

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

### 1.3 Perumusan Masalah

- Bagaimanakah pengaruh perubahan input berupa arus  $I$  searah sebagai sumber rangsangan terhadap penjalaran impuls didalam sel saraf dari persamaan Hindmarsh-Rose ?
- Bagaimanakah persamaan Hindmarsh-Rose membentuk dinamika dalam penjalaran impuls di dalam sel saraf ?

### 1.4 Hipotesis

- Input berupa arus  $I$  searah sebagai sumber rangsangan menunjukkan sejumlah fenomena penjalaran impuls *spiking* dan *bursting* pada sel saraf yang dibentuk dari persamaan Hindmarsh-Rose.
- Persamaan Hindmarsh-Rose merupakan persamaan differensial biasa yang bersifat autonomous dan saling terkopel yang dapat membentuk dinamika sistem didalam penjalaran impuls pada sel saraf.

### 1.5 Keluaran

Keluaran yang diharapkan dari penelitian ini adalah sebuah simulasi berbasis *Graphical User Interface* (GUI) dari persamaan Hindmarsh-Rose yang dapat digunakan untuk menjelaskan dinamika sistem di dalam sel saraf.

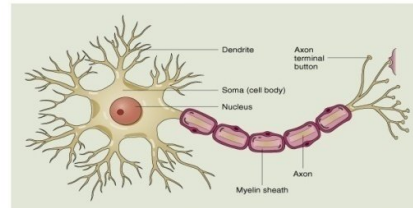
## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Morfologi Sel Saraf

Sel saraf terdiri dari inti sel atau *nukleus*, tubuh sel atau sel somatik, diperpanjang oleh akson, terminal akson (ujung akson), dan sejumlah dendrit (lihat Gambar 1).<sup>1,5</sup> Perpanjangan sel saraf dibentuk oleh akson yang merupakan salinan panjang tipis yang

terbungkus oleh suatu membran yang berisi cairan dengan nama *aksoplasma*.<sup>1</sup> Pada perpanjangan ini terdapat selubung myelin, sel *sachwann*, dan *Node of Renvier*. Pada penjalaran impuls melalui sel saraf dendrit berfungsi menerima sinyal berupa rangsangan dan berfungsi sebagai sensor penerima dari sel saraf yang lainnya sedangkan akson berfungsi sebagai penghantar sinyal ke bagian sel saraf lain. Mekanisme penjalaran impuls melalui sel saraf terjadi sepanjang akson jika dan hanya jika rangsangan yang diterima oleh dendrit atau tubuh sel pada setiap waktu, intensitasnya berada pada ambang batas (*threshold*) atau lebih.<sup>1,5,7</sup> Impuls akan mengalir dari tubuh sel menuju terminal akson. Sesampainya impuls saraf pada terminal akson, suatu substansi saraf penghantar dilepaskan dan akan menyampaikan impuls ke penerima di sel berikutnya. Sambungan antara akson terminal dan dendrit sel saraf lain memungkinkan adanya sinapsis.<sup>5</sup>

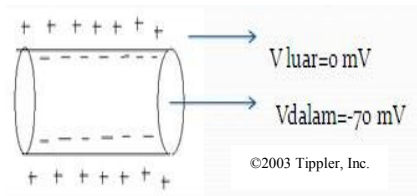


©2003 Tipler, Inc.

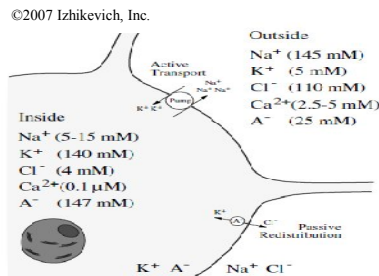
**Gambar 1.** Struktur sel Saraf tunggal

#### 2.2 Fisiologi Sel Saraf

Seperti pada semua sel hidup, sel saraf memiliki kecenderungan mempertahankan kondisi intraseluler yang berbeda dengan lingkungan ekstraselulernya. Setiap sel saraf akan menghasilkan sejumlah ion negatif yang berada disekitar membran dalam sel dan ion positif yang berada mengintari bagian luar membran sel (Gambar 2a). Perbedaan besar muatan ion inilah menjadi dasar dalam menjelaskan mekanisme penjalaran impuls pada sel saraf. Selain itu sel syaraf juga memiliki sifat *excitability* (kemampuan merespon stimulus) dan *conductivity* (kemampuan menghantarkan sinyal).<sup>6</sup>



(a)



(b)

**Gambar 2.** (a) Potensial membrane dalam keadaan istirahat. (b) Distribusi tegangan listrik sepanjang membran sel saraf dalam kondisi istirahatnya.<sup>1,7</sup>

Sel saraf dalam kondisi tidak menghantarkan impuls berada pada keadaan istirahat atau (*at rest*). Keadaan ini dicirikan dengan adanya gradien konsentrasi ion-ion di bagian dalam dan di bagian luar membran pada nilai tertentu. Konsentrasi ion kalium ( $K^+$ ) dibagian dalam membran 30 kali lebih banyak daripada yang dibagian luar sedangkan konsentrasi ion Natrium ( $Na^+$ ) sepuluh kali lebih banyak dibagian luar membran sel dibandingkan dengan bagian dalam (Tabel 1). Adapun konsentrasi ion negatif (seperti  $Cl^-$ ) dan ion lainnya tidak terdistribusi sempurna.<sup>1,7,8</sup> Dalam mempertahankan kondisi ini sel saraf menggunakan mekanisme difusi pasif dan transportasi aktif. Ketidaksesuaian distribusi  $Na^+$  dan  $K^+$  terbentuk dari kebutuhan energi pemompaan  $Na^+ - K^+$ , yang memindahkan  $Na^+$  dan  $K^+$  dari dalam dan luar sel (Gambar 2b).<sup>1,7</sup>

**Tabel 1.** Konsentrasi Ion di dalam dan di Luar Sel Saraf Istirahat.<sup>1</sup>

Jenis Ion	Konsentrasi (mmol/L)	
	di dalam	di luar
$Na^+$	15	145
$K^+$	150	5
$Cl^-$	9	120
Lainnya	156	30

Saat sel saraf menghantarkan impuls, sejumlah protein pada membran sel akan berfungsi sebagai *channel* (saluran) yang memudahkan distribusi  $Na^+$  dan  $K^+$ . Saluran Sodium (saluran  $Na^+$ ) dan Potassium (saluran  $K^+$ ) sangat spesifik untuk melewati ion-ion tertentu pada transportasi intra-membran selama proses penghantaran impuls sel saraf. Saat sel saraf berada pada keadaan istirahat, saluran  $Na^+$  bergantung pada tegangan tertutup, sehingga menjaga ketidaksamaan distribusi  $Na^+$ . Tegangan tertutup dari saluran  $Na^+$  didapatkan dari gradien konsentrasi  $Na^+$  didalam dan diluar sel saraf dengan menggunakan persamaan Nernst (persamaan 1) maka didapatkan potensial membran (potensial tertutup) untuk  $Na^+$  55mV (bergantung suhu lingkungan sel saraf).<sup>9</sup> Membran sel dalam keadaan istirahat tidak permeabel terhadap anion yang besar (atau terhadap jenis muatan negatif besar lainnya, seperti protein) dengan demikian kelebihan muatan negatif terbentuk tepat di bagian dalam permukaan membran sel. Dengan adanya konduktivitas dan polaritas dari membran sel maka terbentuklah suatu beda potensial antara bagian dalam dan luar membran sel yang disebut sebagai potensial istirahat (*resting potensial*). Nilai dari potensial istirahat tersebut sebesar -70mV (Gambar 2a).<sup>1,5,7,9</sup>

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Potensial membran dalam keadaan istirahat tersebut dapat dihitung menggunakan persamaan Nerst sebagai berikut :

$$E = \frac{RT}{ZF} \ln \frac{C_i}{C_o} \quad (1)$$

dengan :

$E$  adalah potensial Nernst untuk ion  $x$  (diukur sebagai potensial membran atau potensial tertutup).

$C_o$  adalah konsentrasi dari ion  $C$  di luar sel.

$C_i$  adalah konsentrasi dari ion  $C$  di dalam sel.

$Z$  adalah ion valensi dari  $C$ , untuk  $Z(K^+) = 1$  dan  $Z(Na^+) = -1$ .

$R$  adalah konstanta gas (8,314 J/molK).

$T$  adalah suhu absolut.

$F$  adalah konstanta Faraday (96485 C/mol).

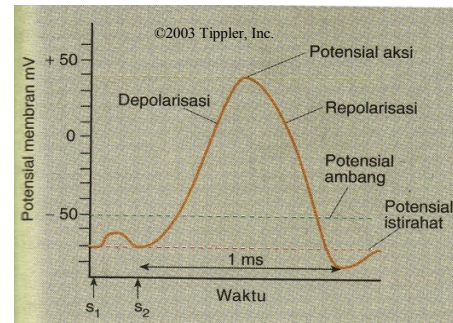
Potensial sel dalam keadaan istirahat dapat diganggu oleh rangsangan kimia dan fisis. Gangguan ini berpengaruh dalam waktu yang cukup singkat terhadap perubahan potensial istirahat, untuk setiap perubahan tersebut potensial membran sel membentuk suatu pola yang akan selalu kembali kepada potensial istirahat  $-70mV$ .<sup>1,10</sup> Seperti yang dijelaskan sebelumnya pada semua rangsangan yang merambat dibutuhkan jika dan hanya jika rangsangan yang diterima oleh dendrit atau tubuh sel pada setiap waktu, intensitasnya berada pada ambang batas atau lebih. Rangsangan yang berada dibawah ambang batas tidak akan menyebabkan terbukanya saluran  $Na^+$  secara sempurna sehingga tidak menimbulkan depolarisasi (*depolarization*) maksimal dari potensial istirahat, hal ini diperlihatkan sebagai  $s_1$  pada Gambar 3a. Jika rangsangan yang diterima cukup, maka saluran  $Na^+$  akan membuka dengan sempurna serta menyebabkan depolarisasi dari potensial

istirahat,  $-70mV$  menjadi  $+30mV$ . Karena adanya gradien konsentrasi dan gradien listrik (Tabel 1 dan Gambar 2b),  $Na^+$  akan mengalir memasuki sel dan menimbulkan aliran arus listrik (persamaan 2).

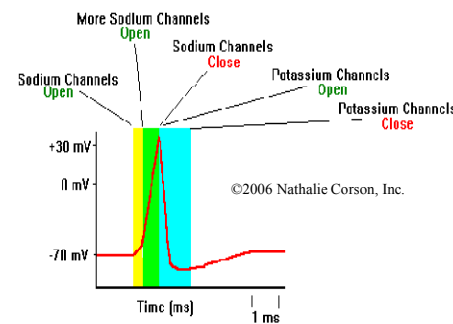
$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \quad (2)$$

dengan  $I$  adalah arus yang mengalir  $Q$  adalah muatan ion  $t$  adalah waktu

Fluks  $Na^+$  pada bagian dalam membran menghasilkan perubahan polaritas membran dan menyebabkan perubahan potensial listrik didalam membran menjadi lebih positif hingga mencapai  $+30 mV$  (menyimpang pada kisaran  $100 mV$  dari potensial istirahat). Efek dari rangsangan ini diperlihatkan sebagai  $s_2$  pada Gambar 3a.



(a)



(b)

**Gambar 3.** (a) Potensial aksi.  $s_1$  adalah rangsangan dibawah nilai ambang,  $s_2$  rangsangan diatas ambang. (b) Mekanisme bukaan gerbang membran sodium dan potassium pada pembentukan potensial aksi.<sup>1,5</sup>



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

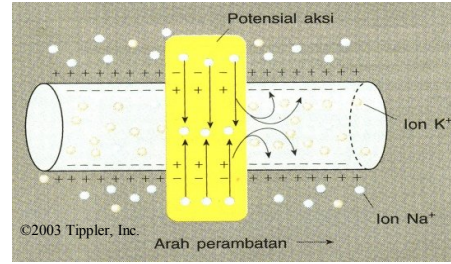
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

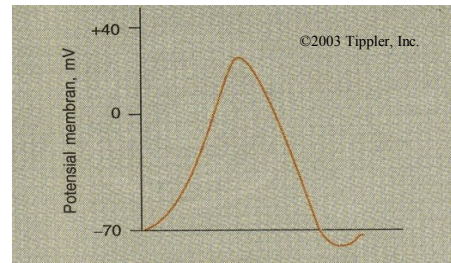
Depolarisasi potensial membran diakibatkan muatan positif dari  $\text{Na}^+$  yang masuk kedalam membran sampai keadaan dimana konsentrasi  $\text{Na}^+$  berada pada keadaan seimbang di titik rangsangan semula. Saluran Potasium terbuka dan  $\text{K}^+$  keluar dari membran sel sehingga mengembalikan polaritas potensial membran ke keadaan semula (positif diluar dan negatif didalam). Keadaan ini mengakibatkan tertutupnya saluran  $\text{Na}^+$  dalam waktu yang cukup singkat dan sel saraf berada pada kondisi tidak dapat dirangsang lagi. Periode ini disebut sebagai periode pemulihan (*repolarization*). Transisi keadaan pada potensial membran ini disebut sebagai potensial aksi (*spike*). Selama masa pemulihan potensial istirahat dapat berada pada kondisi dibawah  $-70$  mV keadaan ini disebut sebagai over pemulihan (*hyperpolarization*), keadaan ini dapat terjadi apabila saluran  $\text{K}^+$  membuka terlalu lama (Gambar 3b).<sup>2,5</sup> Untuk mengembalikan konsentrasi ion-ion pada keadaan istirahat (setelah diberi stimulus) membran dapat melakukan transportasi aktif dengan memanfaatkan tegangan tertutup dari masing-masing ion.

**2.3 Penjalaran impuls saraf**

Pada fisiologi sel saraf telah dijelaskan bagaimana suatu pulsa listrik tunggal berupa rangsangan fisis berpengaruh pada tingkahlaku sel saraf. Namun penjalaran impuls saraf melalui sel saraf perlu dikaji lebih rinci lagi guna memahami mekanisme rangsangan untuk bisa sampai pada sistem saraf yang lebih kompleks.



(a)



(b)

**Gambar 4.** (a) Penjalaran Impuls saraf, menyebabkan pertukaran  $\text{K}^+$  dan  $\text{Na}^+$  yang mengakibatkan timbulnya potensial aksi (b) di sepanjang akson.<sup>1</sup>

Setelah impuls yang diterima oleh dendrit atau badan sel melebihi batas ambang maka saluran  $\text{Na}^+$  terbuka untuk melewati  $\text{Na}^+$  memasuki membran sel sehingga menyebabkan depolarisasi lokal pada titik mula rangsangan, dan karena adanya gradien konsentrasi  $\text{Na}^+$  menyebabkan gerakan difusi-pasif ion yang yang berada pada daerah rangsangan (Gambar 4a). Karena adanya periode pemulihan (saluran  $\text{K}^+$  terbuka dan  $\text{K}^+$  keluar dengan membawa muatan positif), maka pada periode ini sebagian membran mengalami depolarisasi serta repolarisasi dan merambat pada satu arah tertentu saja, menjauhi tubuh sel saraf.<sup>1,5</sup> Potensial aksi yang dihasilkan dari proses tersebut hanya terbentuk pada *Renvier Node*, potensial aksi melompat dengan cepat sepanjang akson (Gambar 4b) oleh adanya difusi ion-ion melalui aksoplasma dan cairan ekstraselular. Hal ini disebabkan aktivitas listrik pada sel saraf yang dilapisi myelin hanya terbatas pada *Renvier Node* daerah tersebut terdapat gradien konsentrasi yang cukup besar dari saluran ion yang bergantung pada tegangan tertutup. Impuls akan terus

bergerak hingga mencapai terminal, dan menyebabkan lepasnya neurotransmitter dari membran sel saraf.<sup>1</sup> Neurotransmitter yang dihasilkan menjembatani rentang antar sel saraf sehingga seluruh proses dapat berulang atau diteruskan.

Selama proses penghantaran impuls saraf, aliran listrik mengalir ke dalam dan keluar melalui membran tegak lurus terhadap arah perambatan impuls. Sehingga dengan asumsi ini seberapa jauh pun perpanjangan akson, impuls tidak pernah memerlukan penguatan, impuls akan terus merambat dengan kekuatan yang sama dari rangsangan awal.<sup>1</sup> Sebagai tambahan diketahui bahwa sebagian akson diselubungi oleh sejumlah lapisan myelin yang terbentuk ketika sel-sel schwann membungkus akson. Ruang antara lapisan myelin selebar 1  $\mu\text{m}$  disebut *Node of Renvier* dan terbentuk pada setiap interval 1 sampai 2 mm sepanjang akson.<sup>1</sup> Perambatan impuls melalui akson yang diselubungi lapisan myelin sedikit berbeda dengan perambatan melalui akson tanpa myelin. Lapisan myelin merupakan suatu insulator yang baik, sehingga ion tidak dapat mengalir menembus lapisan tersebut.<sup>1</sup>

## 2.4 Model Matematika Hindmarsh-Rose

Dasar permodelan matematika dari sel saraf mengacu pada eksperimen yang telah dilakukan oleh Hodgkin-Huxley pada tahun 1952. Model Hodgkin-Huxley (*H-H*) menyatakan bahwa terdapat  $\text{K}^+$ ,  $\text{Na}^+$ , dan ion lainnya yang mengalir melintasi membran serta perubahan nilai konduktivitas listrik membran terhadap ion-ion tersebut terhadap waktu sebagai fungsi dari potensial membran. Fisiologi tersebut dibuat dalam persamaan matematika dengan memformulasikan sebuah sistem persamaan differensial dengan empat

variabel yang merepresentasikan potensial aksi.<sup>2,5,9</sup>

Pada kenyataannya persamaan tersebut terdiri dari empat persamaan differensial terkopel nonlinier dengan enam fungsi dan tujuh konstanta<sup>2,3</sup>, hal tersebut merupakan persamaan yang cukup kompleks untuk menemukan solusi numeriknya dan sangat sulit digunakan untuk simulasi dalam skala yang lebih kecil maka persamaan perlu disederhanakan. Pada tahun 1960 FitzHugh-Nagumo (*FH-N*) menyederhanakan model *H-H*. *FH-N* mengubah sistem persamaan differensial empat variabel yang ada pada *H-H* menjadi dua persamaan differensial melalui persamaan gelombang Van der Pol dan transformasi Leinard. Kedua persamaan *FH-N* tersebut adalah :

$$\dot{x} = a(y - f(x) + I(t)) \quad (3a)$$

$$\dot{y} = b(g(x) - y) \quad (3b)$$

*FH-N* melakukan obsevasi penyederhanaan dengan menganggap  $V(t)$  merupakan *activation* saluran  $\text{Na}^+$   $m(t)$  yang terbentuk saat potensial aksi, sementara itu *inactivation* saluran  $\text{Na}^+$   $h(t)$  dan *activation* saluran  $n(t)$  berubah secara bersamaan dengan skala waktu yang sangat singkat. Variabel  $x$  menggambarkan potensial membran dan  $y$  adalah internal atau variabel pemulihan. Fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  merupakan persamaan kubik dan linear,  $a$  dan  $b$  merupakan konstanta waktu dan  $I(t)$  adalah input arus yang bergantung waktu. Kemudian pada tahun 1982 Hindmarsh-Rose (*H-R*) menyederhanakan model *H-H* dengan mengambil konsep penyederhanaan yang telah dikenalkan oleh FitzHugh-Nagumo (*FH-N*) sehingga bisa menjadi (*slow-fast system*). *H-R* mempelajari kelemahan dari model *FH-N* yang tidak dapat secara rinci menjelaskan fenomena (*rapid firing*)<sup>2,3</sup> untuk itu *H-R*

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

merubah fungsi linier  $g(x)$  menjadi fungsi kuadrat (lihat persamaan 1).

$$f(x) = ax^3 - bx^2 \quad (4a)$$

$$g(x) = c - dx^2 \quad (4b)$$

Meskipun model tersebut telah dapat menggambarkan (*neural firing*) secara jelas namun masih belum dapat menampilkan fitur biologi dari neuron seperti *bursting* dan *adaptation*. Dua tahun kemudian, *H-R* menambah persamaan ketiga dalam modelnya, agar dinamika dari model yang mereka buat lebih mendekati kondisi nyata. Persamaan terakhir yang mereka tambahkan dapat mengontrol jeda waktu diantara dua potensial aksi.

$$\dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I \quad (5a)$$

$$\dot{y} = 1 - dx^2 - y \quad (5b)$$

$$\dot{z} = \mu(b(x - x_e) - z) \quad (5c)$$

Dengan  $a = 3$ ,  $b = 4$  menjelaskan tentang pengaruh dari potensial membran saat (*slow dynamics*),  $d = 5$  adalah konstanta yang ditentukan dari percobaan,  $I = 1.78$  adalah arus masukan,  $\mu = 0.001$  adalah *recovery variable*,  $x_e = -\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$  adalah titik keseimbangan dari dua dimensi sistem *H-R*, disesuaikan dengan potensial ambang untuk memicu (*bursting* dan *adaptation*).<sup>5</sup>

## 2.5 Dinamika Sistem dan Bifurkasi Lokal

Pada banyak kasus, dinamika sistem digunakan untuk memodelkan suatu fenomena yang memiliki hubungan sebab-akibat yang cukup kompleks. Dengan kata lain dinamika sistem dipergunakan untuk meningkatkan kemampuan pemahaman terhadap tingkah laku sistem yang dimunculkan dalam struktur tertentu.

Permodelan tersebut haruslah memiliki sifat dinamis (berubah terhadap waktu) dan struktur fenomenanya harus mengandung paling sedikit satu struktur umpan - balik (*feedback structure*). Oleh karena itulah model-model dinamika sistem diklasifikasikan ke dalam model matematik kausal (*theory-like*).<sup>10</sup>

Bifurkasi didefinisikan sebagai perubahan trayektori yang terjadi disekitar titik kritis, bifurkasi dicirikan dengan adanya perubahan jumlah titik kritis serta jenisnya akibat perubahan parameter yang terkandung di dalam suatu sistem persamaan.<sup>11</sup> Titik kritis merupakan titik keseimbangan yang dimiliki oleh suatu dinamika sistem, titik-titik ini digunakan untuk menjelaskan bagaimana fenomena struktur dari dinamika sistem tersebut. Titik keseimbangan dapat ditentukan dengan mengenali persamaan differensial pembentuk dinamika sistem yang bersifat *autonomous*<sup>12</sup>, kemudian persamaan tersebut tidak berubah terhadap waktu atau sama dengan nol. Hal tersebut dapat ditinjau dari PDB berikut :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_N) \\ &\vdots \\ \dot{x}_N &= f_N(x_1, x_2, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (6)$$

Maka akan terdapat sejumlah titik keseimbangan  $\{x_n = x_{n,0}\}$  yang diakibatkan

$f_N(x_{1,0}, \dots, x_{n,0}, \dots, x_{N,0}) = 0$  secara serempak. Berdasarkan kenyataan tersebut sebuah titik keseimbangan dalam ruang-fasa terkait dengan solusi stationer sistem. Untuk mengetahui sifat dari titik kritis dapat dilakukan linierisasi dengan melakukan ekspansi Taylor terhadap  $f_n$  di sekitar  $x_n = x_{n,0}$  hingga orde pertama saja (dari ekspansi Taylor) :



$$\dot{x}_n = \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n,0}) \left. \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \right|_{x=x_{n,0}} + \dots \quad (7)$$

Setelah mengetahui sifat dari titik keseimbangan tersebut dalam dinamika sistem dibutuhkan analisis lebih lanjut untuk mengetahui harga eigen. Harga eigen ( $\lambda$ ) dibutuhkan untuk menentukan jenis bifurkasi yang terjadi dalam suatu sistem dinamik. Titik keseimbangan memberikan input dalam persamaan matriks jacobian  $J$  dari sistem :

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_N} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_3}{\partial x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_N}{\partial x_1} & \frac{\partial f_N}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_N}{\partial x_N} \end{pmatrix} \quad (8)$$

$J$  adalah  $N \times N$  matriks yang diasumsikan sebagai matriks non-singular yakni

$$\det J \neq 0 \quad (9)$$

maka dapat ditentukan harga eigen  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$  dengan menyelesaikan persamaan berikut<sup>12</sup> :

$$\det(J - \lambda I) = 0 \quad (10)$$

Analisa dinamika sistem melibatkan sejumlah peran titik keseimbangan trayektori dan perubahannya (bifurkasi). Kedua analisa tersebut memiliki sifat dan jenis tertentu untuk menggambarkan trayektori (lintasan) sistem sebelum dan sesudah bifurkasi. Karakteristik titik keseimbangan yang dapat diketahui setelah menemukan harga eigen seperti tertera pada tabel berikut :

**Tabel 2.** Jenis-Jenis Titik Keseimbangan<sup>12</sup>

Jenis Titik Keseimbangan	Harga Eigen
Titik Node	rill, untuk kasus $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ (atraktor negatif) menjauhi titik keseimbangan, untuk kasus $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (atraktor positif) menuju titik keseimbangan.
Titik Sadel	rill, $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ atau sebaliknya.
Titik Center	imajiner.
Titik Fokus	bilangan kompleks (terdiri dari rill dan imajiner) untuk kasus $\mu > 0$ atraktor negatif menjauhi titik kritis, untuk kasus $\mu < 0$ atraktor positif menuju titik kritis.

Jenis dari bifurkasi lokal pada dinamika sistem cukup banyak dikenali diantaranya bifurkasi Sadel-Node, bifurkasi Trans-Kritikal, bifurkasi Pitch-Fork, dan bifurkasi Poincare-Andronov-Hopf (bifurkasi Hopf).<sup>12,13,14</sup> Namun tidak semua jenis bifurkasi tersebut terbentuk dan menjadi fenomena struktur dari suatu dinamika sistem.

Dinamika sistem yang linier merupakan kondisi stabil yang berpusat pada titik keseimbangan, namun pada kenyataannya dinamika sistem di alam menunjukkan tingkah laku yang tidak harmonis atau non-linier. Tingkah laku tersebut dapat membentuk suatu struktur fenomena yang teratur ditengah ketidakteraturan atau sewaktu-waktu dapat terlihat tidak teratur ditengah keteraturan (teori chaotik).<sup>12,13</sup> Teori chaotik meninjau sifat ketidakstabilan pola osilasi sistem yang bergantung pada prediksi waktu. Lebih umumnya osilasi ini dapat berbentuk suatu osilasi harmonis pada selang tertentu dan dapat berbentuk tidak harmonis pada selang waktu yang lainnya. Teori yang mendasari dari osilasi chaotik meninjau suatu keadaan harmonis menuju ke keadaan tidak harmonis atau sebaliknya. Sistem dapat dikatakan chaotik bila sistem tersebut dapat ditentukan secara deterministik, memiliki tingkah laku tidak periodik dalam masa yang cukup lama, dan menampakkan

perubahan yang bergantung pada pengaturan kondisi awal dari sistem (dalam hal ini berupa input atau inisialisasi kondisi sistem).<sup>14</sup>

### 2.6 Metode Runge-Kutta-Fehlberg 45 (RKF45)

Metode Runge-Kutta-Fehlberg 45 (RKF45) merupakan salah satu metode untuk memecahkan solusi numerik dari persamaan differensial biasa berorde tinggi. Metode ini membuat suatu pencacahan dengan menggunakan selang  $h$  dengan enam konstanta yang akan diaproksimasikan kedalam persamaan orde 4 dan 5 sehingga lebih teliti dibanding metode lainnya.<sup>17</sup> Keenam konstanta berperan untuk memprediksi harga solusi yang diinginkan pada dua keadaan atau lebih dari suatu sistem sedemikian rupa sehingga galat pembulatan dapat diminimisasi sampai orde 4 hingga orde 5.<sup>15,16</sup> Metode ini ditampilkan dalam persamaan berikut :

$$k_1 = hf(t_k, y_k), \tag{11a}$$

$$k_2 = hf\left(t_k + \frac{1}{4}h, y_k + \frac{1}{4}k_1\right), \tag{11b}$$

$$k_3 = \left\{ hf \left( \begin{matrix} t_k + \frac{3}{8}h, y_k + \frac{3}{32}k_1 \\ + \frac{9}{32}k_2 \end{matrix} \right) \right\}, \tag{11c}$$

$$k_4 = \left\{ hf \left( \begin{matrix} t_k + \frac{12}{13}h, y_k \\ + \frac{1932}{2197}k_1 \\ - \frac{7200}{2197}k_2 \\ + \frac{7296}{2197}k_3 \end{matrix} \right) \right\}, \tag{11d}$$

$$k_5 = \left\{ hf \left( \begin{matrix} t_k + h, y_k + \frac{439}{216}k_1 \\ - 8k_2 + \frac{3680}{513}k_3 \\ - \frac{845}{4104}k_4 \end{matrix} \right) \right\}, \tag{11e}$$

$$k_6 = \left\{ hf \left( \begin{matrix} t_k + \frac{1}{2}h, y_k - \frac{8}{27}k_1 \\ - 2k_2 + \frac{3544}{2565}k_3 \\ - \frac{1859}{4104}k_4 - \frac{11}{40}k_5 \end{matrix} \right) \right\}, \tag{11f}$$

$f$  merupakan fungsi yang dapat dibentuk dari suatu persamaan differensial. Konstanta-konstanta tersebut kemudian dapat disubstitusikan ke dalam persamaan orde 4 (persamaan 12) dan orde 5 (persamaan 13) sebagai berikut :

$$y_{k+1} = \left\{ \begin{matrix} y_k + \frac{12}{216}k_1 + \frac{1408}{2565}k_3 \\ + \frac{2197}{4101}k_4 - \frac{1}{5}k_5 \end{matrix} \right\} \tag{12}$$

$k_6$  yang tidak substitusikan dalam orde 4 namun disubstitusikan pada orde 5<sup>15</sup>

$$y_{k+1} = \left\{ \begin{matrix} y_k + \frac{16}{135}k_1 + \frac{6656}{12825}k_3 \\ + \frac{28516}{56430}k_4 - \frac{9}{50}k_5 \\ + \frac{2}{55}k_6 \end{matrix} \right\} \tag{13}$$

Untuk  $k_2$  tidak disubstitusikan dalam kedua persamaan orde tersebut hanya digunakan sebagai determinasi untuk konstanta lainnya.<sup>15</sup>

Metode ini diaplikasikan pada perangkat lunak MATLAB untuk membantu menyelesaikan solusi numerik yang kompleks dan simulasi berbasis *Graphical User Interface* (GUI). GUI MATLAB dibangun dari fisik dasar yaitu ‘figure’ sebagai alokasi

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:  
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.  
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.  
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



media utama yang kemudian dilanjutkan dengan ‘uicontrol’ sebagai tampilan dalam menjalankan fungsi khusus dan spesifik atau sebagai fungsi *unit interface*-nya, misalnya fungsi *pushbutton* untuk membentuk tombol yang dapat di tekan dan fungsi *edit* untuk membentuk kolom isian. Fungsi untuk menampilkan keluaran dari GUI adalah fungsi *axes*.<sup>18</sup> MATLAB dikenal sebagai perangkat lunak yang digunakan untuk komputasi teknik dan sains. Perangkat lunak ini bekerja pada operasi dasar matematika (kalkulator) dan algoritma pemrograman tertentu. Sehingga MATLAB dapat beroperasi untuk menemukan solusi numerik baik berupa skalar, vektor, maupun pengolahan data lebih lanjut.<sup>18</sup>

## BAB III

### BAHAN DAN METODE

#### 3.1 Tempat dan Waktu Penelitian

Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Fisika Teori dan Komputasi, Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor dari bulan September 2010 sampai dengan April 2011.

#### 3.2 Peralatan

Peralatan yang digunakan adalah sebuah laptop dengan *processor* Intel Core2Duo T6400 2.0 GHz / 800 Mhz FSB, L2 Cache / 45 nm technology, 2 GB RAM. Perangkat lunak yang digunakan adalah MS. Office 2007 dan MATLAB R2009b. Sebagai pendukung penulis menggunakan sumber literatur, yaitu jurnal-jurnal ilmiah, buku-buku, dan sumber-sumber lain yang terkait.

#### 3.3 Metode Penelitian

Penelitian ini dimulai dengan membuat simulasi penjalaran impuls pada sel saraf menggunakan model Hindmarsh-Rose (lihat 2.4 Model Matematika Hindmarsh-Rose). Simulasi model ini menggunakan metode numerik Runge-Kutta-Fehlberg 45 (lihat 2.6 Runge-Kutta-Fehlberg 45). Kemudian dilakukan analisa terhadap persamaan pembentuk dinamika sistem (lihat 2.5 Dinamika Sistem dan Bifurkasi Lokal) yang terjadi pada persamaan Hindmarsh-Rose.

##### 3.3.1 Analisa dinamika sistem

Persamaan Hindmarsh-Rose yang terdiri dari persamaan differensial biasa dengan tiga variabel yang *autonomous* atau eksplisit akan dianalisa dengan mencari titik keseimbangannya menggunakan (persamaan 5 hal.7). Setelah itu dengan menggunakan ekspansi Taylor (persamaan 7 hal.8) dan penemuan harga eigen (persamaan 8 hal.8) untuk mengetahui bifurkasi lokal yang terjadi dalam persamaan tersebut. Bifurkasi lokal yang terjadi dalam dinamika sistem penjalaran impuls pada sel saraf di ketahui dengan meninjau perubahan dan jenis dari titik keseimbangan. Variasi inputan berupa besarnya arus (impuls) akan mempengaruhi dinamika sistem dan bifurkasi lokal dari persamaan tersebut dalam membentuk penjalaran impuls pada sel saraf.

##### 3.3.2 Pembuatan GUI

Pembuatan GUI dilakukan dengan *software* MATLAB R2009b dengan tujuan mempermudah menganalisa dinamika sistem yang terjadi pada persamaan Hindmarsh-Rose. GUI yang dibentuk memungkinkan untuk dilakukan perubahan konstanta dan input sehingga setiap perubahan tersebut dapat menampilkan struktur fenomena yang berbeda.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.