posisi geografis dari titik dalam suatu *plane* (wadah) yang diakibatkan oleh suatu realisasi Proses Spasial dari titik yang memenuhi dua kondisi berikut :

1. *Mempunyai peluang sama.* Setiap titik mempunyai peluang yang sama untuk berada pada posisi tertentu dalam wadah
2. *Independen.* Posisi suatu titik dalam wadah adalah independen terhadap titik lain pada wadah tersebut

Dengan pengertian di atas : pola yang dibentuk oleh M titik dan secara acak menempati suatu wadah maka sebuah titik ada di dalam sub divisi tertentu dari area A dapat dianggap sebagai kejadian dimana dengan peluang λA, λ adalah kerapatan (jumlah titik per unit area).

Contoh penjelasan tersebut adalah suatu subregion yang berbentuk kotak dengan luas a dibagi menjadi n kecil yang berbentuk kotak dan katakan sebagai sub divisi. Asumsi bahwa subdivisi ini begitu kecil sehingga peluang dari satu titik untuk ada di dalamnya adalah sangat kecil dan akan menuju nol bila n makin besar. Maka A= a/n, yang berarti peluang sub divisi mempunyai titik (λ a/n) dan peluang sub divisi tidak mempunyai titik adalah = (1- λ a/n)

Jika ada n subdivisi maka kombinasi menempatkan r titik adalah $\binom{n}{r}$ cara, dimana setiap cara mempunya peluang $(\lambda a/n)^r(1- \lambda a/n)^{n-r}$. Dengan demikian peluang menentukan titik dalam subregion segi empat dari area α adalah:

$$(R=r)=P(r)=\binom{n}{r}\left(\frac{\lambda a}{n}\right)^{r}\left(1-\frac{\lambda a}{n}\right)^{n-r}$$
$$=\frac{n(n-1)\ldots.(n-r+1)}{r\,!}\frac{(\lambda a)^r}{n^r}\left(1-\frac{\lambda a}{n}\right)^{n}\left(1-\frac{\lambda a}{n}\right)^{-r}$$
$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{r-1}{n}\right)\left(1-\frac{\lambda a}{n}\right)^{-r}\left[\left(1-\frac{\lambda a}{n}\right)^{n}\frac{(\lambda a)^r}{r!}\right]$$

Dengan n menuju tak hingga, maka

$$P(r)=exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!},\quad dengan\, r=0,1,\ldots,n$$

Nilai harapan r titik

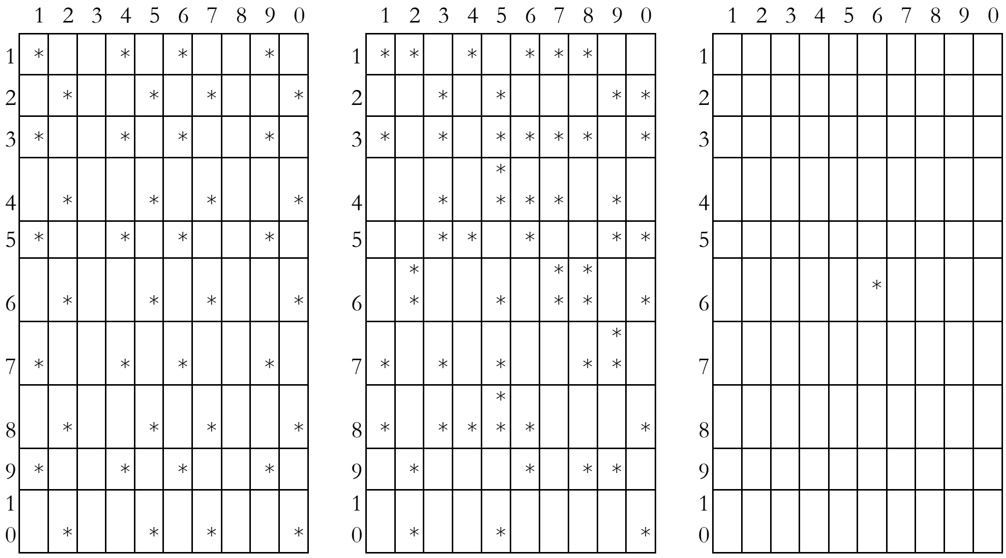
$$E(r)=m1=\sum_{r=0}^{n} r\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!}=\sum_{r=0}^{n} r\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)(\lambda a)^{r-1}}{r(r-1)!}$$
$$=(\lambda a)\sum_{r=1}^{n}\quad \exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^{r-1}}{(r-1)!}$$
$$=(\lambda a)\sum_{x=0}^{n}\exp\quad(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^{r-1}}{(m)!}=(\lambda a)$$

Momen kedua:

$$E(r^2)=\sum_{r=0}^{n} r^2\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!}$$
$$=\sum_{r=0}^{n} r\,(\mathrm{r}-1)\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!}+\sum_{r=0}^{n} r\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!}$$
$$=\sum_{r=0}^{n} r\,(\mathrm{r}-1)\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)(\lambda a)(\lambda a)^{r-2}}{r(r-1)(r-2)!}+(\lambda a)$$
$$=(\lambda a)^2\sum_{r=2}^{n}\exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^{r-2}}{(r-2)!}+(\lambda a)=(\lambda a)^2+(\lambda a)$$

Dengan demikian ragam dari distribusi Poisson adalah Var (r) = E[r^2] – $(E[r])^2$ $=(\lambda a)^2+(\lambda a)\quad-(\lambda a)^2=(\lambda a)$. Dengan demikian nilai rata-rata dan ragam adalah sama yakni (λa) .

Pada gambar 4.1 menampilkan pola acak titik spasial yang memiliki 52 titik, dimana gambar 4.2 (a) menampilkan kasus maksimum regular atau regular sempurna. Gambar 4.2 (b) pola acak titik dan 1.2 (c) menampilkan kasus titik bergerombol sempurna.



Reguler Acak Cluster

Gambar 4.1 Kuadran dari Sebaran Titik pada Regular Sempurna, Pola Acak dan Pola Gerombol Sempurna

Ada tiga macam penyebaran titik spasial pada suatu wilayah, yaitu acak, regular, dan gerombol (Crawley, 2007). Salah satu metode untuk mengetahui penyebaran titik spasial di suatu wilayah adalah analisis kuadran. Aplikasi dari analisis kuadran dipengaruhi oleh masalah skala karena pemilihan jumlah dan ukuran kuadran adalah prosedur yang arbitrer (Thomas, 1977). Suatu sebaran titik spasial mungkin dapat menyebar regular bila dianalisis dengan kuadran yang berukuran kecil, menyebar gerombol bila dianalisis dengan kuadran berukuran sedang, atau menyebar acak bila dianalisis dengan kuadran berukuran besar (Crawley, 2007). Oleh karena itu, pemilihan jumlah dan ukuran kuadran akan mempengaruhi hasil intepretasi sebaran spasial yang sebenarnya.

Telah dikembangkan 50 tahun lalu di bidang tanaman, hewan dan ekologi. Metode Kuadran adalah sebuah planar (wadah) dibagi oleh grid-2 dan terbentuk sel-sel yang berukuran sama yang disebut kuadran dan jumlah titik dalam setiap sel adalah acak.Kuadran umumnya berbentuk segi empat.

Hipotesis yang dikembangkan adalah lebih mengarah apakah titik-titik terdistribusi regular atau clustered daripada random atau tidak random

Regular point process adalah sejumlah besar kuadran berisi satu titik, hanya beberapa kuadran yang kosong, dan sangat sedikit kuadran yang berisi lebih dari satu titik

Clustered point process adalah sangat banyak kuadran yang kosong, sangat sedikit kuadran yang memiliki satu atau dua titik dan beberapa kuadran mempunyai banyak titik Penengah dari dua hal diatas adalah *random point process.*

Rasio varian dengan rata-rata merupakan nilai ragam populasi dan rata-rata populasi pada distribusi poisson dengan nilai sama sehingga var/rata-rata= 1 Dengan untuk menguji ketiga bentuk point process dari kondisi rendom di atas bagaimana simpangan var/rata-rata terhadap nilai satu. Makin besar perbedaan rasio dari nilai satu maka makin cluster dengan standar errornya = $[2/(N-1)]^{1/2}$ dimana N adalah jumlah yang diobservasi. Analisis Kuadran memiliki beberapa persoalan yaitu:

a. Ukuran Kuadran
b. Jumlah Kuadran
c. Bentuk Kuadran

Pada gambar 4. 1 menampilkan ketiga contoh konfigurasi titik dalam ruang dimana N= 100 (banyaknya grid), r = 52 (banyaknya titik)

1. Pada Perfectly regular
   a. Dugaan m_1= 0.5200
   b. Dugaan m_2= 0.2521
   c. Dugaan m_2/Dugaan m_1 = 0.4848
   d. t_{hitung}=(0.4848-0.1)/(0.1421)= -3.6256
2. Pada Random
   a. Dugaan m_1= 0.5200
   b. Dugaan m_2= 0.5148
   c. Dugaan m_2/Dugaan m_1 = 0.9899
   d. t_{hitung}=(0.9899-0.1)/(0.1421)= -0.0711
3. Pada Perfect Clustered
   a. Dugaan m_1= 0.5200
   b. Dugaan m_2= 27.400
   c. Dugaan m_2/Dugaan m_1 = 52.00
   d. t_{hitung}=(52.00-0.1)/(0.1421)= 358.9021

4.2 Contoh Perhitungan

Tahapan perhitungan metode kuadran adalah sebagai berikut

a. Bagilah area menjadi m sel yang kira-kira berukuran sama
b. Hitungkah totak kejadian pada area tersebut, katakan n
c. Tentukan rata-rata banyaknya kejadian per sel, katakan

$$\bar{x} = \frac{n}{m}$$

d. Tentukan nilai variance banyaknya kejadian per cell, katakan

$$S^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{m-1}$$

e. Hitung VMR

$$VMR = \frac{S^2}{\bar{x}}$$

Hasil perhitungan ada beberapa kemungkinan, yakni VMR=-0 yang menandakan konfigurasi titik dalam ruang adalah *uniform* atau *perfect* reguler. Bili VMR=1, hal ini menunjukkan bahwa konfigurasi titik dalam ruang adalah acak. VMR <1, yakni nilai ragam lebih kecil daripada rata-rata. Konfigurasi titik dalam ruang lebih mengarah ke bentuk reguler. VMR > 1, konfigurasi titik dalam ruang lebih kearah cluster dibandingkan dengan acak.

0 1

Reguler/Uniform Acak Cluster

Hipotesis yang dikembangkan adalah sebagai berikut

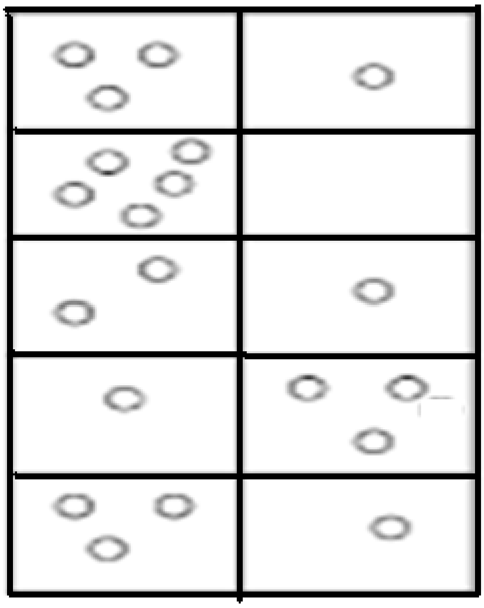
H_0: Konfigurasi titik dalam ruang adalah acak
H_1: Konfigurasi titik dalam ruang bukan acak
Dengan statistik hitung= (m-1)VMR

Jika m < 30, maka (m-1)VMR akan mempunyai sebaran Khi-Kuadrat dengan derajat bebas = m-1

$$\chi^2 = (m-1)VMR = \frac{(m-1)S^2}{\bar{x}} = \frac{(m-1)\sum(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}(m-1)} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{\bar{x}}$$

Tolak Hipotesis nol jika (m-1) VMR lebih besar daripada Khi-Kuadrat Tabel

Suatu kasus sebaran 20 orang yang terkena penyakit aid pada 10 wilayah yang digambarkan pada Gambar 4.2. berikut :



Gambar 4.2. Konfigurasi Penderita Aid di 10 Wilayah

Pertanyaannya adalah apakah konfigurasi penderita penyakit aid di 10 wilayah bersifat acak atau tidak ?.

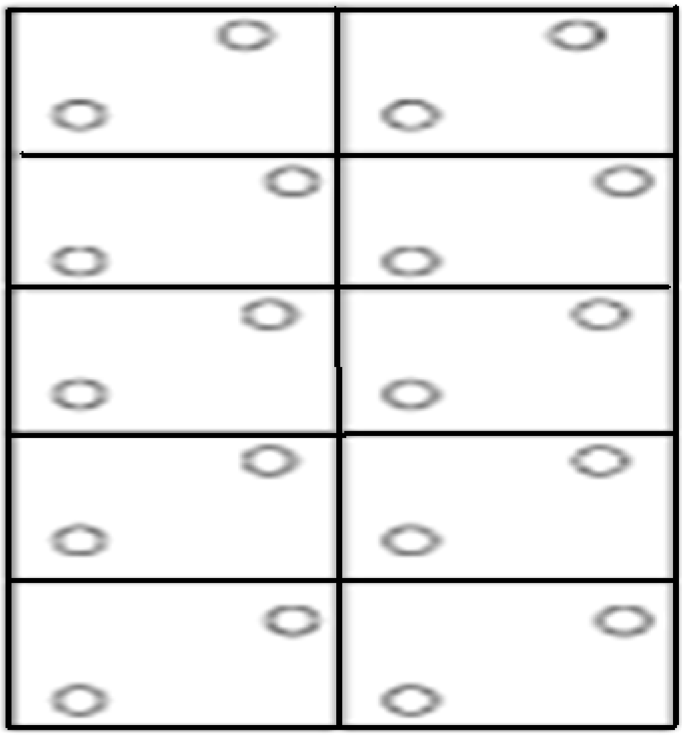
Wilayah	Banyaknya Penderita
1	3
2	1
3	5
4	0
5	2
6	1
7	1
8	3
9	3
10	1
Rata-Rata	2
Variance	2.222

VMR = 1.111

$$\chi^2 = (m-1)VMR = 9 * 1.111 = 9.99$$

Dengan df=10-1=9, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_0 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah acak.

Seandainya konfigurasi penyakit aid di 10 wilayah diubah menjadi seperti pada Gambar 4.3., Pertanyaannya adalah apakah konfigurasi penderita penyakit aid di 10 wilayah masih bersifat acak ataukah berubah ?.



Gambar 4.3. Konfigurasi Kedua Penderita Aid di 10 Wilayah

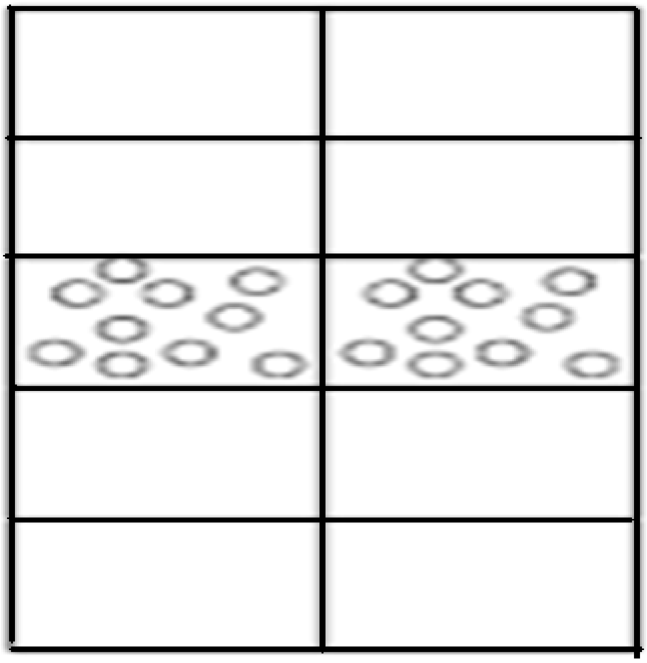
Wilayah	Banyaknya Penderita
1	2
2	2
3	2
4	2
5	2
6	2
7	2
8	2
9	2
10	2
Rata-Rata	2
Variance	0

VMR=0

$$\chi^2 = (m-1)VMR = 9 * 0 = 0$$

Dengan df=10-1=9, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_0 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah acak juga. Perhitungan dengan Khi Kuadrat kurang sensitif untuk kasus ini, karena pada Gambar 4.3. nampak konfigurasi dalam ruang adalah reguler.

Kita coba lagi pada kasus 20 orang penderita aid di 10 wilayah dengan konfigurasi dalam ruang yang disajikan pada Gambar 4.4.. Pertanyaannya apakah konfigurasi penderita aid tersebut masih acak ataukah berubah ?



Gambar 4.4. Konfigurasi Ketiga Penderita Aid di 10 Wilayah

Wilayah	Banyaknya Penderita
1	0
2	0
3	0
4	0
5	10
6	10
7	0
8	0
9	0
10	0
Rata-Rata	2
Variance	17.778

VMR=8.889

$$\chi^2 = (m-1)VMR = 9 * 8.889 = 80.001$$

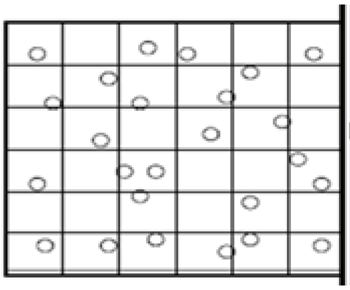
Dengan df=10-1=9, maka Khi-Kuadrat Tabel adalah 16.9 yang artinya terima H_1 yakni konfigurasi penyakit aid pada 10 wilayah tersebut adalah bukan acak, yakni cluster. Perhitungan dengan Khi Kuadrat sensitif untuk kasus ini, karena sudah bisa membedakan antara acak dan bukan acak pada kasus Khi-kuadrat hitung lebih besar dan Khi-kuadrat tabel.

Selanjutnya bila Jika m > 30, maka (m-1)VMR akan mempunyai sebaran normal dengan rataan bernilai m-1 serta ragam bernilai 2(m-1) jika hipotesis nol benar. Tranformasi Z adalah sebagai berikut

$$Z = \frac{(m-1)VMR - (m-)}{\sqrt{2(m-1)}} = \sqrt{(m-1)/2}\,(VMR-1)$$

Jika Z hitung > 1.96 berarti tolak pernyataan konfigurasi titik dalam ruang bersifat acak pada kesalahan 5 % dan mengarah pada konfigurasi titik dalam ruang bersifat cluster. Namun jika Z hitung < -1.96 96 berarti tolak pernyataan konfigurasi titik dalam ruang bersifat acak pada kesalahan 5 % dan mengarah pada konfigurasi titik dalam ruang bersifat reguler. Pada teknik perhitungan ini mampu dibedakan antara acak dan reguler. Sedangkan dengan perhitungan Khi-kuadrat (seperti contoh di atas) hasil perhitungan tidak bisa membedakan antara antara acak dan reguler.

Contoh berikut sebaran pabrik penghasil limbah B3 di kecamatan-kecamatan di Banten. Ada 25 pabrik penghasil limbah B3 yang diamati penyebarannya pada 36 kecamatan di Banten



Gambar 4.5. Konfigurasi Keberadaan pabrik penghasil limbah B3 di 36 Kecamatan di Banten

Perhitungan :
m= 36, N=25, maka

$$\bar{x} = \frac{N}{m} = 0.6944$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2}{m-1} = 0.3325$$

$$VMR = \frac{S^2}{\bar{x}} = 0.4789$$

$$Z = \sqrt{(m-1)/2}\,(VMR - 1) = \sqrt{(36-1)/2}\,(0.4789 - 1) = -2.18$$

Z hitung < -1.96, artinya sebaran pabrik penghasil limbah B3 bersifat reguler

4.3. Kelemahan Metode Kuadran

Ada beberapa kelemahan metode kuadran, antara lain

a. Ukuran Kuadran
   Ukuran kuadran sangat menentukan hasil analisi konfigurasi titik dalam ruang. Bila ukuran kuadran terlalu kecil sehingga mungkin hanya menampung satu titik setiap sel maka hasil analisis konfigurasi akan menghasilkan pola reguler. Demikan apabila ukuran sel terlalu besar sehingga menampung semua titik pada satu sel, maka hasil analisis konfigurasi akan cenderung berpola cluster.
b. Hasil perhitungan pada kuadran merupakan ukuran dispersi titik dalam ruang, bukan benar-benar konfigurasi titik dalam ruang. Hal ini disebabkan hasilnya merupakan pengukuran kepadatan titik dalam ruang, bukan bagaimana pengaturan konfigurasi antar titik.

*			
	*		
*		*	
	*		*

	*		*
*		*	
	*		
*			

Gambar 4.6. Dua Konfigurasi yang Berbeda, Hasil Perhitungan Kuadran Sama

c. Hasil perhtungan tidak memperlihatkan variasi konfigurasi dalam wilayah atau dalam sel. Hasil perhitungan hanya menggambarkan keseluruhan distribusi titik dalam wilayah.

4.4. Uji Kebaikan Suai Khi Kuadrat

Uji kebaikan suai khi-kuadrat adalah alternatif metode untuk menentukan sebaran titik yang diamati secara spasial adalah random. $m_1 = \lambda a$. dengan nilai dugaan $\hat{m}_1$ maka nilai harapan frekuensi adalah NP(r) dimana:

NP(r) = N exp $(-\hat{m}_1)\frac{\hat{m}^r}{r!}$ dimana r = 1, 2, …

$$\chi^2 = \sum_{r=0}^{w} \frac{(f_r - NP(r))^2}{NP(r)}$$

Dimana:
w = jumlah dari kelas frekuensi
fr = jumlah observasi dalam kelas frekuensi
N = ukuran sample $(\sum_{r=0}^{w} fr = N)$
P(r) = peluang sebuah titik masuk ke kelas frekuensi ke r
H_0 = Proses menyebar acak
H_1 = Proses tidak menyebar acak

Contoh

Dari data Gambar 4.1. sebelumnya M=52 (banyaknya titik), N=100 (banyaknya grid)

Jumlah Titik per kuadran	Frekuensi			Frekuensi harapan dgn Poisson
	Perfect Regular	Random	Perfect Cluster	
0	48	59	99	59.45
1	52	32	0	30.92
2	0	7	0	8.04
3+	0	2	1	1.59
N	100	100	100	100
	-	0.08	64.96	
$P_{0.05}$	-	3.84	3.84	

Perfect Reguler

$$\chi^2 = \frac{(48-59.45)^2}{59.45} + \frac{(52-30.92)^2}{30.92} + \frac{(0-8.04)^2}{8.04} + \frac{(0-1.59)^2}{1.59}$$
$$= 26{,}21$$

Acak

$$\chi^2 = \frac{(59-59.45)^2}{59.45} + \frac{(32-30.92)^2}{30.92} + \frac{(7-8.04)^2}{8.04} + \frac{(2-1.59)^2}{1.59}$$
$$= 0{,}2814$$

Cluster

$$\chi^2 = \frac{(99-59.45)^2}{59.45} + \frac{(0-30.92)^2}{30.92} + \frac{(0-8.04)^2}{8.04} + \frac{(1-1.59)^2}{1.59}$$
$$= 65.49$$

4.5. Metode Tetangga Terdekat

Metode tetangga terdekat merupakan nilai rata-rata jarak antara titik pengamatan dengan tetangga terdekatnya dibandingkan dengan nilai harapan rata-rata jarak yang terjadi jika titik-titik tersebut menyebar spasial secara acak.

Tahapan yang dilakukan adalah sebagai berikut :

a. Hitung Jarak terdekat titik-titik pengamatan dengan rumus

$$d_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{d_i}{n}$$

d_i adalah jarak antara titik ke I dengan titik tetangga terdekatnya, n jumlah tifik pada konfigurasi spasial

b. Hitung nilai harapan jarak tetangga terdekat dengan rumus sebagai berikut :

$$d_e = \frac{1}{2\sqrt{n/A}}$$

A adalah luas wilayah studi

c. Tentukan Indeks Tetangga Terdekat (ITT)

$$ITT = \frac{d_0}{d_e}$$

Interpretasi ITT secara teori adalah

$0 \leq ITT \leq 2.14$

ITT=0 artinya semua titik pada satu lokasi

ITT=1.00 konfigurasi titik dalam ruang adalah acak

ITT=2.14 konfigurasi perfect uniform atau perfect reguler atau perfect sistematik atau titik menyebar pada wilayah dengan luasan tak hingga

0 1 2.14

Extrem Cluster Random Reguler/Uniform

Hipotesisnya adalah

H_0= Konfigurasi titik adalah acak

H_1= Konfigurasi titik bukan acak

Standar error dari jarak rata-rata tetangga terdekat dari konfigurasi acak adalah

$$Se = \sqrt{\frac{(4-\pi)A}{4\pi N^2}} = \frac{0.26136}{\sqrt{\frac{N^2}{A}}}$$

Z hitung adalah

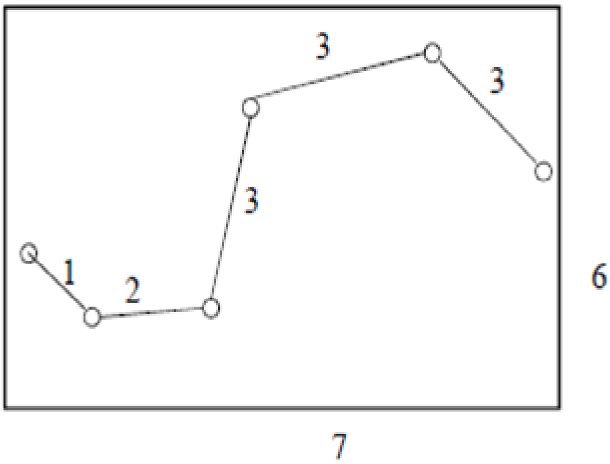
$$Z = \frac{d_0 - d_e}{Se}$$

Keputusan

a. Z hitung > 1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau uniform
b. Z hitung < -1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau cluster

Contoh

Misalkan suatu konfigurasi titik yang disajikan pada gambar berikut



Titik Pengamatan	Tetangga Terdekat	Jarak
1	2	1
2	1	1
3	2	2
4	3	3
5	4	3
6	5	3

$$d_0 = \sum_{i=1}^{6} \frac{(1+1+2+3+3+3)}{6} = 2.167$$

$$d_e = \frac{1}{2\sqrt{6/(6*7)}} = 1.323$$

$$ITT = \frac{d_0}{d_e} = \frac{2.167}{1.323} = 1.638$$

(mengarah ke uniform atau reguler)

$$Se = \sqrt{\frac{(4-\pi)A}{4\pi N^2}} = \frac{0.26136}{\sqrt{\frac{N^2}{A}}} = \frac{0.26136}{\sqrt{36/42}} = 0.2823$$

$$Z = \frac{d_0 - d_e}{Se} = \frac{2.167 - 1.323}{0.2823} = 2.9897$$

Keputusan

Z hitung > 1.96 maka konfigurasi titik adalah reguler atau uniform

4.6. Daftar Pustaka

1. Baddeley, Adrian. 2008. *Analysing Spatial Point Patterns in R.* http://www.csiro.au/resources/SpatialPoint-Patterns-in-R.html (19 Juli 2009)
2. Crawley, Michael J. 2007. *The R Book*. Inggris : John Wiley & Sons, Ltd
3. Daniel, Wayne W. 1990. *Applied Nonparametric Statistics.* Boston : PWS-Kent Publishing Company
4. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
5. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
6. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd