PENERAPAN PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN PADA SISTEM INVENTORI-PRODUKSI

Nurus Sa'adah, Toni Bakhtiar, Farida Hanum

Departemen Matematika FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680

ABSTRAK

Pengendalian persediaan (inventori) merupakan kegiatan alami seperti halnya proses menyimpan makanan, pakaian, pena, kertas, dan barang-barang lainnya. Bagi perusahaan, pengendalian persediaan sangat diperlukan karena merupakan modal kerja dan berperan dalam menjamin ketersediaan barang untuk memenuhi permintaan pelanggan. Masalah inventori-produksi merupakan model dinamis (fungsi dari waktu) sehingga dapat disajikan sebagai masalah kontrol optimum. Tulisan ini membahas tentang kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan mempertimbangkan kerusakan barang yang disimpan. Tingkat kerusakan barang diasumsikan mengikuti sebaran Weibull dua parameter. Pembahasan dalam tulisan ini meliputi dua kasus, yaitu sistem model kontinu dan diskret. Kondisi optimum untuk model kontinu diperoleh dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Solusi yang didapatkan berupa persamaan diferensial orde dua yang kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga. Sistem inventori-produksi diskret diselesaikan dengan metode pengali Lagrange dengan solusi optimal diperoleh melalui penyelesaian persamaan beda secara rekursif.

1 PENDAHULUAN

Aplikasi teori kontrol optimum dalam masalah riset operasi merupakan area penelitian yang luas dan terbuka [1]. Salah satu yang menarik untuk dibahas adalah tentang perencanaan produksi. Setiap individu adalah pengendali persediaan (*inventory controller*), baik di rumah maupun dalam pekerjaan sebagaimana kebiasaan orang menyimpan makanan, pakaian, kertas, pena, dan barang-barang lainnya. Beberapa orang secara teratur membuang atau mengeluarkan isi lemari es karena berubah sifat. Jadi, pengendalian persediaan adalah kegiatan alamiah yang dilakukan setiap orang [2].

Lebih jauh lagi, sebuah perusahaan yang berorientasi pada keuntungan (*profit oriented*) harus melakukan pengendalian persediaan sebagai salah satu aktiva penting di dalam perusahaan dan menjadi salah satu modal kerja perusahaan. Tingkat persediaan akan memengaruhi ketersediaan barang yang siap dijual untuk melayani pelanggan (*customer*). Dalam suatu persediaan, bila mencapai waktu tertentu barang akan rusak. Dengan menyesuaikan data empirik terhadap sebaran matematis, para peneliti menggunakan sebaran Weibull untuk memodelkan laju kerusakan barang. Beberapa contoh barang yang laju kerusakannya menyebar Weibull antara lain produk makanan, film kamera, obat-obatan, bahan kimia, komponen elektronik, dan sebagainya.

Dalam tulisan ini masalah sistem inventori-produksi dimodelkan dalam bentuk masalah kontrol optimum dan diselesaikan dengan prinsip maksimum Pontryagin untuk masalah kontinu dan metode pengali Lagrange untuk masalah diskret dengan mempertimbangkan laju kerusakan barang yang menyebar Weibull.

2 METODE PENELITIAN

2.1 Masalah Kontrol Optimum

Masalah kontrol optimum adalah masalah memilih peubah kontrol di antara semua peubah kontrol yang *admissible*, yaitu kontrol yang membawa sistem dari *state* awal pada waktu awal kepada *state* akhir pada waktu akhir, sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk fungsional objektif [3].

Misalkan diberikan sistem dinamik dalam bentuk sistem persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

untuk model kontinu atau dalam bentuk sis-tem persamaan beda

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (2)$$

untuk model diskret dengan *x* adalah variabel *state* dan *u* variabel kontrol. Sistem dinamik dapat berbentuk linear atau taklinear, mandiri (*autonomous*) atau takmandiri (*non-autonomous*), deterministik atau stokastik.

Misalkan U menyatakan himpunan dari semua fungsi yang kontinu sesepenggal (*piecewise*). Masalah kontrol optimum adalah menentukan fungsi kontrol u di antara fungsi *admissible* u yang membawa sistem dari *state* awal x_0 kepada *state* akhir x_T pada waktu $[t_0, T]$ melalui sistem (1) atau (2) sehingga mengoptimumkan fungsional objektif tertentu. Masalah kontrol optimum kontinu adalah masalah memaksimumkan fungsional objektif

$$\max_{u(t)\epsilon U} J[u(t)] = S[x(T),T] + \int_{t_0}^{T} f_0(x,u,t)dt$$

dengan f_0 adalah suatu fungsi yang diberikan dan $S[x(T),T]$ merupakan fungsi *scrap* (fungsi yang menggambarkan keadaan sistem di waktu akhir) terhadap kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

Masalah kontrol optimum diskret adalah masalah memaksimumkan fungsional objektif

$$\max_{u(k)} \sum_{k=0}^{T-1} F(x(k),u(k),k)$$

terhadap kendala

$$x(k+1) - x(k) = f(x(k),u(k),k)$$

$$x(k_0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

Kendala pertama merupakan persamaan beda yang menyatakan perubahan pada peubah keadaan dari waktu k ke k + 1, k = 0,1,2,...,T–1.

2.2 Prinsip Maksimum Pontryagin

Syarat perlu tercapainya kondisi optimum bagi MKOK diperoleh dengan menerapkan prinsip maksimum Pontryagin.

Teorema 1 *Misalkan u sebagai kontrol admissible yang membawa state awal $(x(t_0),t_0)$ kepada state terminal $(x(T),T)$ dengan $x(T)$ dan T secara umum tidak ditentukan. Syarat perlu agar (x^*,u^*) menjadi solusi optimum adalah terdapat vektor p^* sedemikian rupa sehingga:*

1. p^* dan x^* merupakan solusi dari sistem kanonik:

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*,u^*,p^*,t)$$

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*,u^*,p^*,t)$$

dengan fungsi hamilton H diberikan oleh

$$H(x,u,p,t) = f_0(x,u,t) + pf(x,u,t).$$

2. $H(x^*, u^*, p^*, t) \geq H(x, u, p, t)$.

3. Semua syarat batas terpenuhi.

[3]

2.3 Metode Pengali Lagrange

Syarat perlu tercapainya kondisi optimum bagi masalah kontrol optimum diskret diperoleh dengan menerapkan metode pengali Lagrange. Didefinisikan fungsi lagrange

$$L = \sum_{k=0}^{T-1} \{F(x(k), u(k), k) + \lambda(k+1)[x(k) + f(x(k), u(k), k) - x(k+1)],$$

dengan $\lambda(k+1)$ adalah pengali Lagrange yang berhubungan dengan persamaan beda dari kendala pertama. Syarat perlu agar (x^*, u^*) menjadi solusi optimal ialah:

1. $\nabla_{u(k)} L = \nabla_{u(k)} F + \lambda(k+1)\nabla_{u(k)} = 0$
2. $\nabla_{x(k)} L = \nabla_{x(k)} F + \lambda(k+1)\left[1 + \nabla_{x(k)} f\right] - \lambda(t) = 0$
3. $\nabla_{\lambda(1+k)} L = x(k) + f - x(k+1) = 0$
4. $\frac{\partial L}{\partial x(N)} = -\lambda(N) = 0.$

Syarat terakhir diperlukan jika *state* akhir bebas [4].

3 PEMBAHASAN

3.1 Asumsi dan Notasi

Tulisan ini membahas sistem inventori-produksi model kontinu dan diskret. Pada model kontinu, inventori dimonitor secara kontinu dan proses produksi dapat dimulai pada setiap waktu. Sebaliknya, pada model diskret, inventori dimonitor pada titik-titik waktu tertentu.

Asumsi yang digunakan dalam model pada karya ilmiah ini ialah:

1. Perusahaan telah menetapkan tingkat persediaan yang diinginkan (*inventory goal level*) yang merupakan banyaknya barang yang ingin disimpan oleh perusahaan.
2. Perusahaan telah menetapkan tingkat produksi yang diinginkan (*production goal level*) yang merupakan banyaknya barang yang ingin diproduksi oleh perusahaan secara efektif.

3. Penalti dikenakan ketika tingkat persediaan dan tingkat produksi menyimpang dari level yang diinginkan.
4. Seluruh permintaan dapat dipenuhi oleh perusahaan.

Didefinisikan notasi-notasi sebagai berikut: T : panjang horizon perencanaan, I : tingkat persediaan, P : tingkat produksi, D : tingkat permintaan, I_0 : tingkat persediaan awal, θ : tingkat kerusakan barang, h : biaya penalti inventori (rupiah/unit), K : biaya penalti produksi (rupiah/unit), $\hat{I}$: tingkat persediaan yang diinginkan, dan $\hat{P}(t)$: tingkat produksi yang diinginkan.

3.2 Model Inventori-Produksi Kontinu

Didefinisikan fungsional objektif

$$J = -\int_0^T \left\{\frac{1}{2}h\Delta^2 I + \frac{1}{2}K\Delta^2 P\right\} dt, \tag{3}$$

dengan $\Delta I(t) = I(t) - \hat{I}$ dan $\Delta P(t) = P(t) - \hat{P}$. Fungsional objektif di atas mengukur besarnya biaya penalti yang dikenakan ketika tingkat inventori dan tingkat produksi menyimpang dari *goal level*. Nilai 1/2 menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya penalti adalah sama. Model yang digunakan dalam tulisan ini diambil dari Al-Khedhairi dan Tajd (2007) di [5].

Masalah kontrol optimum kontinu dengan demikian adalah masalah meminimumkan fungsional objektif (3) dengan kendala-kendala sebagai berikut:

1. Perubahan tingkat persediaan:

$$\dot{I}(t) = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t). \tag{4}$$

Diasumsikan kerusakan barang mengikuti sebaran Weibull dengan laju kerusakan $\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$.

2. Kendala ketaknegatifan: $P(t) \geq 0$.
3. Nilai awal dan akhir ditetapkan: $I(0) = I_0$ dan $I(T) = I_T$.

3.3 Solusi Analitik

Karena diasumsikan bahwa seluruh permintaan dapat dipenuhi oleh perusahaan, maka tingkat produksi yang diinginkan $\hat{P}$ merupakan jumlah dari barang yang rusak dan tingkat permintaan pasar

$$\hat{P}(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}\hat{I} + D(t).$$

Dengan mendefinisikan λ sebagai variabel adjoin, fungsi hamilton dituliskan sebagai

$$H = -\frac{1}{2}\{h\Delta^2 I + K\Delta^2 P\} + \lambda\left[P - D - \alpha\beta t^{\beta-1}I\right],$$

sehingga diperoleh syarat perlu berupa:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 0, \qquad \frac{\partial H}{\partial I} = -\dot{\lambda}, \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{I}$$

yang masing-masing dapat dituliskan

$$P = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} \tag{5}$$

$$\dot{\lambda} = h\left(I - \hat{I}\right) - \lambda\alpha\beta t^{\beta-1} \tag{6}$$

dan persamaan (4). Dengan menyubstitusi persamaan (5) ke dalam persamaan (4) didapatkan:

$$\dot{I} = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} - D - \alpha\beta t^{\beta-1}I \tag{7}$$

dan dari persamaan (7) di atas didapatkan

$$\frac{\lambda}{K} = \dot{I} + \alpha\beta t^{\beta-1}I - \hat{P} + D \tag{8}$$

Jika (7) didiferensialkan terhadap *t* didapatkan

$$\ddot{I} = -\alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2}I - \alpha\beta t^{\beta-1}\dot{I} + \frac{\dot{\lambda}}{K} + \dot{\hat{P}} - \quad \dot{D} \tag{9}$$

Kemudian, dengan menyubstitusi persamaan (6) ke dalam persamaan (9), didapatkan

$$\ddot{I} = -\alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2}I + \alpha\beta t^{\beta-1}\left[\frac{\lambda}{K} - \dot{I}\right] + \frac{h}{K}\left[I - \hat{I}\right] + \dot{\hat{P}} - \dot{D} \tag{10}$$

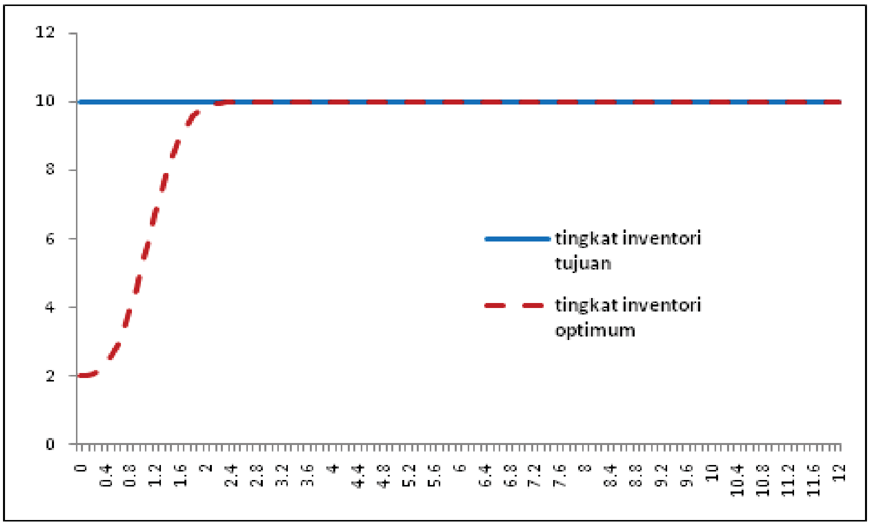
Terakhir, dengan menyubstitusi persamaan (8) ke dalam persamaan (10), didapatkan persamaan diferensial orde dua berikut

$$\ddot{I} - \left[\frac{h}{K} - \alpha\beta(\beta-1)t^{\beta-2} + \left(\alpha\beta t^{\beta-1}\right)^2\right]I = \alpha\beta t^{\beta-1}\left[D - \hat{P}\right] - \frac{h}{K}\hat{I} + \dot{\hat{P}} - \dot{D}. \tag{11}$$

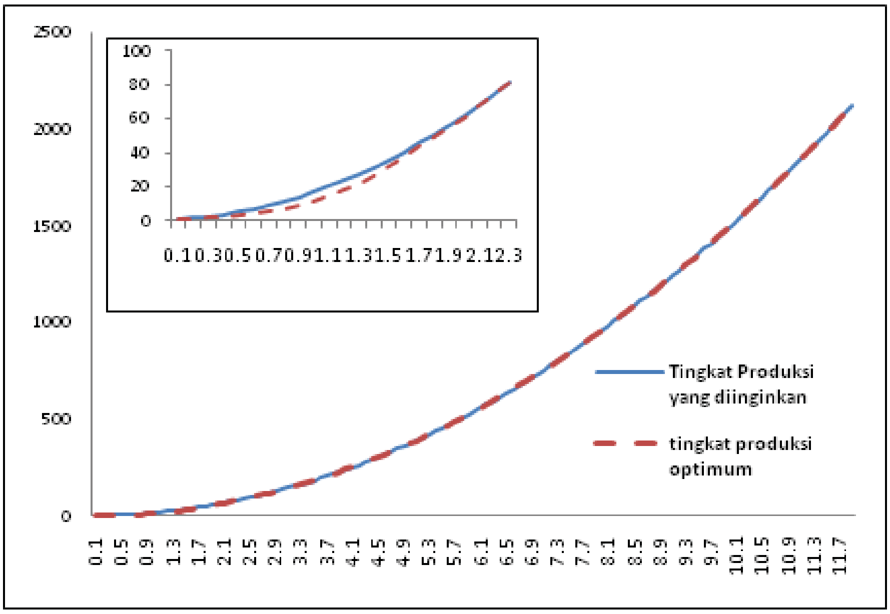
Dengan menerapkan nilai awal $I(0) = I_0$ dan nilai batas $I(T) = I_T$ akan didapatkan solusi optimum yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi tingkat permintaan yang dihadapi perusahaan.

3.4 Simulasi Model Kontinu

Pengendalian inventori-produksi model kontinu diilustrasikan dengan mengambil nilai-nilai parameter berikut: $T = 12$, $I_0 = 2$, $I_T = 10$, $h = 1$, $K = 20$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 3$, $\hat{I} = 10$, $D(t) = 1 + \sin t$. Persamaan (11) merupakan persamaan diferensial dengan koefisien dan suku variabel, dan diselesaikan dengan metode beda hingga. Tingkat inventori dan produksi optimum diberikan pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1 Tingkat inventori optimum dan tingkat inventori tujuan untuk simulasi model kontinu.



Gambar 2 Tingkat produksi optimum dan tingkat produksi tujuan untuk simulasi model kontinu.

3.5 Model Inventori-Produksi Diskret

Misalkan waktu perencanaan dibagi menjadi N selang yang sama panjang. Perubahan tingkat persediaan dinyatakan dalam persamaan beda

$$\frac{I(k+1)-I(k)}{T_s} = P(k) - D(k) - \alpha\beta k^{\beta-1} I(k) \quad (12)$$

dengan T_s adalah panjang subinterval. Dengan menyusun ulang persamaan (12) diperoleh

$$I(k+1) = \left[1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}\right] I(k) + T_s[P(k) - D(k)] \quad (13)$$

Jika $\hat{I}$ dan $\hat{P}$ memenuhi (13) maka didapatkan

$$\hat{I} = \left[1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}\right]\hat{I} + T_s\left[\hat{P}(k) - D(k)\right] \quad (14)$$

Didefinisikan operator Δ sebagai berikut: $\Delta I(k) = I(k) - \hat{I}$, dan $\Delta P = P(t) - \hat{P}$. Jika persamaan (13) dikurangi dengan persamaan (14) didapatkan

$$\Delta I(k+1) = a(k)\Delta I(k) + T_s \Delta P(k) \quad (15)$$

dengan $a(k) = 1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}$.

Masalah kontrol optimum diskret ialah meminimumkan fungsional objektif

$$\min J = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N}[h\Delta^2 I(k) + K\Delta^2 P(k)]. \tag{13}$$

dengan kendala $P(k) \geq 0$, $I(0) = I_0$, $I(T) = I_T$, dan persamaan (15).

3.6 Solusi Numerik

Didefinisikan pengali Lagrange $\lambda(k)$ dengan fungsi lagrange:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{0}^{N-1}\{h\Delta^2 I(k) + K\Delta^2 P(k)\} + \lambda(k+1)[-\Delta I(k+1 + a(k)\Delta I(k) + T_s\Delta P(k)] \tag{17}$$

sehingga diperoleh syarat perlu:

$$\nabla_{\Delta P(k)} L = 0, \quad \nabla_{\Delta I(k)} L = 0, \quad \nabla_{\lambda(1+k)} L = 0,$$

yang masing-masing setara dengan:

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K}\lambda(k+1) \tag{18}$$

$$\lambda(k) = h\Delta I(k) + a(k)\lambda(k+1) \tag{19}$$

dan persamaan (3.15). Untuk mendapatkan solusi optimum, digunakan metode *sweep* [6]. Untuk $k = 0, \ldots N$, dinotasikan $s(k)$ sehingga

$$\lambda(k) = s(k)\Delta I(k). \tag{20}$$

Dengan menyubstitusi persamaan (20) ke dalam persamaan (18) didapatkan

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K}s(k+1)\Delta I(k+1). \tag{21}$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan (15) ke dalam (21) didapatkan

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K}s(k+1)[a(k)\Delta I(k) - T_s\Delta P(k)] \tag{22}$$

Dengan menyelesaikan persamaan (22) didapatkan

$$\Delta P(k) = \frac{T_s a(k)s(k+1)}{K + T_s{}^2 s(k+1)}\Delta I(k). \tag{23}$$

Substitusi (20) ke dalam (19) menghasilkan

$$s(k)\Delta I(k) = h\Delta I(k) + a(k)s(k+1)\Delta I(k+1) \tag{24}$$

Dengan menyubstitusikan (15) ke dalam (24) didapatkan juga

$$s(k)\Delta I(k) = [h + a(k)^2 s(k+1)]\Delta I(k) + T_s a(k) s(k+1)\Delta P(k) \tag{25}$$

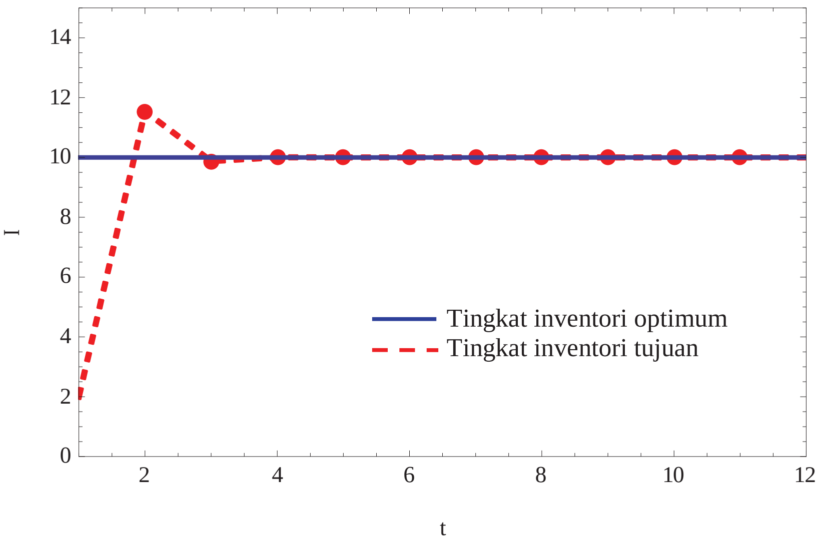
dan menyubstitusikan (23) ke dalam (25) diperoleh persamaan Ricatti

$$s(k) = h + \frac{Ks(k+1)}{K + {T_s}^2 s(k+1)} a(k)^2 \tag{26}$$

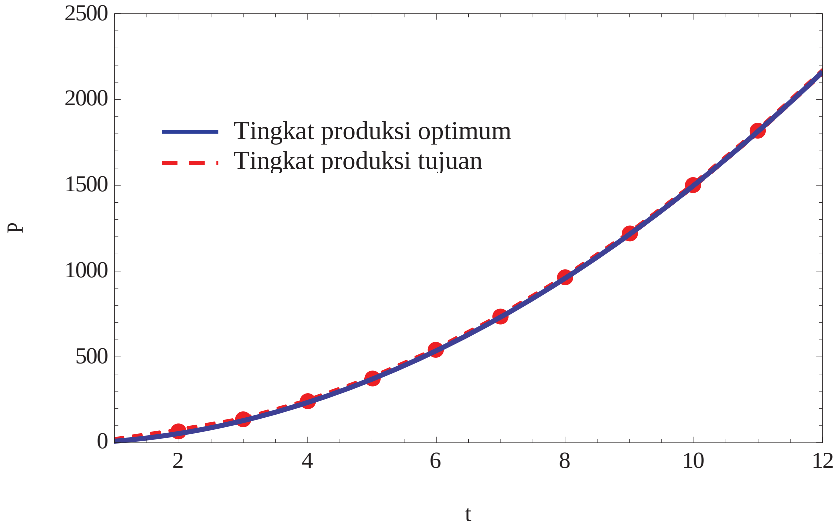
yang dapat diselesaikan secara rekursif mundur, dimulai dari $s(N) = h$. Tingkat inventori optimum dapat diperoleh dengan menyubstitusikan (23) ke dalam (15). Tingkat produksi optimum dapat ditentukan dari (16).

3.4 Simulasi Model Diskret

Gambar 3 dan Gambar 4 diperoleh dengan memilih Misalkan $T = 12,\ \ N = 12,$ $I_0 = 2,\ \boldsymbol{I(T) = 10},\ h = 1,\ \ K = 20,\ D(k) = 1 + \sin k,\ \alpha = 0.5,\ \beta = 3,\ \hat{I} = 10.$ $N = 12$ menunjukkan bahwa perusahaan memonitor proses produksi setiap bulan, sehingga panjang subinterval $T_s = 1$.



Gambar 3 Tingkat inventori optimum dan tingkat inventori tujuan untuk simulasi model diskret.



Gambar 4 Tingkat produksi optimum dan tingkat produksi tujuan untuk simulasi model diskret.

4 SIMPULAN

Berdasarkan kajian model dan hasil si-mulasi, maka dapat disimpulkan bahwa: (i) sistem inventori-produksi dapat diformulasikan sebagai masalah kontrol optimum, (ii) sistem inventori-produksi kontinu dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin; solusi dari sistem inventori-produksi ini berupa persamaan diferensial orde dua. Sedangkan sistem inventori-produksi diskret diselesaikan dengan menggunakan metode pengali Lagrange; solusi optimal diperoleh dengan menyelesaikan persamaan beda secara rekursif, (iii) hasil simulasi memperlihatkan bahwa solusi optimum konvergen menuju nilai yang diinginkan.

PUSTAKA

[1] Sethi SP, Thompson GL. 2000. *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics:* 2nd ed. New York: Springer

[2] Wild T. 2002. *Best Practice in Inventory Management: 2nd edition.* Britain: Butterworth-Heinemann.

[3] Tu PNV. 1993. *Introductory Optimization Dynamics: Optimum Control with Economics and Management Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

[4] Conrad JM, Clark CW. 1987. *Natural Resource Economics*. New York: Cambridge University Press.

[5] Al-Khedhairi A, Tadj L. 2007. Optimal control of a production inventory system with Weibull distributed deterioration. *Applied Mathematical Sciences* 35: 1703-1714.

[6] Bryson AE, Ho YC. 1975. *Applied Optimal Control*. Washington DC: Halsted Press.