BAB 5
FUNDAMENTAL DISTRIBUSI PELUANG
MUHAMMAD NUR AIDI

5.1. Pendahuluan

Untuk mendeteksi bagaimana konfigurasi titik dalam ruang apakah bersifat acak atau random, regular, ataupun *cluster* (kelompok); pertama-tama kita harus mendefinisikan terminologi matematika tentang bentuk distribusi peluang. Prosedure yang biasanya digunakan adalah Distribusi Peluang Poisson untuk mendeteksi tingkat keacakan. Selanjutnya kita akan mengembangkan distribusi ini untuk menganalisis ketidak acakan.

5.2. Distribusi Spasial untuk Acak/Random, Regular dan Kelompok (*Cluster*).

Bayangkan suatu wilayah studi yang di grid dengan sel berbentuk segi empat. Asumsikan pada saat awal (t=0) tidak ada sel yang berisi sembarang titik, dan p(r,t) adalah peluang sebuah sel grid mempunyai r titik selama waktu t. Asumsi : selama selang waktu (t, t+dt) sebuah titik menempati sebuah sel tertentu dimana telah mempunyai r titik dengan peluang f(r,t) dt dan bahwa selang waktu tersebut adalah cukup pendek untuk tidak lebih dari satu titik untuk menempati satu sel yang diberikan pada selang waktu tersebut.

$$p(0, t+dt) = p(0,t)\,[1-f(0,t)\,dt]$$
$$p(r, t+dt) = p(r,t)\,[1-f(r,t)\,dt]+p(r-1, t)\,f(r-1, t)\,dt \text{ dimana } r=1,2,3,\ldots..$$

dan kiri-kanan dikurangi p(r,t) dan dibagi dengan dt dalam limit dt→ 0, maka

$$\frac{d}{dt}\,p(0, t) = -\,f(0,t)\,p(0,t)$$
$$\frac{d}{dt}\,p(r, t) = -f(r, t)\,p(r, t) + f(r-1, t)\,p(r-1, t) \quad (r=1, 2, 3, \ldots..)$$

Persamaan $\frac{d}{dt}$ p(0, t) = - f(0,t) p(0,t) dikalikan dengan s^0, persamaan -f(r, t) p(r, t) dikalikan s dan persamaan f(r-1, t) p(r-1, t) dikalikan dengan s^2 dan secara umum s^{n-1} ke n.

Penjumlahan :

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{r=0}^{\sim} p(r,t)\,s^r\right] = (s-1)[\sum_{r=0}^{\sim} f(r,t)\,p(r,t)s^r]$$

Dan lebih kompak

$\frac{d}{dt}$ G(s;t)= (s-1) L(s;t)

dimana G(s;t)= $[\sum_{r=0}^{\sim} p(r,t)\, s^r]$ adalah peluang fungsi momen dengan peubah r dan

$$L(s;t) = \sum_{r=0}^{\sim} f(r,t)\, p(r,t) s^r$$

Untuk menemukan G(s;t) kita harus memecahkan persamaan diferensial pada $\frac{d}{dt}$ G(s;t) =(s-1) L(s;t). Hasil distribusi apakah acak, regular atau kelompok tergantung pada asumsi yang dibuat pada $f(r,t)$. Catatan $f(r,t)$ adalah sebuah peluang dan satu kesatuan dengan nilai r.

Perlu ditekankan peluang bahwa sebuah sel dengan r titik telah didapatkan dan satu titik lagi masuk pada selang waktu (t, t+dt). Jika peluang ini adalah independen terhadap titik-titik yang ada dalam sel, maka dikenal sebagai *random dispersion*. Pada sisi lain peluang ini menurun pada saat jumlah titik dalam sel meningkat didefinisikan sebagai disperse *spasial yang regular*. Terakhir, jika peluang meningkat seirama dengan meningkatnya jumlah titik yang ada dalam sel dikenal sebagai *disperse spasial "Cluster"*.

5.3. Dispersi Spasial Acak/Random : Distribusi Poisson

Asumsikan : peluang bahwa sebuah sel menerima satu titik dalam selang waktu (t, t+dt) adalah benar-benar independen dari sejumlah titik yang telah ada dalam sel.

Maka

f(r, t) = f(t)

L(s;t) = $\sum_{r=0}^{\sim} f(r,t)\, p(r,t) s^r$ =f(r) G(s;t)

Persamaan $\frac{d}{dt}$ G(s;t)= (s-1) L(s;t) menjadi $\frac{d}{dt}$ G(s;t)= (s-1) f(t) G(s;t)

dan solusi

$$G(s;t) = \exp\ [(s-1) \int_0^1 f(t')dt']$$

Untuk sembarang titik dalam waktu $\vec{t}$

G(s; $\vec{t}$) = G(s) = exp $[\lambda a(s-1)]$

Dimana $\lambda a = \int_0^{\vec{t}} f(t')dt'$

Persamaan G(s; $\vec{t}$) = G(s) = exp $[\lambda a(s-1)]$ adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson dengan parameter λa. Dengan demikian

p(r, $\vec{t}$)= p(r)= exp(-λa) $\frac{(\lambda a)^r}{r!}$ r=0, 1, 2, …..

Untuk mengecek fungsi pembangkit momen dari distribusi Poisson

G(s) =$\sum_{r=0}^{\infty} p(r)s^r$

Maka

G(s) = $\sum_{r=0}^{\infty} \exp(-\lambda a)\frac{(\lambda a)^r}{r!}s^r$= exp($-\lambda a$) $\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(\lambda a)^r}{r!}$

= $\exp(-\lambda a)$ exp (λas)

= exp $[\lambda a(s-1)]$

Dengan menggunakan hubungan yang standar

Exp (x) = $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x)^n}{n!}$

Dengan hubungan yang telah dikenal

E[r] = m_1 = $\frac{\partial}{\partial s}G(s)|_{s=1}$=G'(1)

Dan

Var (r) = m_2 = G''(1)+G'(1) –$[G'(1)]^2$

Maka

G'(s) = $\lambda a \exp[\lambda a\,(s-1)]$

m_1 = G'(1)= $\lambda a \exp(0)= \lambda a$

G''(s) = $(\lambda a)^2 \exp[\lambda a\,(s-1)]$

G''(1) = $(\lambda a)^2$

Maka

m_2 = G''(1)+G'(1)- $[G'(1)]^2$ = $(\lambda a)^2$+ λa-$(\lambda a)^2$ = λa

5.4. Dispersi Spasial Reguler : Distribusi Binomial

Asumsi :

Peluang bahwa sebuah titik menempati ke dalam sebuah sel adalah independen terhadap waktu dan peluangnya menurun secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

Secara khusus, katakana c/b adalah integer dan

$$f(r,t) = \begin{cases} c - br \; untuk \; c > br \; \geq 0 \\ 0, \qquad\qquad selainnya \end{cases}$$

Maka

L(s;t) = $\sum_{r=0}^{\infty}(c - br)\, p(r,t)s^r = c\sum_{r=0}^{\infty} \quad p(r,t)s^r - b\sum_{r=0}^{\infty}(r)\, p(r,t)s^r$

= c G(s;t) – bs $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)

Maka persamaan $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)= (s-1) L(s;t) menjadi

$\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t) = (s-1) [c G(s;t) – bs $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)]

Dengan solusinya :

G(s;t) = $\{\exp(-bt) - [\exp(-bt)-1]s\}^{c/b}$

Dengan demikian untuk sembarang titik dalam $\vec{t}$ waktu kita dapat mensubstitusikan

p = 1- exp (-b $\vec{t}$) dan n=c/b

Untuk mendapatkan

G(s;t) = G(s) = $(1-p+ps)^n$

Persamaan G(s;t) = G(s) = $(1-p+ps)^n$ merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi binomial

p(r) = $\binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}$ r=0, 1, 2,….,n

Untuk *check* apakah persamaan di atas fungsi pembangkit momen dari binomial

G(s) = $\sum_{r=0}^{\infty} p(r)\, s^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r} p^r(1-p)^{n-r}s^r$

$= \sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}(ps)^r(1-p)^{n-r}$

= $(1-p+ps)^n$

Turunan dari

$G'(s) = n\,p\,(1\text{-}p\text{+}ps)^{(n-1)}$

$G'(1) = np\,(1) = np$

$E(r) = G'(1) = np$

$G''(s) = np(n\text{-}1)p(1\text{-}p\text{+}ps)^{n-2}$

$G''(1) = n(n\text{-}1)\,p^2$

$Var\,(r) = m_2 = G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2$

$= n(n\text{-}1)p^2+np - (np)^2$

$= np(1\text{-}p)$

Perhatikan

$$\frac{var(r)}{\bar{x}} = \frac{np(1-p)}{np} = 1 - p$$

Yang mana lebih kecil dari 1.

Bila n besar dan p kecil, maka, jika n $\rightarrow \infty$ dan p$\rightarrow$0 maka np = λa. Dengan demikian sebaran Poisson cukup rasional sebagai pendekatan sebaran Binomial.

Bukti :

$G(s) = (1\text{-}p\text{+}ps)^n$

Jika jika n $\rightarrow \infty$ dan p$\rightarrow$ 0 dan np = λa adalah fix

$(1\text{-}p\text{+}ps)^n \left[1 - \frac{\lambda a(1-s)}{n}\right]^n$

Dan

$$\lim_{n\to\infty, p\to 0}\left[1 - \frac{\lambda a(1-s)}{n}\right]^n = \exp[\lambda a(s-1)]$$

5.5. Dispersi Spasial Cluster (Kelompok) :Distribusi Binomial Negatif

Asumsi :

Peluang sebuah titik dialokasikan pada suatu sel adalah independen terhadap waktu dan peluang meningkat secara linier dengan jumlah titik yang telah ada dalam sel.

$f(r,t) = c + br \qquad (c>0, b>0)$

Maka

L(s;t) = $\sum_{r=0}^{\infty}(c+br)p(r,t)s^r = c\sum_{r=0}^{\infty}p(r,t)s^r + b\sum_{r=0}^{\infty}r\,p(r,t)s^r$

= c G(s;t) + bs $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)

Dan persamaan $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)= (s-1) L(s;t) menjadi

$\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)= (s-1) [cG(s;t) + bs $\frac{\partial}{\partial s}$G(s;t)]

Dengan solusi

G(s;t) = [exp bt- (exp bt -)s]$^{-c/b}$

Untuk sembarang titik dalam $\vec{t}$ waktu, kita melakukan substitusi

p=exp b$\vec{t}$ -1 dan k = c/b

Maka

G(s;t) = G(s) = (1+p-ps)$^{-k}$

Persamaan G(s;t) = G(s) = (1+p-ps)$^{-k}$ merupakan fungsi pembangkit momen distribusi binomial negative

p(r) = $\binom{k+r-1}{r}\left(\frac{p}{1+p}\right)^r\left(\frac{1}{1+p}\right)^k$

kita menghitung fungsi pembangkit momen

G(s) = $\sum_{r=0}^{\infty}p(r)\,s^r = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}\left(\frac{p}{1+p}\right)^r\left(\frac{1}{1+p}\right)^k s^r$

= $\left(\frac{1}{1+p}\right)^k\sum_{r=0}^{\infty}\binom{k+r-1}{r}\left[\left(\frac{p}{1+p}\right)s\right]^r$

= $\left(\frac{1}{1+p}\right)^k\left[1-\left(\frac{p}{1+p}\right)s\right]^{-k}$ = (1+p-ps)$^{-k}$

Turunan G(s) untuk mendapatkan rataan dan varian

E(r) = m_1= G'(1) = kp

Dan

Var (r) = m_2 = G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2 = kp (1+p)

Catatan

$$\frac{var}{\bar{x}} > 1$$

Ketika k besar dan p kecil, k→ ∞ & p→ 0

Maka kp = λa fix

Maka

$(1+p-ps)^{-k} = [1+\frac{\lambda a(1-s)}{a}]^{-k}$

Dan

$$\lim_{k\to\infty, p\to 0}[1+\frac{\lambda a(1-s)}{a}]^{-k} = \frac{1}{\exp(\lambda a(1-s))} = exp\lambda a(s-1)$$

Yang merupakan fungsi pembangkit momen poisson

5.6. Daftar Pustaka

1. Engelhardt, M. and L.J. Bain. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Ed. PWS-Kent Pub., Boston.
2. Ghahramani,S. 1996. *Fundamentals of Probability*. Prentice Hall, New Jersey.
3. Golberg, S. 1962. Probability. An Introduction. Printice-Hall, Inc. Englewood Cliff, New York
4. Hogg, R.V, and A.T. Craig, 2005. Introduction to Mathematical Statistics. 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
5. Hogg, R.V and E.A. Tanis. 2001. Probability and Statistical Inference, 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
6. Hurtsbinger, D.V. dan P. P. Bilingsley. 1987. *Element of Statistical Inference*. 6th ed. Allyn and Bacon. Boston.
7. Koopmans, L. H. 1987. *Introduction to Contemporary Statistical Methods 2nd ed.* Duxbury Press. Boston.
8. Larson, H. J. 1969. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. John Wiley and Sons, New York
9. Mendenhall, W., Wackerly, D. D., & Scheaffer, R. L. 1990. *Mathematical Statistics with Applications*. Fourth ed. PWS Kent Publishing Co, Boston.
10. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
11. Ross, S. 1989. A First Course in Probability. Macmillian Publishing Company. New York
12. Scheaffer, R.L. 1990. *Introduction to Probability and Applications*. PWS Kent, Boston.
13. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
14. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd

15. Walpole, R.E, Myers, R.H, Myers, S.L, & Ye, K. 2002. Probability & Statistics for Engineers & Scientist 7th edition. Prentica Hall. New Jersey.