



**PENDEKATAN KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN
BAYES UNTUK PENDUGAAN PRODUKTIVITAS
KOMODITAS HORTIKULTURA
(Kasus Komoditas Kentang)**

HARI WIJAYANTO



**SEKOLAH PASCASARJANA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2005**

© Hak cipta milik IPB (Institut Pertanian Bogor)

Bogor Agricultural University

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan artikel atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

PERNYATAAN MENGENAI DISERTASI DAN SUMBER INFORMASI

Dengan ini saya menyatakan bahwa disertasi Pendekatan Kemungkinan Maksimum dan Bayes untuk Pendugaan Produktivitas Komoditas Hortikultura (Kasus Komoditas Kentang) adalah karya saya sendiri dengan arahan dari komisi pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir disertasi ini.

Bogor, November 2005

Hari Wijayanto
NIM 995067

ABSTRAK

Ada dua paradigma utama didalam melakukan pendugaan parameter, yaitu *frequentist* dan *Bayesian*. Dalam melakukan pendugaan parameter, *frequentist* mendasarkan pada informasi yang dibawa oleh contoh. Sedangkan *Bayesian* tidak hanya menggunakan informasi yang dibawa oleh contoh tetapi juga informasi awal (*prior information*) yang turut diperhitungkan dalam melakukan pendugaan terhadap parameter populasi. Metode yang dapat memanfaatkan informasi awal dalam membuat dugaan terhadap parameter populasi tersebut biasa disebut sebagai metode Bayes. Pada banyak literatur/penelitian, metode Bayes dapat memberikan dugaan yang memiliki ketepatan (presisi) lebih tinggi dibandingkan dengan metode-metode klasik seperti metode kuadrat terkecil atau metode kemungkinan maksimum.

Tulisan ini membahas tentang penggunaan metode kemungkinan maksimum dan metode Bayes untuk pendugaan produktivitas komoditas hortikultura, yang metodologi surveinya sedang dikembangkan dan dikaji oleh Pusat Data dan Informasi Pertanian (Pusdatin), Departemen Pertanian, Republik Indonesia. Metode survei atau pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura tersebut berbasis pada plot contoh yang dipilih menggunakan metode percontohan multi-stage sampling. Metode survei/pengumpulan data untuk pendugaan produktivitas hortikultura ini telah diujicobakan di lapangan oleh Pusdatin Deptan dari tahun 2001 sampai tahun 2004.

Di dalam penelitian ini, metode kemungkinan maksimum dan metode Bayes diterapkan melalui pendekatan model acak, baik model acak satu faktor (Model-1) maupun model acak tersarang dua faktor (Model-2) sebagai berikut:

$$\text{Model-1: } y_{ij} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{ij}, i=1, 2, \dots, a \text{ dan } j=1, 2, \dots, n_i$$

$$\text{Model-2: } y_{ijk} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{j(i)} + \mathbf{e}_{ijk}, i=1, \dots, a; j=1, \dots, b_i; \text{ dan } k=1, \dots, n_{ij}$$

Ketidakseimbangan banyaknya ulangan dan/atau banyaknya taraf dari suatu faktor menjadi permasalahan utama dalam pendugaan parameter pada model acak. Padahal kasus penerapan pada pendugaan produktivitas komoditas hortikultura hampir selalu dijumpai keadaan yang tidak seimbang. Pendugaan parameter pada model acak untuk kasus data tak seimbang tidak dapat diperoleh dalam bentuk rumus jadi (*closed form*)

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

tetapi diperoleh melalui algoritma iteratif. Dalam penelitian ini, untuk kasus data tak seimbang hanya diturunkan algoritma pendugaan parameter model acak satu faktor saja.

Secara umum, pada kondisi data yang tak seimbang, hasil dugaan metode konvensional, metode kuadrat terkecil (ANOVA), metode kemungkinan maksimum, dan metode Bayes berbeda. Bahkan diantara berbagai alternatif pendekatan Bayes sendiri juga memberikan hasil yang berbeda tergantung dari sebaran prior yang digunakan. Namun demikian, dari berbagai alternatif metode tersebut pendekatan Bayes tampaknya berpotensi memberikan hasil dugaan yang memiliki ketepatan lebih tinggi.

Pendugaan terhadap m pada model acak satu faktor menggunakan pendekatan metode Bayes dengan memilih prior yang tepat ternyata dapat memberikan hasil dugaan yang memiliki ketepatan lebih tinggi (ragam \hat{m} yang lebih kecil). Salah satu pilihan prior yang dapat memberikan hasil cukup baik adalah noninformative prior untuk s^2 dan s_a^2 . Dugaan Bayes terhadap m untuk kasus *noninformative prior* bagi seluruh parameter model (kasus-a) cenderung tak bias terhadap m .

Penggunaan pendekatan model acak satu faktor untuk pendugaan m dalam kasus pendugaan produktivitas kentang akan cukup efektif jika jumlah petani per dusun relatif seimbang. Ketidakseimbangan jumlah petani per dusun yang semakin tinggi cenderung menurunkan efektifitas pendugaan model acak satu faktor dalam melakukan pendugaan terhadap m .

Penggunaan pendekatan Bayes ini sebenarnya tidak hanya dapat diterapkan untuk kentang tetapi sesuai juga untuk komoditas hortikultura sekali panen lainnya seperti kubis, bawang putih, dan bawang merah.

Pendekatan Bayes pada model acak tersarang dua faktor tampaknya memiliki potensi yang cukup baik digunakan untuk pendugaan m karena memberikan ragam \hat{m} yang lebih kecil dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum. Oleh karena itu perlu dilakukan kajian dan pengembangan pendekatan Bayes pada model acak tersarang khususnya untuk kasus data yang tak berimbang.

Kata kunci: penarikan contoh tahap ganda, model acak, penduga kemungkinan maksimum, metode Bayes



ABSTRACT

There are two main paradigms in estimating parameter: frequentist and Bayesian approaches. Frequentist estimates the parameter based on information which is extracted from the sample. On the other hand, Bayesian estimates parameter based not only on information from the sample but also prior information. This method is usually called Bayes method. In many literatures, the Bayes method is said to have higher precision in comparison to classical methods, such as least square or maximum likelihood methods.

This dissertation discusses the application of maximum likelihood and Bayes methods in estimating productivity of horticultural production, in which the survey methodology is currently developed and studied by Centre for Agricultural Data and Information (PUSDATIN), The Department of Agriculture of the Republic of Indonesia. This survey and data collection method is based on multi-stage sampling procedure and has been tried out by PUSDATIN during 2001-2004.

In this research, maximum likelihood and Bayes methods were employed through random model approach, both single factor random model (Model-1) and two factors nested random model (Model-2) as follows:

$$\text{Model-1: } y_{ij} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{ij}, i=1, 2, \dots, a \text{ and } j=1, 2, \dots, n_i$$

$$\text{Model-2: } y_{ijk} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{j(i)} + \mathbf{e}_{ijk}, i=1, \dots, a; j=1, \dots, b; \text{ and } k=1, \dots, n_{ij}$$

The main problem of parameter estimation in random model was unbalanced replication and/or unbalanced number of factor level. Which has been very common in estimation of productivity of horticultural products. Parameter estimation in random model for unbalanced data can not be carried out using closed form, but we must use iterative algorithm instead. This research concerned on the algorithm for estimating parameter in single factor random model.

Generally, the classical least square (ANOVA), maximum likelihood and Bayes methods resulted in different estimation of unbalanced data. Estimation of \mathbf{m} for single factor random model using Bayes method with the right prior distribution produces estimates with higher precision (smaller variance of $\hat{\mathbf{m}}$). Prior distributions which



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

produce precision are non-informative prior for s^2 and s_a^2 . Bayes estimation of m for *non-informative prior* in all models tends to be unbiased.

The application of the single factor random model in estimating m for productivity of potatoes will be effective (smaller variance and hence lower cost) when the number of farmers in each village (dusun) is relatively similar (balance). The higher the unbalance of farmers number, the lower the effectively of single factor random model in estimating m . The Bayes approach developed on this research can be employed not only for potatoes, but also for other one periodic horticultural products such as cabbages and onion.

The Bayesian approach for two factor nested random model seems to be very prospective in estimating m , since it gives smaller variance in compare to maximum likelihood. Therefore, it is important to study and develop further the Bayes approach for nested random model, especially for unbalanced data.

Keywords: multi-stage sampling, random model, maximum likelihood estimator, Bayes method.



PENDEKATAN KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN BAYES UNTUK PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA (Kasus Komoditas Kentang)

(Estimation of Horticulture Commodity Productivity Using Maximum Likelihood and Bayesian Approaches: a Case of Potatoe Commodity)

HARI WIJAYANTO

Disertasi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar Doktor
pada Program Studi Statistika

SEKOLAH PASCASARJANA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2005

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



JUDUL DISERTASI : PENDEKATAN KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN BAYES
UNTUK PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KOMODITAS
HORTIKULTURA (Kasus Komoditas Kentang)

*(Estimation of Horticulture Commodity Productivity Using
Maximum Likelihood and Bayesian Approaches: a Case of
Potatoe Commodity)*

NAMA : Hari Wijayanto

NOMOR POKOK : 995067

Disetujui,
Komisi Pembimbing

Dr. Ir. Khairil Anwar Notodiputro, MS
Ketua

Prof. Dr. Barizi, MES
Anggota

Dr. Ir. Edi Abdurrachman, M.Sc
Anggota

Diketahui

Ketua Program Studi Statistika

Dekan Sekolah Pascasarjana

Dr. Ir. Budi Susetyo, MS

Prof. Dr. Ir. Syafrida Manuwoto, M.Sc

Tanggal Ujian Terbuka : 21 Oktober 2005

Tanggal Lulus :

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan literatur atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

PRAKATA

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT, karena atas Berkah dan Rahmat-Nyalah akhirnya disertasi ini dapat penulis selesaikan

Dalam penyelesaian tulisan ini, penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak diantaranya Dosen Pembimbing disertasi, seluruh dosen Departemen Statistika FMIPA IPB, teman-teman di Pusdatin dan Dirjen Bina Produksi Hortikultura Deptan, keluarga, dan berbagai pihak yang tidak dapat penulis sebutkan semuanya. Dengan segala keterbatasan dan kekurangan akhirnya disertasi yang berjudul "PENDEKATAN KEMUNGKINAN MAKSIMUM DAN BAYES UNTUK PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA (Kasus Komoditas Kentang) (*Estimation of Horticulture Commodity Productivity Using Maximum Likelihood and Bayesian Approaches: a Case of Potatoe Commodity*)" dapat diselesaikan dengan baik.

Pada kesempatan ini, secara khusus Penulis mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Khairil Anwar Notodiputro, Bapak Prof. Barizi, dan Bapak Edi Abdurrachman selaku pembimbing, yang telah banyak memberikan arahan, saran dan bimbingan.
2. Seluruh dosen dan karyawan Sekolah Pascasarjana IPB yang telah memberikan layanan pengajaran dan administrasi dengan baik.
3. Agus M. Soleh, SSi, MT. yang telah banyak membantu penulis dalam mempelajari Bahasa-R dan mencari berbagai literatur.
4. Rekan-rekan dosen Departemen Statistika FMIPA-IPB yang selalu menjadi teman diskusi, memberikan saran dan dorongan moril dalam menyelesaikan disertasi ini.
5. Kepala & rekan-rekan Pusdatin Deptan yang menerima penulis menjadi partner selama ujicoba metodologi pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura sejak tahun 2002 sampai dengan tahun 2004.
6. Seluruh anggota keluarga penulis, yang senantiasa memberikan dorongan dan doa yang tulus.
7. Direktorat Perguruan Tinggi, yang telah memberikan bantuan biaya pendidikan melalui program BPPS.
8. Serta semua pihak lain yang tidak bisa penulis sebutkan satu persatu.

Dengan segala kerendahan hati, penulis menyadari bahwa disertasi ini masih jauh dari sempurna. Namun demikian, penulis berharap tulisan ini dapat bermanfaat bagi pihak-pihak lain yang memerlukan.



RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Pasuruan pada tanggal 21 April 1965, merupakan anak pertama dari pasangan Amin Suharso dan Misrukijah.

Penulis mengenyam pendidikan dasar sampai menengah di Kota Pasuruan. Penulis lulus Sekolah Dasar (SD) pada tahun 1977, lulus Sekolah Lanjutan Tingkat Pertama (SMP) pada tahun 1981, dan lulus Sekolah Lanjutan Tingkat Atas (SMA) pada tahun 1984. Selanjutnya penulis diterima di IPB melalui jalur PMDK tahun 1984 dan berhasil menyelesaikan pendidikan Sarjana pada Jurusan Statistika pada tahun 1989. Pada tahun 1994 penulis berhasil memperoleh gelar Magister Sains (M.Si) pada Program Studi Statistika, Sekolah Pascasarjana IPB, yang dibiayai melalui beasiswa TMPD. Pada tahun 1999 penulis diterima menjadi mahasiswa S3 pada program studi Statistika, Sekolah Pascasarjana IPB dengan dukungan beasiswa dari BPPS.

Penulis menikah dengan Eko Susilowati pada tahun 1991 dan telah dikaruniai tiga orang anak, yaitu Hariz Eko Wibowo, Faza Arif Wibisono, dan Oktaviani Aisyah Putri.

Sejak tahun 1989 penulis bekerja sebagai dosen pada Departemen Statistika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



DAFTAR ISI

	Halaman
DAFTAR TABEL	xiii
DAFTAR GAMBAR	xv
I. PENDAHULUAN	1
1.1. Latar Belakang	1
1.2. Pertanyaan Penelitian.....	3
1.3. Tujuan	3
1.4. Ruang Lingkup	4
1.5. Sistematika Penulisan	4
II. TINJAUAN METODOLOGI PENGUMPULAN DATA PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA	5
2.1. Pendahuluan	5
2.2. Metode Penarikan Contoh	7
2.3. Jenis-jenis Formulir yang Digunakan.....	12
2.4. Analisis Data	13
2.5. Metode Ubinan dan Pencacahan Rumpun (<i>Rumpun Counting</i> , RC)	14
2.6. Ujicoba Penentuan Ukuran Petak Optimum Tahun 2003	16
2.7. Ujicoba Penentuan Ukuran Petak Optimum Tahun 2004	20
III. EVALUASI METODE PENARIKAN CONTOH PADA PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA	24
3.1. Gambaran Umum Metode Penarikan Contoh	24
3.2. Penarikan Contoh Tahap Ganda (<i>Multi Stage Sampling</i>).....	26
3.3. Model Penarikan Contoh pada Pendugaan Produktivitas Komoditas Hortikultura.....	28
3.4. Penduga Produksi dan Produktivitas.....	30
3.5. Simulasi Komputer	33
3.6. Hasil Simulasi	36
3.7. Penerapan	37
IV. INFERENSIA UNTUK MODEL ACAK	41
4.1 Pendahuluan	41
4.2 Pendugaan dengan Metode Kuadrat Terkecil	43
4.3 Pendugaan dengan Metode Kemungkinan maksimum	57
4.4 Penerapan	68



Halaman

V.	PENDEKATAN BAYES PADA MODEL ACAK	73
5.1.	Pendahuluan	73
5.2.	Penentuan Prior	74
5.3.	Pendekatan Bayes.....	76
5.4.	Penerapan	87
VI.	PEMBAHASAN	88
VII.	KESIMPULAN DAN SARAN	98
7.1.	Kesimpulan	98
7.2.	Saran	99
	DAFTAR PUSTAKA	100
	LAMPIRAN	102

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



DAFTAR TABEL

n		Halama
1	Jenis-jenis formulir yang digunakan dalam ujicoba pengumpulan data produktivitas hortikultura tahun 2002	12
2	Pengujian hasil produktivitas metode RC-10x10, RC-5x5, dan UB-2.5x2.5 terhadap hasil produktivitas seluruh petak 16x16	18
3	Pengujian kesamaan ragam rata-rata produktivitas yang dihasilkan metode RC-10x10 dengan BS-10r	22
4	Algoritma simulai	34
5	Skenario luas panen kecamatan dan desa	35
6	Nilai parameter produktivitas	36
7	Data hasil ujicoba penentuan produktivitas kentang di kabupaten Brebes tahun 2003	40
8	Analisis ragam untuk model acak satu faktor dengan ulangan sama	43
9	Analisis ragam untuk model acak satu faktor dengan ulangan tidak sama	46
10	Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus level b dan jumlah ulangan sama	48
11	Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus ukuran b tidak sama	51
12	Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus jumlah ulangan tidak sama	54
13	Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus jumlah level b dan jumlah ulangan tidak sama	56
14	Tabel analisis ragam untuk model acak tersarang dua faktor dengan ulangan sama	65
15	Penduga kemungkinan maksimum bagi s^2 , s_b^2 , dan s_a^2 pada model acak tersarang dua factor	67
16	Data hasil ubinan dengan jumlah petani per dusun sama	72
17	Beberapa bentuk sebaran keluarga eksponen dan conjugate prior (Gill, 2002)	75
18	Hasil pendugaan terhadap \hat{m} , S^2 , S_a^2 , dan $ragam(\hat{m})$ untuk data dengan jumlah ulangan sama (Tabel 16)	87

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



Halaman

19	Hasil pendugaan terha dap \hat{m} , S^2 , \hat{S}_a^2 , dan <i>ragam</i> (\hat{m}) untuk data dengan jumlah ulangan tidak sama (Tabel 7)	87
20	Nilai dugaan \hat{m} , S^2 , \hat{S}_a^2 , <i>ragam</i> (\hat{m}) pada berbagai skenario nilai <i>hyper-prior</i> dari S_a^2 untuk kasus-b	91
21	Nilai dugaan \hat{m} , S^2 , \hat{S}_a^2 , <i>ragam</i> (\hat{m}) pada berbagai skenario nilai <i>hyper-prior</i> dari m untuk kasus-c	92
22	Nilai dugaan \hat{m} , S^2 , \hat{S}_a^2 , <i>ragam</i> (\hat{m}) pada berbagai skenario nilai <i>hyper-prior</i> dari S_a^2 dan m untuk kasus-d	93
23	Skenario keragaman untuk menguji hasil pendugaan metode kemungkinan maksimum dan metode Bayes	95
24	Perbandingan hasil pendugaan terhadap μ dan <i>ragam</i> (\hat{m}) dengan metode konvensional, metode kemungkinan maksimum, dan metode Bayes (kasus-a)	95

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

DAFTAR GAMBAR

n		Halama
1	Bagan prosedur pengambilan contoh pada ujicoba pengumpulan data produktivitas hortikultura tahun 2002.....	11
2	Contoh layout pembagian segmen petak contoh	17
3	Nilai galat baku dari rata-rata produktivitas pada berbagai ukuran contoh	37
4	Sebaran nilai rata-rata pada berbagai ukuran contoh: (a) 10, (b) 15, (c) 30, (d) 60, (e) 90, dan (f) 120	38
5	Perbandingan fungsi kemungkinan bagi s^2 dan s_a^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal.....	70
6	Perbandingan profil likelihood bagi s_a^2 : (a) Bayes kasus-a dengan profil likelihood normal, dan (b) Bayes kasus-b dengan profil likelihood normal.....	89
7	Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rata-rata bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 40	97
8	Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rata-rata bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 16$ dengan jumlah plot contoh 40	97
9	Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rata-rata bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 16$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 40	97
10	Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rata-rata bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 60	97



I. PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang

Informasi tentang karakteristik populasi secara kontinu dan berkala dibutuhkan oleh politisi, bagian marketing suatu perusahaan, kantor pelayanan publik, dan lain-lain. Pengumpulan data terhadap seluruh anggota populasi seringkali membutuhkan waktu yang lama dan biaya yang sangat besar. Oleh karena itu, penggunaan survei contoh akan sangat membantu dalam mempercepat ketersediaan informasi dan mereduksi biaya yang harus dikeluarkan.

Survei contoh itu sendiri didefinisikan sebagai studi terhadap himpunan bagian (*sample* atau contoh) yang dipilih dari suatu populasi yang besar. Peubah atau karakteristik yang menjadi perhatian dan ingin diobservasi diukur dari individu yang terpilih sebagai contoh. Berdasarkan karakteristik yang dibawa oleh contoh tersebut kemudian dilakukan ekstrapolasi terhadap karakteristik seluruh populasi. Validitas dan reliabilitas dari ekstrapolasi terhadap populasi tergantung dari seberapa baik contoh tersebut diambil dari populasi dan seberapa baik pengukuran yang telah dilakukan.

Dalam banyak survei, teknik percontohan yang harus diterapkan seringkali melibatkan metode yang rumit dan tidak sederhana. Sebut saja, Survei Sosial Ekonomi Nasional (SUSENAS) yang dilakukan oleh Badan Pusat Statistik, yang menggunakan teknik *multi-stage sampling* (teknik percontohan multi-tahap). Dalam teknik *multi-stage sampling*, *error* yang terjadi dapat berlapis-lapis yang disumbangkan oleh setiap *stage*/tahap. Oleh karena itu, untuk mendapatkan ukuran contoh yang optimal dari segi kecermatan pendugaan dan biaya yang harus dikeluarkan menjadi lebih rumit karena harus memperhitungkan keragaman dari setiap *stage*.

Pada dasarnya, setiap kali melakukan pendugaan, kita ingin memperoleh penduga yang memiliki ketelitian dan ketepatan yang tinggi. Penduga yang memiliki sifat seperti ini hanya dapat diperoleh melalui alat ukur yang handal, metode pengumpulan data (penarikan contoh) yang tepat, dan pemodelan atau metode pendugaan yang baik. Alat ukur yang handal akan memberikan hasil pengukuran yang memiliki validitas dan reliabilitas yang tinggi. Metode pengumpulan data yang tepat akan menghasilkan keterwakilan (*representatif*) yang baik, yang pada akhirnya dapat memberikan hasil

dugaan yang akurat dan memiliki presisi yang tinggi. Sedangkan metode pendugaan yang baik akan memberikan penduga yang tak bias, ragam terkecil, dan efisien.

Ada dua paradigma utama didalam melakukan pendugaan parameter, yaitu *frequentist* dan *Bayesian*. Dalam melakukan pendugaan parameter, *frequentist* mendasarkan pada informasi yang dibawa oleh contoh. Sedangkan bayesian tidak hanya menggunakan informasi yang dibawa oleh contoh tetapi juga informasi awal (*prior information*) yang turut diperhitungkan dalam melakukan pendugaan terhadap parameter populasi. Informasi awal tersebut diharapkan dapat meningkatkan ketepatan dan/atau ketelitian dugaan terhadap parameter populasi.

Pada berbagai bidang, seringkali tersedia data yang dapat digunakan sebagai informasi awal atau tambahan tersebut di atas. Misalnya pada kasus pendugaan produktivitas komoditas hortikultura, dimana informasi awal tentang produktivitas hortikultura dapat diperoleh dari hasil Survei Pertanian, yang pengumpulan datanya dilakukan secara rutin (bulanan/triwulanan) oleh mantri tani di seluruh Indonesia.

Metode yang dapat memanfaatkan adanya informasi awal dalam membuat dugaan terhadap parameter populasi tersebut biasa disebut sebagai metode Bayes. Pada banyak literatur/penelitian, misalnya dapat dilihat pada Berger (1985) dan Gill (2002), metode Bayes dapat memberikan dugaan yang memiliki ketepatan (presisi) lebih tinggi dibandingkan dengan metode-metode klasik seperti metode kuadrat terkecil atau metode kemungkinan maksimum. Metode Bayes merupakan salah satu metode pendugaan parameter yang memanfaatkan informasi awal tentang parameter yang akan diduga (θ) yang biasa disebut sebagai informasi prior ($\pi(\theta)$) dan informasi dari contoh (x). Informasi awal dan informasi contoh ini dikombinasikan membentuk suatu sebaran yang disebut sebagai sebaran posterior, yang merupakan sebaran dasar pengujian dalam metode Bayes (Berger, 1985).

Di dalam tulisan ini akan dibahas tentang penggunaan metode Bayes untuk pendugaan produktivitas komoditas hortikultura, yang metodologi surveinya sedang dikembangkan dan dikaji oleh Pusat Data dan Informasi Pertanian (Pusdatin), Departemen Pertanian, Republik Indonesia. Dalam bidang pertanian dikenal beberapa definisi produktivitas, terkait dengan perbedaan pengertian tentang produksi, satuan amatan dan satuan waktu. Dalam disertasi ini, produktivitas didefinisikan sebagai rasio antara total produksi dan total luas panen dalam satu musim panen. Luas panen berarti

luasan yang dipanen, tidak termasuk luas pematang, jalan, dan saluran air yang lebar. Sedangkan produksi pada komoditas kentang yang menjadi kasus dalam disertasi ini diartikan sebagai berat seluruh kentang yang dipanen dari seluruh luasan panen.

Metodologi survei yang dikembangkan dan diujicoba masih berfokus pada komoditas sayuran, dan ada beberapa ujicoba untuk komoditas buah-buahan. Namun, di dalam disertasi akan difokuskan hanya pada komoditas kentang. Metode survei atau pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura tersebut berbasis pada plot contoh yang dipilih menggunakan metode percontohan *multi-stage sampling*. Metode pengukurannya menggunakan metode *rumpun counting* untuk sayuran dan pohon pengamatan untuk buah-buahan. Metode survei/pengumpulan data untuk pendugaan produktivitas hortikultura ini telah diujicoba di lapangan oleh Pusdatin Deptan dari tahun 2001 sampai tahun 2004.

1.2. Pertanyaan Penelitian

Beberapa pertanyaan inti yang ingin dijawab berkaitan dengan metodologi pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura yang sedang dikembangkan dan diujicoba oleh Pusdatin Deptan, yaitu:

- (1) Bagaimana menggunakan pendekatan model acak dalam pendugaan produktivitas komoditas kentang dalam kasus tersebut? Bagaimana inferensia statistika pada model acak?
- (2) Apakah pendekatan metode kemungkinan maksimum dan metode Bayes dapat digunakan pada model acak? Bagaimana melakukan pendugaan parameter pada model acak menggunakan metode Bayes?

1.3. Tujuan

Tujuan dari disertasi ini adalah

- (1) Menerapkan model acak dalam pendugaan produktivitas komoditas kentang
- (2) Menerapkan metode Bayes dalam model acak
- (3) Menelaah sifat-sifat statistik dugaan Bayes dalam model acak

1.4. Ruang Lingkup

Dugaan yang baik, yang memiliki ketelitian dan ketepatan hanya dapat diperoleh melalui serangkaian pengukuran, metode percontohan, dan model analisis yang baik. Disertasi ini fokus pada metode atau model analisis untuk pendugaan produktivitas komoditas kentang. Model analisis yang dikembangkan berbasis pada metode percontohan untuk pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura yang sedang dikembangkan dan diuji coba oleh Pusdatin Deptan di Jawa Barat dan Jawa Tengah pada tahun 2001 sampai dengan 2004. Hasil kajian model analisis untuk pendugaan produktivitas komoditas kentang ini diharapkan dapat dikembangkan untuk pendugaan produktivitas komoditas hortikultura.

1.5. Sistematika Penulisan

Disertasi ini terdiri dari tujuh bab. Bab 1 menyajikan latar belakang dan tujuan dari penelitian. Gambaran rinci tentang metodologi pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura yang sedang dikembangkan dan diujicoba oleh Pusdatin Deptan disajikan dalam Bab 2. Sedangkan Bab 3 menyajikan evaluasi terhadap metode percontohan yang digunakan dalam proses pengumpulan data produktivitas komoditas hortikultura tersebut.

Bab 4 membahas tentang pendekatan model acak untuk melakukan pendugaan produktivitas komoditas hortikultura (pertanyaan-1). Metode pendugaan parameter yang dibahas pada Bab 4 menggunakan metode kuadrat terkecil (*Analysis of variance*, ANOVA) dan metode kemungkinan maksimum (pertanyaan-2).

Bab 5 membahas pendekatan Bayes pada model acak (pertanyaan-2). Sedangkan Bab 6 membahas perbandingan antara metode yang dibahas pada Bab 3, Bab 4, dan Bab 5, dengan penekanan pada kelemahan dan kelebihan dari pendekatan Bayes. Saran dan kesimpulan dari keseluruhan bahasan yang telah dilakukan disajikan pada Bab 7.

II. TINJAUAN METODOLOGI PENGUMPULAN DATA PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA

2.1. Pendahuluan

Komoditas hortikultura yang mencakup sayuran, buah-buahan, tanaman hias dan obat-obatan merupakan salah satu komoditas unggulan sektor pertanian karena dapat memberikan kontribusi yang cukup besar terhadap devisa negara. Bahkan beberapa komoditas hortikultura, seperti cabe dan bawang merah sangat besar pengaruhnya terhadap tingkat inflasi. Oleh karena itu, perencanaan dan penanganan komoditas hortikultura secara tepat akan dapat memberikan dampak yang sangat baik bagi perekonomian Indonesia.

Di lain pihak, ketersediaan data/statistik hortikultura untuk keperluan perencanaan masih dianggap jauh dari yang diharapkan, baik dari keakuratan/ kualitas data maupun dari segi ketepatan waktu. Oleh karena itu, mulai tahun 2001, Pusat Data dan Informasi Pertanian (Pusdatin) Departemen Pertanian, sebagai salah satu instansi yang berkepentingan dalam menunjang penyediaan data pertanian, merasa perlu untuk melakukan perbaikan statistik hortikultura, terutama yang berkaitan dengan data luas panen, produksi, dan produktivitas.

Selama ini pengumpulan data hortikultura dilakukan dengan pencacahan lengkap melalui Survei Pertanian (SP) dengan periode bulanan (menggunakan kuesioner SP-IIA) maupun triwulanan (SP-IIB, SP-IIIA, dan SP-IIIB). Pengumpulan data dilakukan oleh mantri tani di seluruh kecamatan di Indonesia. Namun hasil pengumpulan data ini masih mengandung berbagai kelemahan, baik yang bersifat teknis metodologi maupun yang bersifat non-teknis. Dari sisi non-teknis, komoditas hortikultura belum dianggap sebagai komoditas strategis seperti halnya padi, sehingga pengumpulan datanya memiliki skala prioritas yang rendah, yang pada akhirnya menurunkan motivasi mantri tani dalam mengumpulkan data. Dari sisi teknis metodologi, pengumpulan data hortikultura masih disamakan dengan padi palawija, padahal karakteristik komoditas hortikultura sangatlah berbeda dan jauh lebih kompleks. Oleh karena itu, kajian dan pengembangan metodologi pengumpulan data luas panen, produksi, dan produktivitas komoditas hortikultura sangat mendesak untuk dilakukan.

Dari segi metode pengumpulan data dan teknis pengukurannya di lapangan, data luas panen secara relatif lebih mudah dilakukan dan data yang diperoleh umumnya

memiliki kualitas yang memadai. Hal ini tidak sejalan dengan data produksi dan produktivitas, yang umumnya kualitasnya diragukan karena sulitnya melakukan pengukuran di lapangan. Oleh karena itu, kajian khusus terutama yang berkaitan dengan data produktivitas sangat perlu dilakukan.

Khusus untuk komoditas sayuran, yang menjadi fokus ujicoba pengembangan metodologi, produktivitas didefinisikan sebagai produksi dibagi dengan luas panen dalam sekali musim panen. Luas panen berarti luasan yang dipanen, tidak termasuk luas pematang, jalan, dan saluran air yang lebar. Sedangkan dalam plot contoh, produktivitas didefinisikan sebagai produksi dibagi dengan luas plot contoh yang bersangkutan. Untuk komoditas buah-buahan, terutama yang berpohon besar seperti mangga, rambutan, dan durian, produktivitas biasanya dinyatakan sebagai produksi per pohon per musim panen.

Dengan pertimbangan bahwa produk hortikultura sangat banyak dan perilakunya sangat kompleks, maka pengembangan metodologi masih difokuskan pada komoditas prioritas yang meliputi: lima komoditas sayuran (bawang merah, kentang, kol/kubis, cabe/lombok, tomat), dan enam komoditas buah-buahan (mangga, manggis, rambutan, jeruk, pisang, salak).

Ujicoba metodologi pengumpulan data hortikultura di lima kabupaten di propinsi Jawa Barat, yang dilakukan oleh Pusdatin pada tahun 2001, memberikan hasil yang sangat berbeda, baik dengan hasil Survei Pertanian (SP) maupun dengan hasil survei/ubinan (khusus untuk data produktivitas). Perbedaan hasil yang terjadi diduga antara lain karena: (1) Metode penentuan kabupaten/kecamatan/desa contoh yang dirasakan belum tepat, (2) Masih banyaknya kendala dalam aspek pengukuran, seperti: pengetahuan dan keseriusan para pengumpul data yang belum sepenuhnya sesuai dengan yang diharapkan, sifat komoditas hortikultura itu sendiri yang sangat kompleks, dan faktor-faktor teknis lainnya; (3) Penggunaan ukuran ubinan 10x10 rumpun untuk menghitung produktivitas yang diadopsi dari hasil kajian Tim Expert JICA terhadap komoditas padi masih perlu dikaji apakah sudah tepat jika diterapkan untuk komoditas sayuran; (4) Penggunaan metode pohon pengamatan untuk menghitung produktivitas komoditas buah-buahan juga masih perlu dikaji apakah sudah tepat.

Pada tahun 2002-2004, Pusdatin melakukan uji coba kembali di daerah propinsi Jawa Barat dan Jawa Tengah. Ujicoba ini menfokuskan pengembangan untuk

komoditas sayuran dengan penekanan pada evaluasi prosedur percontohan, proses pengukuran, dan penentuan ukuran plot optimum. Beberapa hasil ujicoba yang telah dilakukan disajikan pada Sub Bab 2.6 dan 2.7.

2.2. Metode Penarikan Contoh

Dalam Sub-bab ini akan dibahas metodologi pengumpulan data produktivitas hortikultura yang sedang dikembangkan dan diujicoba oleh Pusdatin Deptan, yang pada tahun 2002 diujicobakan di Propinsi Jawa Tengah.

Metode pengumpulan data produktivitas hortikultura dilakukan melalui metode survei sampling plot pengamatan 10 x 10 rumpun untuk sayuran, dan pohon pengamatan untuk komoditas buah-buahan. Contoh diharapkan dapat digunakan untuk pendugaan produktivitas tingkat propinsi. Oleh karena itu, tahapan pengumpulan data produktivitas ini dimulai dari penentuan kabupaten contoh, sampai dengan penentuan posisi plot pengamatan atau pohon pengamatan. Tahapan sampling dan metode pengukurannya adalah sebagai berikut:

1. Pemilihan kabupaten contoh

Kabupaten contoh ditentukan berdasarkan data rata-rata luas tanam dalam tiga tahun terakhir (untuk sayuran) dan data rata-rata jumlah pohon menghasilkan dalam tiga tahun terakhir (untuk buah-buahan). Kabupaten contoh diharapkan mewakili karakteristik keragaman produktivitas kabupaten di propinsi tersebut. Dengan pertimbangan bahwa perbedaan tingkat produktivitas akan cukup besar pada daerah sentra produksi & non sentra, maka kabupaten yang terpilih sebagai contoh diharapkan ada yang mewakili kabupaten sentra dan kabupaten non-sentra. Yang disebut kabupaten sentra adalah kabupaten yang luas tanam bagi komoditas yang bersangkutan cukup besar dan menonjol dibandingkan kabupaten-kabupaten lain, sedang kabupaten non-sentra adalah sebaliknya. Secara teknis, kabupaten sentra dan non-sentra ditentukan berdasarkan sebaran persen (*share*) luas tanam kabupaten terhadap propinsi. Jumlah kabupaten sentra dan non-sentra yang terpilih sebagai contoh ditentukan secara proposional berdasarkan persen luas tanam. Khusus pada saat ujicoba di Jawa Tengah, kabupaten contoh ditentukan secara purposive dan berdasarkan pengalaman ujicoba di Propinsi Jawa Barat ditetapkan banyaknya plot pengamatan per kabupaten sebesar 40 plot.

2. Pemilihan kecamatan contoh

Kecamatan contoh ditentukan berdasarkan proporsi luas tanam triwulan yang lalu (untuk sayuran) dan proporsi jumlah pohon menghasilkan triwulan yang sama tahun yang lalu. Jumlah plot yang harus dialokasikan kepada setiap kecamatan mengikuti formula berikut:

$$n_i = p_i * n, \text{ dan } p_i = \frac{L_i}{\sum L_i}$$

dengan:

n_i = jumlah plot pengamatan kecamatan ke-i

p_i = proporsi luas tanam kecamatan ke-i

n = jumlah plot seluruh kabupaten

L_i = luas tanam atau banyaknya pohon menghasilkan kecamatan ke-i

Catatan: jumlah minimal plot pada kecamatan terpilih adalah 3. Oleh karena itu, untuk kecamatan yang alokasinya dibawah 2 akan didrop, sedangkan kecamatan yang lebih dari 2 tetapi kurang dari 3 akan ditambah 1 sehingga menjadi 3. Jika alokasi masih di bawah jumlah yang ditetapkan, sisa plot akan dialokasikan pada kecamatan yang mendapat pembulatan alokasi ke bawah yang paling besar, dan seterusnya sampai jumlah plot total sama dengan n.

3. Pemilihan desa contoh

Desa contoh juga ditentukan berdasarkan nilai proporsi luas tanam baru triwulan sebelumnya atau jumlah pohon menghasilkan triwulan yang sama tahun lalu. Jumlah contoh target untuk tiap desa ditentukan secara proporsional terhadap luas tanam baru atau jumlah pohon menghasilkan di desa tersebut. Jumlah contoh minimum untuk tiap komoditi per desa terpilih adalah sebanyak 2 plot. Dengan demikian, jika dari hasil perhitungan diperoleh jumlah contoh pada suatu desa lebih kecil dari 2, maka jumlah contoh tersebut harus ditambah menjadi 2 atau dikurangi sehingga jumlah contohnya menjadi 0.

4. Pendaftaran/*listing* dusun dan petani

a. Pendaftaran dan pemilihan dusun contoh

Pendaftaran dusun/blok dimaksudkan untuk mendapatkan kerangka dusun/blok hortikultura dalam suatu desa terpilih. Dusun/blok yang didaftarkan harus memiliki jumlah petani hortikultura lebih besar atau sama dengan jumlah plot yang ditargetkan. Pemilihan dusun/blok contoh dilakukan secara acak dengan peluang proporsional terhadap jumlah petani.

b. Pendaftaran dan pemilihan petani contoh

Setelah dusun/blok contoh ditentukan maka dilakukan pendaftaran petani hortikultura yang lahannya ada di dusun/blok tersebut. Seperti halnya pendaftaran (*listing*) dusun/blok, kegiatan pendaftaran petani juga dilakukan oleh Mantri Tani dengan menggunakan Formulir SPH.PP. Tujuan dari *listing* ini adalah untuk mendapatkan kerangka contoh sebagai bahan penarikan contoh petani untuk pengambilan plot pengamatan. Sumber informasi mengenai petani-petani pada suatu dusun/blok contoh yang akan melakukan panen hortikultura pada triwulan bersangkutan antara lain adalah PPL, Kepala Desa, Kepala Dusun.

5. Pemilihan bidang dan petak lahan

Pemilihan bidang lahan atau petak lahan dilakukan secara acak. Jika petani contoh memiliki bidang lahan lebih dari satu, maka Mantri Tani harus melakukan penomoran terhadap bidang-bidang tersebut, kemudian melakukan pemilihan bidang lahan secara acak. Penomoran bidang dilakukan secara urut searah jarum jam, dimulai dari bidang lahan yang paling dekat dengan rumah petani.

6. Penentuan plot pengamatan dan penentuan pohon pengamatan

Penentuan plot pengamatan (untuk sayuran) dan pohon pengamatan (untuk buah-buahan) diawali dengan penentuan titik pangkal sumbu. Titik pangkal sumbu ditentukan di titik Barat Daya dari bidang/petak lahan. Setelah titik pangkal sumbu ditentukan, pada penentuan plot pengamatan dilanjutkan dengan penentuan jumlah tanaman pada sumbu-x dan sumbu-y, kemudian dilakukan pengacakan titik awal

plot pengamatan 10x10 tanaman. Sedangkan pada penentuan pohon pengamatan dilanjutkan dengan penomoran pohon yang akan menghasilkan/panen dalam masa pengamatan. Penomoran pohon menggunakan kaidah obat nyamuk untuk jarak tanam yang tidak teratur, dan kaidah spiral untuk jarak tanam teratur. Setelah itu dilakukan pemilihan contoh secara acak terhadap pohon yang telah dinomori untuk memilih tiga tanaman contoh.

Catatan: Untuk lahan yang sangat luas (di atas 100x100 langkah), penomoran tanaman yang akan menghasilkan/panen dapat dilakukan menggunakan petak bayangan yang luasnya sekitar 100x100 langkah di wilayah titik pangkal sumbu.

7. Pengukuran hasil plot pengamatan dan pohon pengamatan

Pada saat dilakukan panen, produksi dan luas plot pengamatan 10x10, serta produksi dari tiga pohon pengamatan harus ditimbang/diukur. Untuk menentukan luas plot 10x10 tanaman, dilakukan pengukuran terhadap 11 baris tanaman di sumbu-x dan 11 lajur tanaman sumbu-y, dan masing-masing dilakukan tiga kali pengukuran yaitu di bagian pinggir kanan & kiri dan bagian tengah.

Gambaran secara ringkas tahapan percontohan dan metode pengukuran produktivitas tersebut disajikan pada Gambar 1. Dari hasil ujicoba tahun 2002 dapat disimpulkan bahwa prosedur percontohan ini dapat dikerjakan/diterapkan dengan baik oleh petugas lapangan.

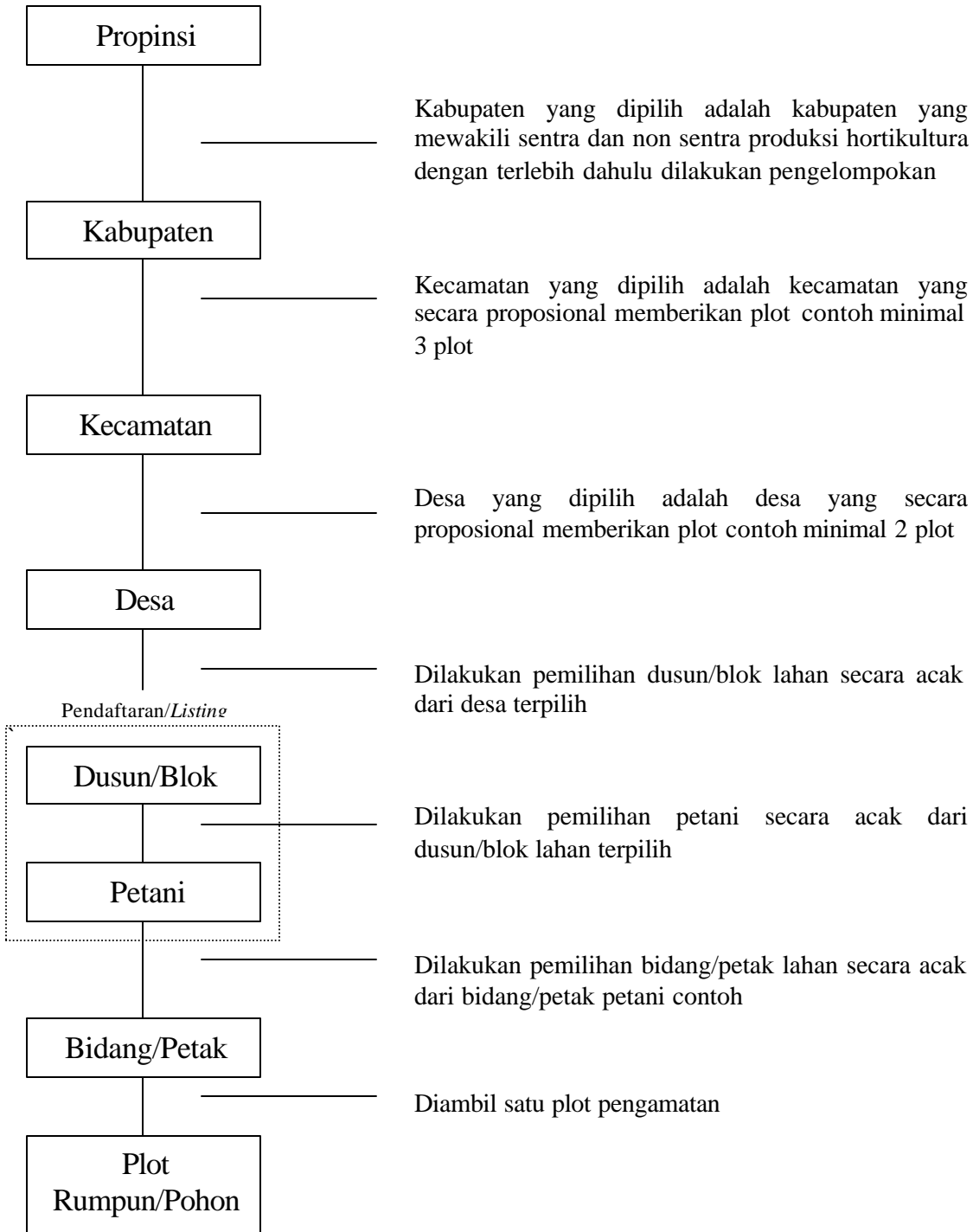
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan artikel atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



Gambar 1 Bagan prosedur pengambilan contoh pada ujicoba pengumpulan data produktivitas hortikultura tahun 2002

2.3. Jenis-Jenis Formulir yang Digunakan

Untuk mempermudah dan menyeragamkan proses penentuan contoh, dan pengumpulan data hasil pengukuran produktivitas, maka disediakan formulir standar. Beberapa jenis formulir yang digunakan dalam ujicoba pengumpulan data produktivitas komoditas tanaman hortikultura ini disajikan pada Tabel 1, sedangkan bentuk isian formulir-formulir tersebut dapat dilihat di Pusat Data dan Informasi Pertanian (2002).

Tabel 1 Jenis-jenis formulir yang digunakan dalam ujicoba pengumpulan data produktivitas hortikultura tahun 2002

No.	Formulir	Kegunaan	Dikerjakan Oleh
1.	SPH.DSKb	Mendapatkan kabupaten contoh	Petugas propinsi
2.	SPH.DSKc	Mendapatkan kecamatan contoh	Petugas kabupaten
3.	SPH.DSD	Mendapatkan desa contoh	Mantri Tani
4.	SPH.PD	Mendapatkan dusun contoh	Mantri Tani
5.	SPH.PP	Mendapatkan petani hortikultura	Mantri Tani
6.	SPH.DS	Daftar contoh dan jadwal pengamatan	Mantri Tani
7.	SPH.S	Pengumpulan data di tingkat petani pada sayuran hasil ubinan	Mantri Tani
8.	SPH.RKS	Rekap hasil ubinan sayuran yang dilaporkan Mantri Tani	Petugas kabupaten
9.	SPH.B	Pengumpulan data di tingkat petani pada buah-buahan hasil pohon amatan	Mantri Tani
10.	SPH.RKB	Rekap hasil pohon amatan buah-buahan yang dilaporkan Mantri Tani	Petugas kabupaten
11.	SPH.SBU	Pengumpulan data di tingkat petani pada sayuran dan buah-buahan yang dipanen berulang kali	Mantri Tani/Petani

2.4. Analisis Data

Semua data yang dikumpulkan melalui formulir-formulir tersebut di atas dianalisis di propinsi dengan menggunakan program analisis yang telah disediakan oleh Pusdatin. Program tersebut memberikan dugaan produktivitas tingkat propinsi dan kabupaten.

Dugaan rataan produktivitas sayuran pada kabupaten ke-i dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{X}_i = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{X}_{ij} \cdot L_{ij}}{\sum_{j=1}^n L_{ij}}$$

Dimana:

\bar{X}_i Dugaan rataan produktivitas sayuran di kabupaten ke-i.

\bar{X}_{ij} Dugaan rataan produktivitas sayuran di kecamatan ke-j, kabupaten ke-i.

L_{ij} Luas tanam baru triwulan yang lalu (sayuran) menghasilkan triwulan yang sama tahun yang lalu di kecamatan ke-j, kabupaten ke-i.

Dan \bar{X}_{ij} diduga dengan persamaan:

$$\bar{X}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n X_{ijk}}{m_{ij}}$$

dengan:

X_{ijk} Hasil produktivitas sayuran di desa ke-k, kecamatan ke-j, kabupaten ke-i.

m_{ij} Jumlah plot ubinan di kecamatan ke-j, kabupaten ke-i.

Sedangkan dugaan rataan produktivitas sayuran di propinsi dirumuskan sebagai

berikut:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^p \bar{X}_i \cdot L_i}{\sum_{i=1}^p L_i}$$

Dimana:

- \bar{X} Dugaan rata-rata produktivitas sayuran atau produksi per pohon buah-buahan di propinsi.
- \bar{X}_i Dugaan rata-rata produktivitas sayuran atau produksi per pohon buah-buahan di kabupaten ke- i .
- L_i Luas tanam baru triwulan yang lalu (sayuran) atau jumlah pohon menghasilkan triwulan yang sama tahun yang lalu di kabupaten ke- i .

2.5. Metode Ubinan dan Pencacahan Rumpun (*Rumpun Counting, RC*)

Statistik pertanian merupakan salah satu statistik yang tertua yang diterapkan di Indonesia. Pada tahun 1950-an, salah satu divisi di BPS telah mencoba membuat perencanaan, mengumpulkan, mengolah, dan mempublikasikan data pertanian. Salah satu data pertanian yang paling penting adalah statistik tentang padi. Statistik padi terdiri dari luas area dan hasil produksi yang dilaporkan oleh petugas kantor kecamatan. Sampai tahun 1960-an metodologi pengumpulan data area didasarkan pada laporan administratif dari tingkat desa, sedangkan data produksi didasarkan pada produktivitas lahan yang dilaporkan dalam laporan pajak yang dibuat oleh kantor pajak (Maksum, 1999).

Menyadari bahwa data produksi yang dilaporkan oleh kantor pajak cenderung berbias ke bawah (*under-estimate*), maka pada tahun 1970-an, BPS mencoba mengembangkan metodologi dengan survei hasil pada plot contoh yang dilakukan pada beberapa propinsi. Alat yang digunakan adalah tambang yang dapat mengcover 10m x 10m dan 5m x 5m. Petak dan plot dipilih secara acak. Sejak itulah BPS menggunakan metode baru ini.

Setelah beberapa tahun mengaplikasikan metode tersebut, timbul pertanyaan tentang keakuratan metode dengan penggunaan tambang dalam proses pengukuran. Disamping itu, para Mantri Statistik ternyata merasa kesulitan/keberatan melakukan pemanenan dengan ukuran 10m x 10m atau 5m x 5m. Oleh karena itu, BPS kemudian mencoba membuat metode baru dengan ukuran yang lebih kecil yaitu 2.5m x 2.5m dengan *pilot project* di Yogyakarta. Dari hasil ujicoba tersebut diperoleh kesimpulan bahwa nilai dugaan ketiga metode tersebut tidak berbeda nyata. Oleh karena itu, untuk kepraktisannya dapat dipilih 2.5m x 2.5m. Selanjutnya dilakukan pengembangan alat, yang tidak lagi menggunakan tambang tetapi besi, yang *blueprint* rancangannya

dikerjakan oleh IPB. Disamping itu, telah dilakukan studi lain oleh ahli FAO dari Korea yang menggunakan ukuran 1m x 1m dengan alat bambu. Tetapi hasilnya kurang memuaskan karena secara statistika nilai dugaannya cenderung berbias ke atas (*over estimate*).

Walaupun tingkat akurasi dan kepraktisan metode 2.5m x 2.5m dapat diterima, namun muncul masalah baru, yaitu alat yang digunakan terlalu berat untuk dibawa ke dalam plot pada lahan sawah yang becek. Oleh karena itulah, BPS bekerjasama dengan Ditjen Tanaman Pangan dan Hortikultura dan Pusdatin Departemen pertanian, melalui project ASTIT (JICA) mencoba untuk mencari metode alternatif yang lebih praktis (Maksum, 1999).

Metode pengumpulan data produktivitas padi yang sedang diuji coba diusahakan tidak menggunakan alat yang cukup berat seperti pada plot 2.5m x 2.5m. Metode tersebut diberi nama Pencacahan Rumpun (*Rumpun Counting*, RC) yang membutuhkan alat meteran dan timbangan saja. Dan seperti halnya pada plot 2.5m x 2.5m, pengumpulan datanya lakukan melalui pendekatan rumah tangga pertanian.

Di dalam implementasi metode RC, petugas lapangan harus mengukur jarak antar rumpun dan membuat plot dengan ukuran 10x10 rumpun. Ujicoba dilakukan di Jawa Barat, Jawa Tengah, dan Jawa Timur. Hasil evaluasinya menunjukkan bahwa metode RC ternyata memberikan hasil yang relatif sama dengan hasil survei yang digunakan saat ini (Sugiyono, 2001).

Kajian lebih lanjut menunjukkan bahwa metode ubinan lebih baik pada keadaan area tumbuh per-rumpun kecil (jarak tanam kecil), sedangkan metode RC lebih baik untuk tanaman dengan area tumbuh per-rumpun besar (jarak tanam besar) (Yulianto, 2001).

Hasil kajian lain yang dilakukan oleh Pusdatin Deptan pada tahun 2003, yang mencoba membandingkan metode RC 10x10, RC 5x5, dan Ubinan 2.5mx2.5m pada tanaman kentang dan tomat menunjukkan bahwa secara umum metode RC 10x10 dan RC 5x5 masih lebih baik dibandingkan dengan metode ubinan 2.5mx2.5m (Pusat Data dan Informasi Pertanian, 2003).

Metode RC belum diterapkan, dan baru akan diterapkan untuk pengumpulan data produktivitas tanaman padi. Sedangkan pada pengumpulan data produktivitas hortikultura, baik metode ubinan, metode RC, maupun pohon pengamatan (untuk buah-

buahan) belum pernah diterapkan. Bahkan untuk metode pohon pengamatan belum pernah ada kajian secara khusus untuk menduga produktivitas tanaman buah-buahan.

2.6. Ujicoba Penentuan Ukuran Petak Optimum Tahun 2003

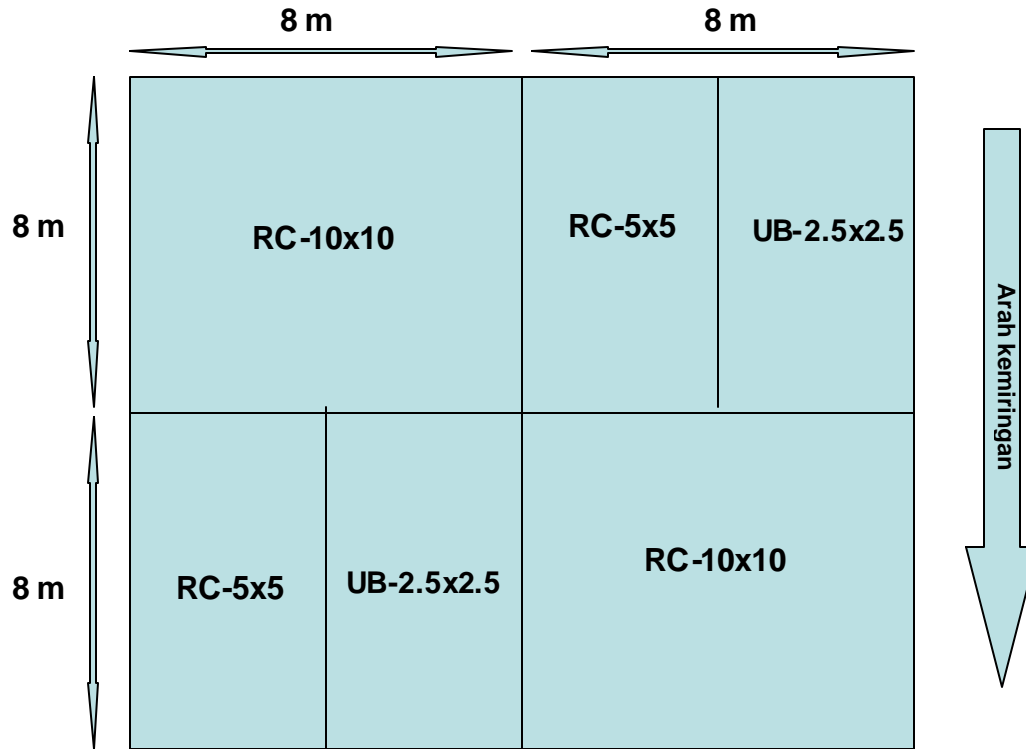
Pusdatin Deptan, bekerjasama dengan BPS dan Dirjen Hortikultura telah melakukan serangkaian ujicoba metodologi pendugaan produktivitas hortikultura khususnya berkaitan dengan penentuan ukuran petak optimum. Ujicoba tersebut telah dilakukan pada tahun 2003 dan tahun 2004. Berikut ini akan disajikan metodologi dan hasil dari ujicoba tersebut.

Ujicoba untuk penentuan ukuran petak optimum yang dilaksanakan pada tahun 2003 bertujuan untuk membandingkan metode rumpun counting 10 x 10 rumpun (RC-10x10), metode rumpun counting 5 x 5 rumpun (RC-5x5), dan metode ubinan 2.5 m x 2.5 m (UB-2.5x2.5). Komoditas yang menjadi objek ujicoba adalah kentang dan tomat, tetapi tulisan ini hanya akan membahas hasil ujicoba komoditas kentang. Ujicoba tersebut mengambil lokasi sentra produksi kentang dan tomat di propinsi Jawa Barat (Kabupaten Bandung dan Kabupaten Garut) dan propinsi Jawa Tengah (Kabupaten Banjarnegara dan Kabupaten Wonosobo).

Pada setiap kabupaten dipilih empat kecamatan sebagai lokasi ujicoba, sedangkan pada setiap kecamatan ditetapkan sebanyak dua petak contoh. Ukuran petak contoh ditetapkan minimal 16 m x 16 m. Oleh karena itu, petak contoh ini dipilih dari lahan petani di kecamatan tersebut yang luas lahannya lebih dari 16 m x 16 m, dan yang siap panen pada masa ujicoba. Posisi petak contoh yang berukuran 16 m x 16 m pada lahan petani terpilih ditentukan secara acak.

Setiap petak contoh dibagi menjadi enam segmen, dua segmen untuk metode RC-10x10, dua segmen untuk metode RC-5x5, dan dua segmen untuk metode UB-2.5x2.5. Prosedur pembagian segmennya adalah sebagai berikut: (1) bagi petak contoh menjadi 4 bagian yang sama besar, (2) pilih secara acak dua segmen yang berseberangan untuk metode RC-10x10, (3) bagi dua segmen sisanya masing-masing menjadi dua bagian searah dengan arah kemiringan, dan pilih secara acak satu segmen untuk metode RC-5x5, dan satu segmen untuk metode UB-2.5x2.5. Penentuan posisi plot pada masing-

masing segmen ditentukan secara acak. Contoh layout pembagian segmen petak contoh disajikan pada Gambar 2.



Gambar 2 Contoh layout pembagian segmen petak contoh

Dari setiap petak contoh diukur luas dan produksi (produktivitas) dari seluruh petak (16 m x 16 m), produktivitas metode RC-10x10 ulangan 1 dan ulangan 2, produktivitas metode RC-5x5 ulangan 1 dan ulangan 2, serta produktivitas metode UB-2.5x2.5 ulangan 1 dan ulangan 2. Hasil pengukuran ini selanjutnya dianalisis untuk menjawab dua pertanyaan berikut ini: (1) Apakah benar ketiga metode tersebut menghasilkan rata-rata produktivitas yang sama dengan rata-rata produktivitas seluruh petak?; (2) Manakah metode yang lebih efisien, RC-10x10, RC-5x5 ataukah UB-2.5x2.5?

Untuk menjawab pertanyaan (1) digunakan uji-t berpasangan dengan hipotesis berikut:

$$H_0: \mu_d=0 \text{ lawan } H_1: \mu_d \neq 0$$

Hasil pengujian pada taraf nyata 5% untuk masing-masing metode pada propinsi Jawa Barat dan Propinsi Jawa Tengah disajikan pada Tabel 2.

Tabel 2 Pengujian hasil produktivitas metode RC-10x10, RC-5x5, dan UB-2.5x2.5 terhadap hasil produktivitas seluruh petak 16x16

Metode	Propinsi	Rataan Beda	t	Nilai-p	Keputusan
RC-10x10	Jawa Barat	1.57	1.19	0.254	Terima H_0
	Jawa Tengah	-1.71	-1.65	0.119	Terima H_0
	Gabungan	-0.07	-0.08	0.939	Terima H_0
RC-5x5	Jawa Barat	-0.51	-0.29	0.774	Terima H_0
	Jawa Tengah	2.17	0.79	0.440	Terima H_0
	Gabungan	0.83	0.52	0.610	Terima H_0
UB-2.5x2.5	Jawa Barat	8.78	6.53	0.000	Tolak H_0
	Jawa Tengah	7.03	5.41	0.000	Tolak H_0
	Gabungan	7.91	8.47	0.000	Tolak H_0

Secara teori, plot yang diukur dengan metode RC-10x10, RC-5x5, dan UB-2.5x2.5 merupakan contoh acak dari petak keseluruhan, sehingga hasil pengujiannya seharusnya mengarah kepada penerimaan H_0 . Namun, hasil pengujian yang disajikan pada Tabel 2 menunjukkan bahwa pendugaan produktivitas dengan metode UB-2.5x2.5 ternyata menghasilkan rata-rata produktivitas yang berbeda nyata dan cenderung lebih besar dibandingkan dengan rata-rata produktivitas keseluruhan petak. Hasil ini memberikan indikasi bahwa metode UB-2.5x2.5 masih memberikan hasil pengukuran produktivitas yang berbias. Dari pengamatan di lapangan, bias tersebut diduga diakibatkan oleh kesalahan dalam penentuan plot pengamatan.

Pertanyaan kedua yang berkaitan dengan metode mana yang paling efisien dapat dijawab berdasarkan keragaman penduga dari masing-masing metode. Metode yang secara relatif memberikan ragam penduga atau ragam error yang lebih kecil dipandang sebagai metode yang lebih efisien.

Pada dasarnya, hasil produktivitas plot dari setiap metode dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \epsilon_{ij} ; i=1,2,\dots,16$$

dimana: y_{ij} = produktivitas pada petani ke-i dan ulangan ke-j

τ_i = pengaruh petani ke-i

ϵ_{ij} = error pada petani ke-i dan ulangan ke-j.

Dengan menggunakan model di atas, diperoleh hasil analisis ragam untuk masing-masing metode tersebut sebagai berikut:

Analisis Ragam untuk metode RC-10x10

Sumber	DB	JK	KT	F	P
Petani	15	2021.2	134.7	12.43	0.000
Galat	16	173.4	10.8		
Total	31	2194.6			

Analisis Ragam untuk metode RC-5x5

Sumber	DB	JK	KT	F	P
Petani	15	3000.0	200.0	12.20	0.000
Galat	16	262.2	16.4		
Total	31	3262.3			

Analisis Ragam untuk metode UB-2.5x2.5

Sumber	DB	JK	KT	F	P
Petani	15	2319.5	154.6	5.23	0.001
Galat	16	473.4	29.6		
Total	31	2792.9			

Dari analisis ragam di atas diperoleh ragam galat (MSE) bagi metode RC-10x10 sebesar 10.8, metode RC-5x5 sebesar 16.4, dan metode UB-2.5x2.5 sebesar 29.6. Metode RC-10x10 wajar memberikan nilai MSE terkecil karena metode ini membutuhkan plot terluas, sedangkan metode RC-5x5 memberikan nilai MSE yang lebih kecil daripada metode UB-2.5x2.5 walaupun luasan plot metode UB-2.5x2.5 umumnya lebih besar daripada metode RC-5x5.

Dengan mengambil metode RC-10x10 sebagai dasar pembandingan (karena membutuhkan plot terluas), maka pembandingan nilai ragam error kedua metode yang

lain terhadap ragam error metode RC-10x10 dapat dilakukan menggunakan uji-F dengan hipotesis sebagai berikut:

1. Uji terhadap keefektifan metode RC-5x5

$$H_0: \sigma^2_{10 \times 10} = \sigma^2_{5 \times 5} \text{ lawan } H_1: \sigma^2_{10 \times 10} < \sigma^2_{5 \times 5}$$

2. Uji terhadap keefektifan metode UB-2.5x2.5

$$H_0: \sigma^2_{10 \times 10} = \sigma^2_{2.5 \times 2.5} \text{ lawan } H_1: \sigma^2_{10 \times 10} < \sigma^2_{2.5 \times 2.5}$$

Pengujian ke-1 menghasilkan F-hitung sebesar 1.519 dengan nilai-p sebesar 0.206. Hasil ini mengindikasikan bahwa ragam galat metode RC-10x10 dengan RC-5x5 tidak berbeda nyata pada taraf 5%. Karena metode RC-5x5 membutuhkan luas plot yang lebih kecil daripada metode RC-10x10 maka metode RC-5x5 dipandang lebih efisien daripada metode RC-10x10. Sedangkan pengujian ke-2 menghasilkan F-hitung sebesar 2.741 dengan nilai-p sebesar 0.026. Hasil ini mengindikasikan bahwa ragam error metode RC-10x10 nyata lebih kecil (pada taraf nyata 5%) daripada metode UB-2.5x2.5, sehingga metode RC-10x10 masih dipandang lebih baik daripada metode UB-2.5x2.5.

Hasil wawancara dengan para mantri tani dan pengamatan langsung yang dilakukan peneliti di lapangan menunjukkan bahwa penurunan luas plot dari metode RC-10x10 ke metode RC-5x5 cukup signifikan menurunkan kesulitan teknis, baik pada saat penentuan plot contoh maupun pada saat pengukuran hasil panen. Dengan demikian, berdasarkan hasil kedua pengujian tersebut di atas dan pertimbangan teknis ini dapat disimpulkan bahwa metode RC-5x5 merupakan metode yang paling baik dan efisien dibandingkan dengan kedua metode lainnya.

2.7. Ujicoba Penentuan Ukuran Petak Optimum Tahun 2004

Ujicoba untuk penentuan ukuran petak optimum juga dilaksanakan pada tahun 2004. Ujicoba tersebut dilakukan untuk membandingkan metode rumpun counting 5 x 5 rumpun (RC-5x5) dengan metode satu baris yang berukuran 10 rumpun (BS-10r). Perbandingan kedua metode ini didasari oleh dua hal: (1) Metode RC-5x5 merupakan metode yang dipandang paling baik berdasarkan hasil ujicoba tahun 2003, (2) Metode BS-10r merupakan metode yang sudah digunakan oleh beberapa negara di Asia Tenggara, misalnya Thailand.

Komoditas yang menjadi objek ujicoba adalah kentang, bawang merah, dan tomat, tetapi karena alasan kelengkapan dan kualitas data maka tulisan ini hanya akan membahas hasil ujicoba komoditas kentang. Ujicoba tersebut mengambil lokasi sentra produksi kentang, tomat dan bawang merah pada lima kabupaten di wilayah propinsi Jawa Barat, yaitu Kabupaten Bandung, Kabupaten Garut, Kabupaten Majalengka, Kabupaten Sumedang, dan Kabupaten Cirebon. Akan tetapi untuk komoditas kentang hanya diuji cobakan di tiga kabupaten saja, yaitu Kabupaten Bandung, Kabupaten Garut, dan Kabupaten Majalengka.

Pada setiap kabupaten ditetapkan sebanyak 40 plot (kecuali kabupaten Majalengka hanya dialokasikan 30 plot). Penentuan jumlah plot di setiap kecamatan dan desa, serta penentuan dusun, petani, dan petak lahan contoh mengikuti tatacara yang sudah dijelaskan pada Sub Bab 2.2.

Dari setiap petak lahan contoh ditentukan secara acak letak plot untuk metode RC-5x5 dan letak plot metode BS-50r, kemudian diamati hasil produksi dan luasan plotnya. Hasil uji-t berpasangan terhadap rata-rata produktivitas kedua metode tersebut dengan hipotesis seperti pada sub bab 5.2 adalah sebagai berikut:

Hasil uji metode RC-5x5 dengan BS-10r di kabupaten Bandung

Metode	N	Rataan	StDev	Galat baku
RC-5x5	40	30.43	8.26	1.31
BS-10r	40	29.50	9.13	1.44
Beda	40	0.93	3.59	0.57

T-hitung = 1.63 dan Nilai-P = 0.110

Hasil uji metode RC-5x5 dengan BS-10r di kabupaten Garut

Metode	N	Rataan	StDev	Galat baku
RC-5x5	40	27.33	13.18	2.08
BS-10r	40	26.95	14.56	2.30
Beda	40	0.38	6.59	1.04

T-hitung = 0.37 dan Nilai-P = 0.716

Hasil uji metode RC-5x5 dengan BS-10r di kabupaten Majalengka

Metode	N	Rataan	StDev	Galat baku
RC-5x5	30	31.80	11.80	2.15
BS-10r	30	28.95	14.79	2.70
Beda	30	2.85	9.58	1.75

T-hitung = 1.63 dan Nilai-P = 0.115

Dari ketiga hasil pengujian di atas dapat disimpulkan bahwa rataan produktivitas yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut tidak berbeda nyata. Hal ini mengindikasikan bahwa tidak ada kecurigaan adanya bias dalam pengukuran metode BS-10r dibandingkan dengan metode RC-5x5, walaupun ada kecenderungan rataan produktivitas metode RC-5x5 lebih besar daripada metode BS-10r.

Tabel 3 Pengujian kesamaan ragam rataan produktivitas yang dihasilkan metode RC-10x10 dengan BS-10r

Kabupaten	Metode	Galat baku	F	Nilai-p
Bandung	RC-5x5	1.31	1.22	0.2688
	BS-10r	1.44		
Garut	RC-5x5	2.08	1.22	0.2688
	BS-10r	2.30		
Majalengka	RC-5x5	2.15	1.57	0.1152
	BS-10r	2.70		

Dari ketiga tabel di atas juga terlihat bahwa secara umum galat baku (SE Mean) yang dihasilkan oleh metode RC-5x5 lebih kecil daripada BS-10r. Hal ini wajar karena metode RC-5x5 membutuhkan luas plot yang lebih besar daripada metode BS-10r. Namun, kalau keragaman tersebut diuji (lihat Tabel 3) ternyata keduanya tidak memberikan perbedaan yang nyata. Hal ini berarti bahwa ketelitian yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut dapat dikatakan relatif sama. Oleh karena itu, metode BS-10r dapat dijadikan metode alternatif yang cukup baik bagi metode RC-5x5.

Namun demikian untuk menilai metode manakah yang lebih baik dari kedua metode tersebut perlu mendapat kajian yang lebih mendalam. Yang jelas, metode RC-5x5 memberikan keragaman yang cenderung lebih kecil daripada metode BS-10r, sedangkan metode BS-10r dipandang lebih praktis dan membutuhkan luasan yang lebih kecil daripada metode RC-5x5, walaupun nilai tambah kepraktisan metode RC-5x5 ke metode BS-10r tidak sebesar nilai tambah kepraktisan metode RC-10x10 ke metode RC-5x5. Di sisi lain, uji coba yang telah dilakukan ini belum mencakup lahan-lahan relatif sempit dan jarak tanam yang cenderung tidak sama, seperti di daerah-daerah puncak/lereng pegunungan.

Pada lahan yang sempit, sering dijumpai jumlah baris tidak mencukupi untuk membuat plot 5x5 rumpun, sehingga metode BS-10r mungkin lebih sesuai. Tetapi tidak



jarang juga dijumpai jarak tanam juga tidak sama, kadang-kadang jarak antar baris menyempit mengikuti bentuk lahan, sehingga penggunaan metode BS-10r dapat memberikan hasil produktivitas yang berbias atau ragam yang besar. Oleh karena itu, jika luasan petak contoh cukup untuk menerapkan plot 5x5 rumpun, metode RC-5x5 nampaknya akan memberikan hasil yang lebih stabil dibandingkan dengan metode BS-10r.

© Hak cipta milik IPB (Institut Pertanian Bogor)

Bogor Agricultural University

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

III. EVALUASI METODE PENARIKAN CONTOH PADA PENDUGAAN PRODUKTIVITAS KOMODITAS HORTIKULTURA

3.1. Gambaran Umum Metode Penarikan Contoh

Penarikan contoh atau *sampling* merupakan suatu proses inferensi mengenai keseluruhan (populasi) berdasarkan analisis sebagian (contoh) dari populasi tersebut (Som, 1996). Secara garis besar, metode penarikan contoh digolongkan menjadi dua kelompok, yaitu penarikan contoh berpeluang (*probability sampling*) dan penarikan contoh tak berpeluang (*nonprobability sampling*). Pada *probability sampling*, penentuan contoh didasarkan pada kaidah peluang, sedangkan penentuan contoh pada *nonprobability sampling* tidak didasarkan pada kaidah peluang (Levy & Lemeshow, 1999).

Probability sampling memiliki sifat bahwa setiap unsur di dalam populasi diketahui, dan memiliki peluang yang tidak nol untuk terpilih menjadi contoh. Karena peluang setiap unsur populasi diketahui, maka penduga tak bias bagi parameter populasi merupakan kombinasi linear dari observasi yang dicerminkan oleh data contoh. Di sisi lain, standard error dari penduganya juga dapat diduga dengan catatan momen kedua dari sebaran peluang yang diketahui (Levy & Lemeshow, 1999).

Metode yang paling umum yang tergolong dalam *nonprobability sampling* adalah *purposive* atau *judgemental sampling*. Metode ini lebih banyak diterapkan pada bidang-bidang sosial dan ekonomi dimana metode *probability sampling* tidak praktis bahkan tidak mungkin digunakan. Pada *nonprobability sampling*, contoh yang diambil diupayakan sejauh mungkin mewakili populasi. Namun demikian, karena peluang setiap unsur populasi tidak diketahui, maka ketakbiasan penduganya tidak dapat dinilai. Oleh karena itu, untuk penelitian yang orientasi utamanya pada pendugaan parameter populasi, metode *probability sampling* lebih disarankan (Mendenhall *et al.*, 1971).

Dalam *probability sampling*, terdapat beberapa metode yang dapat digunakan, diantaranya adalah: penarikan contoh acak sederhana (*simple random sampling*), penarikan contoh acak berlapis (*stratified random sampling*), penarikan contoh sistematis (*systematic random sampling*), dan penarikan contoh gerombol (*cluster sampling*). Semua metode penarikan contoh kategori ini (*probability sampling*)

mensyaratkan adanya kerangka contoh (*frame sampling*) yang memuat semua daftar objek yang akan dipilih.

Penarikan contoh acak sederhana sesuai untuk keadaan dimana keragaman nilai unsur populasi relatif kecil dan tidak terdapat pola pengelompokan atau strata tertentu. Penarikan contoh acak berlapis sesuai untuk keadaan dimana unsur populasi memiliki pola pengelompokan atau strata tertentu. Metode penarikan contoh sistematis pada umumnya diterapkan pada populasi yang terurut dan berukuran besar. Penarikan contoh gerombol sesuai untuk kondisi dimana biaya untuk memperoleh kerangka contoh yang mencakup seluruh unsur populasi sangat besar atau jika biaya untuk memperoleh observasi akan meningkat sejalan dengan jarak unsur populasi yang semakin besar (Mendenhall *et al.*, 1971).

Disamping keempat metode penarikan contoh di atas masih ada beberapa metode lain yang pada umumnya merupakan modifikasi, pengembangan, atau perpaduan dari keempatnya. Salah satu diantaranya adalah penarikan contoh multi tahap (*multistage sampling*). Pada setiap tahap dalam *multistage sampling*, dapat menerapkan metode penarikan contoh yang berbeda. *Multistage sampling* digunakan pada keadaan dimana kerangka contoh yang memuat seluruh objek survei tidak tersedia pada taraf dimana kita harus melakukan pendugaan, tetapi tersedia pada level di bawahnya.

Metode penarikan contoh mana yang seharusnya dipilih tentu saja yang sesuai dengan kasus yang dihadapi dan pada tingkat ketelitian yang sama membutuhkan biaya yang paling kecil (Mendenhall *et al.*, 1971).

Salah satu masalah yang paling penting di dalam desain penarikan contoh adalah seberapa besar ukuran contoh yang dibutuhkan untuk memperoleh penduga yang cukup terandal (*reliable*) sesuai dengan tujuan survei. Pada umumnya, semakin besar ukuran contoh, semakin terandal hasil pendugaannya. Sedangkan keabsahan (*validity*) merupakan fungsi dari proses pengukuran daripada ukuran contoh. Untuk meningkatkan validitas memerlukan perbaikan dalam proses pengukuran (Levy and Lemeshow, 1999).

Jika tidak ada kesalahan pengukuran (*measurement error*), keterandalan suatu penduga dicerminkan oleh ragam atau *standard error* dari penduga tersebut, semakin kecil nilai ragam atau *standard error* semakin terandal penduga tersebut.

Pada penarikan contoh acak sederhana, ragam penduga rata-rata $V(\bar{x})$ didefinisikan sebagai berikut:

$$V(\bar{x}) = \frac{s^2}{n} \left(\frac{N-n}{N-1} \right)$$

dengan N =ukuran populasi, n =ukuran contoh, dan s^2 =ragam contoh.

Ukuran contoh minimum (n) yang dibutuhkan untuk menduga μ pada penarikan contoh acak sederhana dapat diaproksimasi dengan rumus:

$$n = \frac{Z^2 V_x^2}{e^2}$$

dimana:

Z = nilai tabel normal baku ($Z=1.96$ untuk selang kepercayaan 95%)

$$V_x^2 = \frac{S_x^2}{X^2}$$

e = batas perbedaan nilai dugaan dengan 'nilai sebenarnya' (ditentukan oleh pengguna).

(Levy & Lemeshow, 1999).

Berdasarkan rumus penentuan ukuran contoh optimum di atas terlihat bahwa besarnya ukuran contoh tergantung dari tingkat ketelitian yang diinginkan yang terungkap dalam nilai Z atau α dan nilai e . Bentuk lain dari nilai e adalah nilai RSE (*relatif standard error*) yang besarnya didefinisikan sebagai berikut:

$$RSE = \frac{S_{\bar{x}}}{\bar{X}} \times 100\%$$

Pada kebanyakan survei, ukuran contoh yang diambil yang dianggap memiliki ketelitian cukup tinggi berpatokan pada nilai $\alpha=5\%$ dan nilai $RSE=5\%$.

3.2. Penarikan Contoh Tahap Ganda (*Multi Stage Sampling*)

Penarikan contoh tahap ganda sangat umum digunakan pada survei-survei yang sudah melembaga dan reguler, yang sangat umum dilakukan berbagai negara (Verma, 2000).

Penarikan contoh dua tahap (*two-stage sampling*), dimana pada masing-masing tahap menggunakan metode penarikan contoh acak gerombol, penduga total dan ragamnya adalah sebagai berikut (Levy & Lemeshow, 1999):

$$\hat{Y} = \frac{M}{m} \sum_{i=1}^m \frac{N_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} \text{ dan}$$

$$V(\hat{Y}) = \left(\frac{M^2}{m}\right) S_1^2 \left(\frac{M-m}{M-1}\right) + \left(\frac{N^2}{n}\right) S_2^2 \left(\frac{\bar{N}-\bar{n}}{\bar{N}-1}\right) \dots\dots\dots (3.1)$$

dengan:

M = jumlah gerombol populasi

m = jumlah gerombol contoh

\bar{N} = rata-rata jumlah unit senarai per gerombol dalam populasi

\bar{n} = rata-rata jumlah unit contoh per gerombol

$N = M\bar{N}$ = jumlah seluruh unit senarai dalam populasi

$n = m\bar{n}$ = jumlah seluruh unit senarai dalam contoh

y_{ij} = karakteristik pada unit senarai ke-j gerombol ke-i

S_1^2 = ragam antar gerombol yang didefinisikan sebagai:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^M (Y_i - \bar{Y})^2}{M}$$

S_2^2 = ragam dalam gerombol yang didefinisikan sebagai:

$$S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^{\bar{N}} (Y_{ij} - \bar{Y}_i)^2}{N}$$

Secara umum, pada penarikan contoh r-tahap, ragam dari penduga total dapat dirumuskan sebagai berikut (Murthy, 1967):

$$V(\hat{Y}) = V_1 E_2 E_3 \dots E_r (\hat{Y}) + E_1 V_2 E_3 \dots E_r (\hat{Y}) + \dots + E_1 E_2 E_3 \dots V_r (\hat{Y})$$

dengan E = nilai harapan dan V = *variance* atau ragam, sedangkan indeksnya menunjukkan urutan.

Sebagai contoh, untuk penarikan contoh dua tahap yang masing-masing tahap menggunakan penarikan contoh acak sederhana, ragam bagi penduga totalnya adalah:

$$\begin{aligned}
 V(\hat{Y}) &= V_1 E_2(\hat{Y}) + E_1 V_2(\hat{Y}) \\
 &= V_1 \left(\frac{M}{m} \sum_{i=1}^m \hat{Y}_i \right) + E_1 \left(\frac{M^2}{m^2} \sum_{i=1}^m \frac{N_i^2}{n_i^2} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbf{s}_2^2 (1 - f_2) \right) \\
 &= \frac{M^2}{m^2} m \mathbf{s}_1^2 (1 - f_1) + \frac{M^2 \bar{N}^2}{m \bar{n}} \mathbf{s}_2^2 (1 - f_2) \\
 V(\hat{Y}) &= \frac{M^2}{m} \mathbf{s}_1^2 (1 - f_1) + \frac{N^2}{n} \mathbf{s}_2^2 (1 - f_2) \dots\dots\dots (3.2)
 \end{aligned}$$

dengan:

$f_1 = m/M =$ fraksi contoh pada tahap-1

$f_2 = n/N =$ rata-rata fraksi contoh pada tahap 2

Penarikan contoh multi-tahap ini umum digunakan pada pelaksanaan survey-survey, terutama yang satuan percontohan terkecilnya adalah rumah tangga (Verma, 2000). Salah satu contoh negara yang menerapkan metode percontohan empat tahap pada survey pertanian adalah Rusia (Vasilevskaya, 1998).

3.3. Model Penarikan Contoh pada Pendugaan Produktivitas Komoditas Hortikultura

Berdasarkan diagram penentuan petak ubinan yang telah dibahas pada Bab 2, terlihat bahwa metode penarikan contoh yang diterapkan adalah metode penarikan contoh bertahap. Pada tahap pertama, harus dilakukan pemilihan terhadap kabupaten contoh untuk mewakili karakteristik propinsi.

Penentuan kabupaten contoh dapat menggunakan penarikan contoh acak gerombol (*cluster sampling*) atau penarikan contoh acak berlapis (*stratified random sampling*). Pada penarikan contoh acak gerombol, kabupaten-kabupaten dipandang sebagai unit-unit contoh biasa yang tidak memiliki pola strata tertentu. Sedangkan pada penarikan contoh acak berlapis, kabupaten-kabupaten yang ada seolah-olah memiliki pola strata tertentu, misalnya: kabupaten dapat distrata berdasarkan kabupaten sentra dan kabupaten non sentra, dimana kabupaten sentra diduga memberikan produktivitas yang lebih tinggi daripada kabupaten non sentra.

Tahap berikutnya adalah menentukan kecamatan contoh pada kabupaten terpilih atau kabupaten contoh. Penentuan kecamatan sebenarnya tidak dilakukan secara acak tetapi hanya ditentukan berdasarkan *share* luas tanam pada masing-masing kecamatan. Dengan perkataan lain, kita hanya mengalokasikan jumlah contoh (plot) kepada kecamatan-kecamatan yang ada secara proporsional berdasarkan luas tanam pada masing-masing kecamatan. Kecamatan yang memiliki luas tanam yang lebih besar akan memperoleh jumlah contoh (plot) yang lebih banyak. Dengan demikian, pada tahap ini sebenarnya tidak ada penerapan teknik percontohan, tetapi hanya menyangkut alokasi contoh (plot) saja kepada setiap kecamatan berdasarkan proporsi luas tanam setiap kecamatan terhadap kabupaten.

Tahap selanjutnya adalah menentukan desa contoh pada kecamatan terpilih. Sama dengan penentuan kecamatan contoh, penentuan desa contoh juga berdasarkan *share* luas tanam pada masing-masing desa, sehingga pada tahap ini juga tidak ada penerapan teknik percontohan tetapi hanya menyangkut alokasi contoh (plot) saja kepada setiap desa berdasarkan *share* luas tanam setiap desa terhadap kecamatan.

Pada setiap desa terpilih selanjutnya dilakukan pendaftaran/listing dusun atau blok lahan dan jumlah petani hortikultura pada setiap dusun/blok lahan. Listing ini perlu dilakukan karena kita perlu kerangka contoh (*frame sample*) untuk menentukan dusun/blok lahan contoh secara acak, sedangkan daftar dusun/blok lahan yang menanam komoditas hortikultura yang dimaksud pada triwulan pengumpulan data, umumnya tidak tersedia. Jadi pada tahap ini kita harus menerapkan metode penarikan contoh untuk menentukan dusun/blok lahan contoh. Penarikan contoh yang dapat digunakan adalah penarikan contoh acak sederhana, atau penarikan contoh acak sederhana yang diboboti dengan jumlah petani pada setiap dusun/blok lahan.

Pada setiap dusun/blok lahan terpilih, selanjutnya ditentukan petani contoh secara acak. Metode penarikan contoh yang dapat diterapkan adalah metode penarikan contoh acak sederhana, karena kerangka contoh yang dapat tersedia hanya berupa daftar petani hortikultura yang ada pada dusun tersebut. Selanjutnya, pada petani terpilih akan dapat diperoleh informasi berapa jumlah dan luas petakan yang ditanami komoditas hortikultura yang dimaksud. Jika petani terpilih tersebut menanam lebih dari satu petak, maka harus dilakukan pemilihan satu petak saja secara acak menggunakan penarikan

contoh acak sederhana. Pada petak terpilih itulah kemudian dilakukan pemilihan petak pengamatan (pencacahan rumpun) yang pemilihannya harus dilakukan secara acak.

Apabila prosedur yang diterapkan dibatasi untuk melakukan pendugaan produksi/produktivitas tingkat kabupaten, maka prosedur sampling yang dijelaskan di atas baru menerapkan pemilihan unit contoh (sampling) pada saat melakukan pemilihan dusun. Dengan demikian kaidah sampling sesungguhnya baru diterapkan pada saat pemilihan dusun, pemilihan petani, pemilihan petak, dan pemilihan plot. Atau dengan perkataan lain, sampling yang diterapkan sebenarnya hanya terdiri dari empat tahap saja. Dengan demikian, model produktivitas plot yang menggambarkan produktivitas desa tertentu dapat dituliskan sebagai:

$$Y_{ijkl} = m + a_i + b_{j(i)} + d_{k(ij)} + e_{ijkl} \dots\dots\dots (3.3)$$

dimana

- Y_{ijkl} = Produktivitas plot pada dusun ke-i, petani ke-j, petak ke-k, plot ke-l
- a_i = Pengaruh dusun ke-i
- $b_{j(i)}$ = Pengaruh petani ke-j pada dusun ke-i
- $d_{k(ij)}$ = Pengaruh petak ke-k pada petani ke-j dan dusun ke-i
- e_{ijkl} = Galat pada plot ke-l, petak ke-k, petani ke-j dan dusun ke-i

3.4. Penduga Produksi dan Produktivitas

Dengan menggunakan kaidah yang diberikan oleh Murthy (1967), diperoleh penduga total produksi dan ragam total produksi tingkat desa sebagai berikut:

$$\hat{Y} = \frac{M}{m} \left(\sum_{i=1}^m \frac{N_i}{n_i} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \frac{P_j}{p_j} \left(\sum_{k=1}^{p_j} \frac{Q_k}{q_k} \left(\sum_{l=1}^{q_k} y_{ijkl} \right) \right) \right) \right)$$

dengan:

- M = luas total seluruh desa
- m = luas total dusun contoh
- N_i = luas dusun ke-i
- n_i = luas petani contoh pada dusun ke-i
- P_j = luas petani ke-j
- p_j = luas petak contoh pada petani ke-j

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Q_k = luas petak ke-k

q_k = luas plot contoh pada petak ke-k

y_{ijkl} = produksi pada dusun ke -i, petani ke-j, petak ke -k, plot ke-l

$$V(\hat{Y}) = V_1 E_2 E_3 E_4 (\hat{Y}) + E_1 V_2 E_3 E_4 (\hat{Y}) + E_1 E_2 V_3 E_4 (\hat{Y}) + E_1 E_2 E_3 V_4 (\hat{Y}) .. \quad (3.4)$$

dimana

$$V_1 E_2 E_3 E_4 (\hat{Y}) = \frac{M^2}{m} s_1^2 (1 - f_1)$$

$$E_1 V_2 E_3 E_4 (\hat{Y}) = \frac{M^2}{m} \frac{\bar{N}^2}{\bar{n}} s_2^2 (1 - f_2)$$

$$E_1 E_2 V_3 E_4 (\hat{Y}) = \frac{M^2}{m} \frac{\bar{N}^2}{\bar{n}} \frac{\bar{P}^2}{\bar{p}} s_3^2 (1 - f_3)$$

$$E_1 E_2 E_3 V_4 (\hat{Y}) = \frac{M^2}{m} \frac{\bar{N}^2}{\bar{n}} \frac{\bar{P}^2}{\bar{p}} \frac{\bar{Q}^2}{\bar{q}} s_4^2 (1 - f_4)$$

dengan

$$f_1 = \frac{m}{M} = \text{fraksi luas total dusun contoh terhadap luas desa}$$

$$f_2 = \frac{\bar{n}}{N} = \text{fraksi rata-rata luas total petani contoh terhadap rata-rata luas dusun}$$

$$f_3 = \frac{\bar{p}}{P} = \text{fraksi rata-rata luas total petak contoh terhadap rata-rata luas petani}$$

$$f_4 = \frac{\bar{q}}{Q} = \text{fraksi rata-rata luas total plot contoh terhadap rata-rata luas petak}$$

s_1^2 = ragam produksi antar dusun

s_2^2 = ragam produksi antar petani

s_3^2 = ragam produksi antar petak

s_4^2 = ragam produksi antar plot

Sedangkan dugaan rata-rata dan ragam produktivitas bagi suatu desa ke-t dapat diperoleh dengan rumus sebagai berikut:

$$\bar{Y}_t = \frac{\hat{Y}_t}{L_t} \dots \dots \dots \quad (3.5)$$

dan

$$V(\bar{Y}_t) = \frac{V(\hat{Y}_t)}{L_t^2} \dots\dots\dots (3.6)$$

dimana \hat{Y}_t adalah dugaan total produksi desa ke-t, L_t adalah total luas panen desa ke-t, dan $V(\hat{Y}_t)$ adalah ragam bagi \hat{Y}_t .

Dengan tetap berpedoman bahwa penentuan jumlah plot pada level kecamatan dan desa proposional terhadap *share* luas panen, maka dugaan rataan dan ragam produktivitas pada tingkat kabupaten dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$\bar{Y} = \sum_{i=1}^r w_i \bar{Y}_i \dots\dots\dots (3.7)$$

dan

$$V(\bar{Y}) = \sum w_i^2 V(\bar{Y}_i) \dots\dots\dots (3.8)$$

dimana: $w_i = \frac{L_i}{\sum_{i=1}^r L_i}$

\bar{Y}_i = Penduga rataan produktivitas desa ke-i

$V(\bar{Y}_i)$ = Penduga ragam produktivitas desa ke-i

L_i = Total luas panen desa ke-i

r = Banyaknya desa pada kabupaten tersebut

Di dalam banyak praktek, penduga rataan dan ragam produktivitas desa ke-i didekati dengan rumus sederhana sebagai berikut:

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i} \quad \text{dan} \quad V(\bar{Y}_i) = \frac{s_i^2}{n_i} \dots\dots\dots (3.9)$$

Dimana:

$$s_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2}{n_i - 1}$$

y_{ij} = Produktivitas plot ke -j pada desa ke-i

n_i = jumlah plot contoh pada desa ke-i

Sedangkan penduga rata-rata produktivitas tingkat kabupaten dihitung menggunakan persamaan (3.7) dan (3.8).

Pendekatan ini dapat dikatakan tidak tepat. Penduga rata-ratanya mungkin tidak bias asalkan jumlah plot pada suatu desa memang proporsional terhadap luas panen, tetapi penduga ragam rata-ratanya cenderung berbias ke bawah karena tidak memperhitungkan ragam pada setiap tahapan (*stage*).

3.5. Simulasi Komputer

Simulasi didefinisikan sebagai model matematis yang menggambarkan suatu perilaku sistem dalam sekuens waktu tertentu. Para peneliti manajemen menggunakan model simulasi dalam kaitannya dengan percobaan-percobaan yang dilakukannya. Dengan mempelajari perilaku model tersebut, para peneliti dapat membuat kesimpulan tentang berbagai perilaku yang mungkin terjadi di dunia nyata (Watson & Blackstone, 1989).

Dengan mulai maraknya penggunaan komputer dalam dunia bisnis pada tahun 1950-an, simulasi berkembang sebagai alat manajemen. Seiring dengan perkembangan teknologi komputer yang demikian pesat, simulasi menjadi semakin mudah dan banyak digunakan di berbagai bidang. Beberapa keuntungan penggunaan simulasi adalah (Render & Stair, 2000): (1) relatif langsung ke sasaran dan fleksibel, (2) dapat digunakan untuk menganalisis suatu masalah yang besar dan kompleks, yang mungkin dengan model analisis kuantitatif konvensional tidak dapat dilakukan, (3) dapat menjawab berbagai pilihan alternatif dari berbagai kondisi yang berbeda, (4) simulasi dapat bebas terhadap pengaruh sistem yang mungkin ada dalam dunia nyata, (5) dengan simulasi memungkinkan menelaah secara interaktif pengaruh unsur atau peubah secara individual sehingga dapat diketahui unsur atau peubah mana yang penting, (6) dengan simulasi jawaban dapat diperoleh dalam waktu yang sangat singkat, dan (7) simulasi memungkinkan memasukkan berbagai faktor yang kompleks yang terjadi di dunia nyata, yang tidak memungkinkan menggunakan model-model analisis konvensional.

Tabel 4 Algoritma simulai

1	Tentukan nilai awal
	Luas panen & produktivitas kabupaten, luas masing-masing kecamatan & masing-masing desa, jumlah plot ubinan, ukuran plot ubinan, jarak tanam, rataan dan standard deviasi luas & produktivitas masing-masing level
2	Tentukan jumlah contoh (berdasarkan share luas panen) untuk setiap:
	* Kecamatan
	* Desa
3	Bangkitkan data produktivitas kecamatan
	* $Prodv \rightarrow \mu_p, \sigma_k$ (Total Produksi Kec = Produksi Kab)
4	Bangkitkan data produktivitas desa
	* $Prodv \rightarrow \mu_k, \sigma_d$ (Total Produksi Des = Produksi Kec)
5	Bangkitkan data dusun
	* Luas $\rightarrow \mu_L, \sigma_L$ (Total Luas \leq Luas Des)
	* $Prodv \rightarrow \mu_d, \sigma_d$ (Total Produksi Dus \leq Produksi Des)
6	Tentukan dusun contoh pada masing-masing desa sesuai dengan jumlah contohnya
7	Pilih petani pada dusun contoh, dengan membangkitkan data:
	* Luas $\rightarrow \mu_{L1}, \sigma_{L1}$ (Luas \leq Luas Dusun)
	* $Prodv \rightarrow \mu_{P1}, \sigma_{P1}$ (μ_{P1} =produktivitas dusun contoh ybs.)
8	Pilih petak pada petani contoh, dengan membangkitkan data:
	* Luas $\rightarrow \mu_{L2}, \sigma_{L2}$ (Luas \leq Luas Petani)
	* $Prodv \rightarrow \mu_{P2}, \sigma_{P2}$ (μ_{P2} =produktivitas petani contoh ybs.)
9	Pilih plot pada petak contoh, dengan membangkitkan data:
	* Luas $\rightarrow \mu_{L3}, \sigma_{L3}$ (Luas = Luas Ubinan)
	* $Prodv \rightarrow \mu_{P3}, \sigma_{P3}$ (μ_{P3} =produktivitas petak contoh ybs.)
10	Hitung produktivitas plot ubinan
11	Lakukan nomor 5-10 sebanyak jumlah plot ubinan yang diinginkan
12	Hitung rataan produktivitas tingkat kabupaten

Penggunaan simulasi komputer dalam sub bab ini ditujukan untuk menggambarkan performans dugaan yang diperoleh dari metode percontohan untuk pendugaan produktivitas hortikultura yang telah dijelaskan pada sub bab sebelumnya. Oleh karena itu, simulasi yang dilakukan menggunakan algoritma sesuai prosedur percontohan tersebut (lihat Tabel 4). Supaya hasil dari simulasi tersebut dapat mencerminkan keadaan lapang yang sebenarnya, parameter dalam simulasi tersebut seyogyanya dapat menggambarkan kondisi riil, sehingga akan lebih baik jika parameter-parameter tersebut dibangun berdasarkan data yang diperoleh dari lapang. Data tersebut dikumpulkan melalui kerjasama dengan Tim Ujicoba dari Pusdatin Deptan.

Parameter yang dibutuhkan untuk membangkitkan data dalam simulasi ini adalah nilai tengah dan ragam produktivitas pada tingkat kabupaten, kecamatan, desa, dusun, petani, petak, dan plot. Besarnya luas panen dari tingkat kabupaten sampai dengan desa ditentukan secara subyektif (sesuai dengan disain metode penarikan contohnya) seperti yang disajikan pada Tabel 5. Luas panen pada tingkat dusun sampai dengan petak dibangkitkan melalui simulasi, sedangkan luas plot ditetapkan dan dianggap sama.

Tabel 5 Skenario luas panen kecamatan dan desa

Kec	Luas	Desa1	Desa2	Desa3
1	250	90	80	80
2	250	90	80	80
3	250	90	80	80

Catatan: Luas Panen Kabupaten = 750

Pembangkitan data dimulai pada level kecamatan, dengan membangkitkan produktivitas pada kecamatan ke-1 dan ke-2. Sedangkan produktivitas kecamatan ke-3 diperoleh melalui persyaratan bahwa total produksi dari ketiga kecamatan tersebut sama dengan produksi tingkat kabupaten. Tahap berikutnya adalah pembangkitan data produktivitas desa yang tersarang pada kecamatannya. Parameter produktivitas desa menggunakan produktivitas kecamatannya masing-masing, sedangkan parameter keragaman diperoleh/diprediksi dari data lapangan.

Pada level dusun sampai dengan plot juga dilakukan pembangkitan data luas panen dan produktivitas. Parameter nilai tengah dan ragam luas panen, serta ragam produktivitas menggunakan data yang diperoleh dari lapang, sedangkan parameter nilai

tengah produktivitas menggunakan produktivitas level di atasnya. Nilai parameter dari tingkat kabupaten sampai dengan plot disajikan pada Tabel 6. Pembangkitan data dilakukan sebanyak 1000 kali.

Tabel 6 Nilai parameter produktivitas

Parameter	Tingkat						
	Kab	Kec	Desa	Dusun	Petani	Petak	Plot
Produktivitas							
Nilai tengah	25	*	*	*	*	*	*
Std	4	4	3	3	2	2	4
Luas Panen							
Nilai tengah	-	-	-	27	0.1	0.04	**
Std	-	-	-	9	0.03	0.01	-

* Menggunakan hasil bangkitan satu tingkat di atasnya

** Ditetapkan sama dengan 5 baris x 0.25 cm x 5 kolom x 0.6 cm = 3.75 cm²

- Tidak ada parameter bangkitan/tidak membangkitkan data, nilainya ditetapkan di Tabel 5.

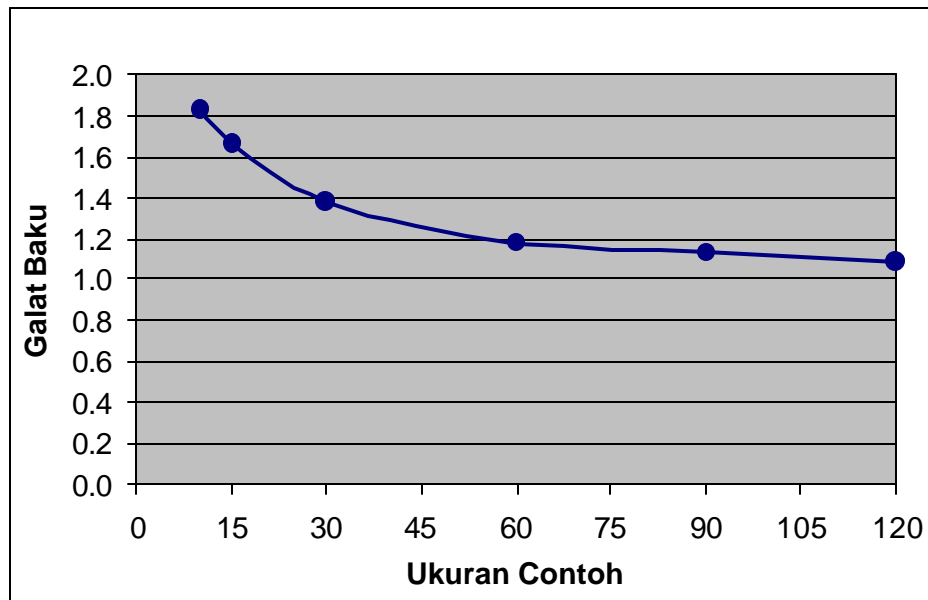
Perilaku galat baku (*standard error*) yang dihasilkan oleh suatu metode pada umumnya dipengaruhi oleh ukuran contoh. Oleh karena itu dalam penelitian ini dicoba dilakukan simulasi dengan ukuran contoh (jumlah plot) yang berbeda-beda, yaitu 10, 15, 30, 60, 90, dan 120.

3.6. Hasil Simulasi

Nilai galat baku dugaan produktivitas pada berbagai ukuran contoh disajikan pada Gambar 3. Berdasarkan gambar tersebut terlihat bahwa semakin besar ukuran contoh maka nilai galat baku menjadi semakin kecil yang kemudian konvergen ke suatu nilai tertentu.

Berdasarkan kecenderungan nilai standard error yang disajikan pada Gambar 3 dapat diperkirakan bahwa untuk mendapatkan nilai dugaan yang memiliki nilai galat baku relatif (RSE) sebesar 5%, metode percontohan tersebut membutuhkan ukuran contoh kira-kira sebesar 45 (nilai ukuran contoh dengan galat baku = 1.25).

Berdasarkan sebaran nilai dugaan rataannya terlihat indikasi bahwa metode yang dicobakan menghasilkan nilai dugaan yang tak berbias terhadap nilai tengah populasi. Hal ini terlihat pada Gambar 4 yang menggambarkan sebaran nilai dugaan rataan pada ukuran contoh 10, 15, 30, 60, 90, dan 120, dengan pembangkitan data sebanyak 1000 kali, menghasilkan nilai dugaan rataan kira-kira sama dengan nilai tengah populasi ($\mu=25$).



Gambar 3 Nilai galat baku dari rataan produktivitas pada berbagai ukuran contoh

3.7. Penerapan

Pada sub bab ini akan dibahas tentang penerapan terhadap data yang diperoleh dari hasil uji coba penentuan produktivitas komoditas hortikultura yang telah dilakukan oleh Pusdatin Departemen Pertanian pada Tahun 2002 di Kabupaten Brebes. Jumlah plot contoh adalah 40 plot yang tersebar di dua kecamatan dan lima desa. Data yang dikumpulkan meliputi luas tanam, perkiraan produksi yang diperoleh dari wawancara dengan petani contoh, luas ubinan dan produksi ubinan. Data selengkapnya disajikan pada Tabel 7.

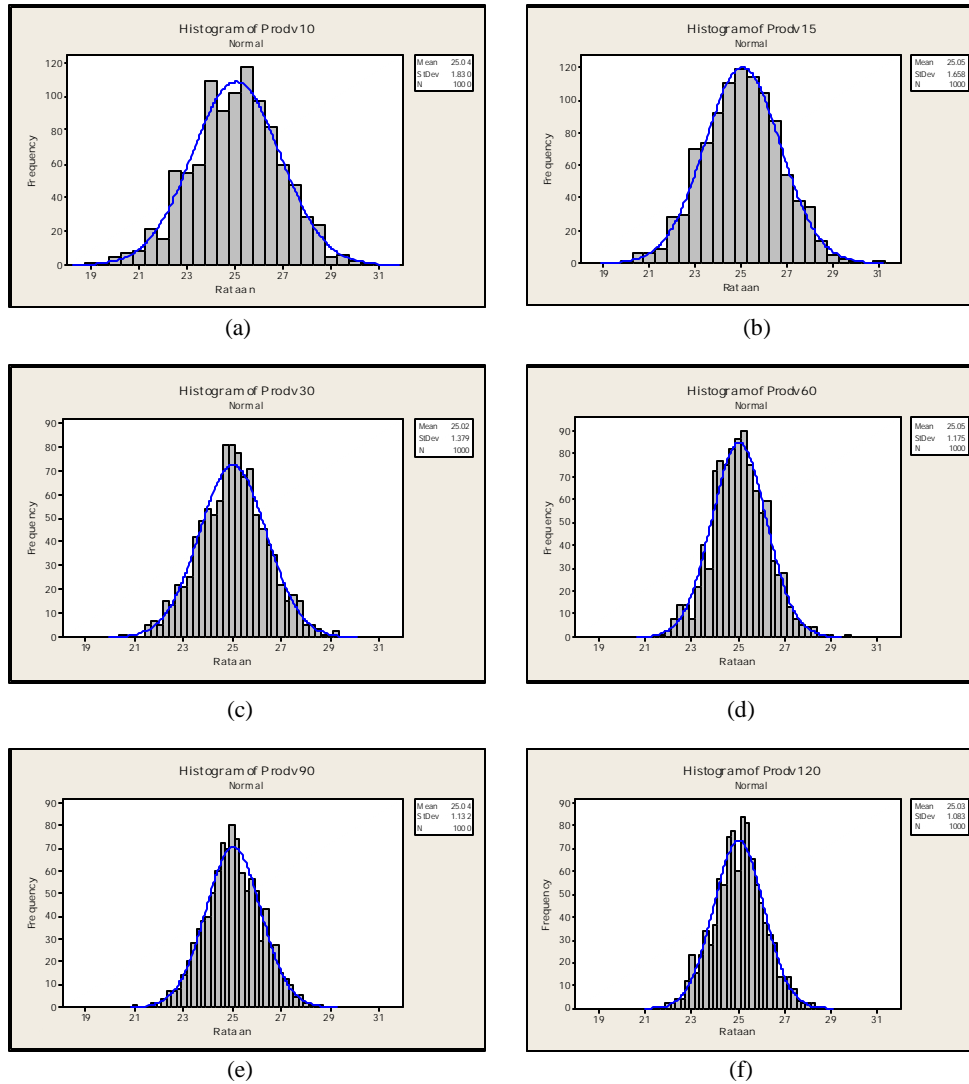
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



Gambar 4 Sebaran nilai rata-rata pada berbagai ukuran contoh: (a) 10, (b) 15, (c) 30, (d) 60, (e) 90, dan (f) 120

Disamping data tersebut di atas, dikumpulkan juga data perkiraan luas panen (SP 2002). Dari data perkiraan luas panen tersebut diperoleh informasi bahwa proporsi luas panen dari kelima desa contoh tersebut sebesar 0.1979 untuk desa Batursari, 0.1489 untuk desa Dawuhan, 0.1515 untuk desa Igirklanceng, 0.3305 untuk desa Pandansari, dan 0.1721 untuk desa Wanareja. Selanjutnya, nilai proporsi luas panen ini akan digunakan sebagai pembobot dalam menentukan produktivitas tingkat kabupaten.

Perkiraan nilai tengah produktivitas tingkat kabupaten untuk data Tabel 7 jika menggunakan persamaan (3.9) adalah sebesar 24.735 ton/hektar dengan galat baku

sebesar 0.463. Dengan menggunakan pendekatan sebaran normal diperoleh selang kepercayaan 95% bagi nilai tengah produktivitas tingkat kabupaten sebesar (24.134; 25.336). Sedangkan jika menggunakan pendekatan persamaan (3.4) diperoleh rata-rata produktivitas sebesar 24.734 dengan galat baku sebesar 1.083. Dengan pendekatan sebaran normal diperoleh selang kepercayaan 95% bagi nilai tengah produktivitas tingkat kabupaten sebesar (22.695; 26.775). Angka dugaan nilai tengah produktivitas ini jauh di atas hasil publikasi Direktorat Jenderal Bina Produksi Hortikultura dan BPS untuk propinsi Jawa Tengah, yaitu 15.37 ton/hektar (DirJen Bina Produksi Hortikultura, 2002). Angka publikasi tersebut tampaknya sama dengan hasil wawancara yaitu sebesar 15.841 ton/hektar.

Berdasarkan data yang disajikan pada Tabel 7 dapat dilihat bahwa secara umum produktivitas ubinan jauh lebih tinggi dibandingkan produktivitas hasil wawancara. Ada beberapa hal yang diduga menyebabkan perbedaan nilai ini, antara lain:

1. Adanya perbedaan pengertian luas pada kedua hasil pengukuran tersebut, dimana hasil ubinan pada dasarnya mengacu pada luas efektif (luas yang benar-benar dipanen) yang dicerminkan oleh luas plot ubinan, sedangkan hasil wawancara pada umumnya mengacu pada luas lahan yang umumnya lebih tinggi daripada luas efektif.
2. Petani umumnya menyampaikan hasil produksi kentang yang benar-benar “layak jual”, sedangkan kentang-kentang yang digunakan sebagai bibit seringkali tidak masuk dalam perhitungan. Hal inilah yang membuat perkiraan produksinya menjadi lebih rendah dari yang sebenarnya.
3. Dalam menjawab perkiraan produksi pada umumnya petani memilih bersikap merendah, sehingga seringkali memberikan perkiraan produksi yang lebih rendah dari yang sebenarnya.
4. Dalam menentukan plot ubinan tidak jarang petugas ‘bersama’ dengan petani cenderung ‘mengarahkan’ pada bagian lahan yang relatif memberikan produksi yang lebih baik, yang berakibat memberikan hasil produksi yang cenderung berbias ke atas.

Tabel 7 Data hasil ujicoba penentuan produktivitas kentang di kabupaten Brebes tahun 2002

No	Kecamatan	Desa	Dusun	Luas Tanam	Produksi Perkiraan	Produktivitas Perkiraan	Produktivitas Ubinan
1	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1750	3500	20.00	21.7
2	Paguyangan	Pandansari	Kaliki dang	925	2000	21.62	20.4
3	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	900	2000	22.22	22.6
4	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	625	1000	16.00	20.0
5	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1500	3000	20.00	22.7
6	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1000	2000	20.00	22.7
7	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1600	2000	12.50	23.6
8	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1620	2000	12.35	23.3
9	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	762	1500	19.69	21.5
10	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	1050	2500	23.81	18.2
11	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	2820	4500	15.96	21.4
12	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	765	1000	13.07	23.3
13	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	700	1000	14.29	21.5
14	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	622	900	14.47	25.3
15	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	368	530	14.40	22.8
16	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	566	875	15.46	26.0
17	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	374	550	14.71	24.6
18	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	243	400	16.46	25.0
19	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	370	530	14.32	22.1
20	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	344	500	14.53	25.6
21	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	730	1100	15.07	25.0
22	Sirampog	Dawuhan	Paingan	366	525	14.34	26.9
23	Sirampog	Dawuhan	Paingan	308	450	14.61	23.2
24	Sirampog	Dawuhan	Paingan	382	540	14.14	27.8
25	Sirampog	Dawuhan	Paingan	265	410	15.47	24.6
26	Sirampog	Dawuhan	Paingan	373	525	14.08	28.7
27	Sirampog	Dawuhan	Paingan	169	260	15.38	31.7
28	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	484	675	13.95	23.0
29	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	494	775	15.69	26.2
30	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	422	650	15.40	27.4
31	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	384	540	14.06	28.2
32	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	344	500	14.53	24.3
33	Sirampog	Igirklandeng	Igir Tengah	312	450	14.42	27.9
34	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	318	475	14.94	28.6
35	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	424	650	15.33	28.8
36	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	482	750	15.56	24.3
37	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	634	975	15.38	26.1
38	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	387	550	14.21	25.5
39	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	226	390	17.26	28.8
40	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	378	530	14.02	28.1



Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

- a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
- b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

IV. INFERENSIA UNTUK MODEL ACAK

4.1. Pendahuluan

Penerapan metode percontohan yang telah dibahas pada Bab 3, dengan berbagai keterbatasan yang ada, hanya mengambil satu dusun contoh untuk satu desa contoh, kemudian mengambil petani contoh dari dusun contoh sebanyak jumlah plot yang harus dialokasikan ke desa contoh bersangkutan. Dari setiap petani contoh hanya diambil satu petak contoh, dan pada setiap petak contoh hanya diambil satu plot contoh. Dengan penerapan metode percontohan seperti ini, penentuan ragam dugaan persamaan (3.4) menjadi tidak dapat dilakukan karena ragam pada setiap tahap (*stage*) tidak dapat ditentukan.

Penerapan model perarikan contoh seperti ini sebenarnya dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$y_{ij} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, a \text{ dan } j=1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (4.1)$$

dimana:

y_{ij} = respon (hasil ubinan) pada dusun ke- i , petani ke- j

\mathbf{m} = rata-rata umum

\mathbf{a}_i = pengaruh dusun ke- i

\mathbf{e}_{ij} = galat pada dusun ke- i , petani ke- j

Asumsi yang umum digunakan untuk model ini adalah antar \mathbf{e}_{ij} saling bebas dan menyebar normal dengan nilai tengah 0 dan ragam \mathbf{s}^2 . Sedangkan faktor dusun, karena merupakan contoh acak dari berbagai kemungkinan dusun yang ada, biasanya disebut sebagai faktor acak (*random factor*) dan diasumsikan: $\mathbf{a}_i \sim N(0, \mathbf{s}_a^2)$. Dengan asumsi ini bahwa \mathbf{a}_i bebas terhadap \mathbf{e}_{ij} maka ragam dari suatu observasi atau pengamatan menjadi:

$$V(y_{ij}) = \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2 .$$

Ragam \mathbf{s}_a^2 dan \mathbf{s}^2 disebut sebagai komponen ragam. Sedangkan model yang faktornya acak seperti ini disebut sebagai komponen ragam atau model pengaruh acak (Montgomery, 1991).

Kasus di atas akan lebih rumit jika pada satu petani dapat dilakukan pengambilan plot contoh lebih dari satu plot. Sehingga model (4.1) akan menjadi model tersarang (*nested*) sebagai berikut:

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{j(i)} + \mathbf{e}_{ijk}, \quad i=1, 2, \dots, a; j=1, 2, \dots, b; \text{ dan } k=1, 2, \dots, n_{ij} \dots\dots (4.2)$$

dimana:

y_{ijk} = respon (hasil plot) pada dusun ke- i , petani ke- j , dan plot ke- k

\mathbf{m} = rata-rata umum

\mathbf{a}_i = pengaruh dusun ke- i

$\mathbf{b}_{j(i)}$ = pengaruh petani ke- j pada dusun ke- i

\mathbf{e}_{ijk} = galat pada dusun ke- i , petani ke- j , dan plot ke- k .

Dengan asumsi \mathbf{a}_i , $\mathbf{b}_{j(i)}$ dan \mathbf{e}_{ij} saling bebas, maka untuk kasus model ini ragam dari suatu observasi atau pengamatan menjadi:

$$V(y_{ijk}) = \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

Asumsi yang berlaku sama dengan model (4.1) dengan tambahan asumsi untuk faktor petani adalah $\mathbf{b}_{j(i)} \sim N(0, \mathbf{s}_b^2)$. Untuk kasus dua faktor yang bersifat acak seperti ini, pendugaan parameter akan berfokus pada pendugaan terhadap \mathbf{m} dan komponen ragam \mathbf{s}_a^2 , \mathbf{s}_b^2 , dan \mathbf{s}^2 . Metode yang umum digunakan untuk menduga parameter-parameter ini adalah metode kuadrat terkecil (ANOVA) dan metode kemungkinan maksimum.

Pada bab ini akan dibahas tentang pendugaan parameter menggunakan metode kuadrat terkecil dan metode kemungkinan maksimum untuk kedua model di atas. Pembahasan akan diawali untuk kasus jumlah ulangan sama, kemudian dilanjutkan dengan kasus ulangan dan jumlah level faktor yang berbeda.

4.2. Pendugaan dengan Metode Kuadrat Terkecil

Model Acak Satu Faktor

Pendekatan metode kuadrat terkecil (analisis ragam, ANOVA) untuk model (4.1) beserta nilai harapan kuadrat tengahnya (E(KT)) untuk kasus jumlah ulangan sama disajikan pada Tabel 8 (Searle *et al.*, 1992).

Tabel 8 Analisis ragam untuk model acak satu faktor dengan ulangan sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
Á	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{n} - \frac{y_{..}^2}{an}$	$\frac{JKA}{a-1}$	$s^2 + ns_a^2$
Galat	a(n-1)	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{n}$	$\frac{JKG}{a(n-1)}$	s^2
Total	an-1	$\sum_i \sum_j y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{an}$		

Dari tabel analisis ragam Tabel 8 di atas dapat diperoleh penduga bagi ragam s^2 dan s_a^2 sebagai berikut:

$$\hat{s}^2 = KTG$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{KTA - KTG}{n}$$

Kedua penduga ragam ini merupakan penduga yang tak bias, karena $E(\hat{s}^2) = s^2$ dan $E(\hat{s}_a^2) = s_a^2$. Namun demikian, dalam beberapa kasus dapat diperoleh penduga s_a^2 bernilai negatif (jika dijumpai $KTA < KTG$). Penduga ragam yang negatif mungkin memberikan indikasi kita menggunakan model yang salah, sehingga kita perlu mengganti model. Atau nilai negatif tersebut memberikan indikasi bahwa komponen ragam tersebut sebenarnya bernilai 0 ($s_a^2 = 0$). Jika dijumpai nilai \hat{s}_a^2 sangat besar dan negatif, dan penduga ini tak bias, maka lebih baik diasumsikan $s_a^2 = 0$, sehingga model dapat direduksi menjadi $y_{ij} = \mathbf{m} + e_{ij}$. Dengan demikian penduga bagi s^2 menjadi $\hat{s}^2 = JKT / (an - 1)$.

Ada beberapa alternatif tindakan untuk menghindari nilai dugaan yang negatif, yaitu: (1) Periksa apakah ada data yang aneh atau perhitungan yang salah, (2) Mengumpulkan data yang lebih banyak dengan harapan hasilnya dapat menjadi positif, dan (3) Menggunakan metode-metode alternatif yang dapat menghilangkan kemungkinan hasil yang negatif, seperti: metode kemungkinan maksimum (MKM), metode kemungkinan maksimum terkendala (REML), dan penduga Bayes (Searle *et al.*, 1992); atau menggunakan pendekatan yang ditawarkan oleh Khattree (1999).

Ragam dan peragam bagi penduga komponen ragam \hat{S}^2 dan \hat{S}_a^2 adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{ragam}(\hat{S}^2) &= \text{ragam}(KTG) = \frac{2\mathbf{S}^4}{a(n-1)} \\ \text{ragam}(\hat{S}_a^2) &= \text{ragam}\left(\frac{KTA - KTG}{n}\right) = \frac{2}{n^2} \left[\frac{(n\mathbf{S}_a^2 + \mathbf{S}^2)^2}{a-1} + \frac{\mathbf{S}^4}{a(n-1)} \right] \\ \text{peragam}(\hat{S}_a^2, \hat{S}^2) &= \frac{\text{peragam}(KTA - KTG, KTG)}{n} = -\frac{\text{ragam}(KTG)}{n} = \frac{-2\mathbf{S}^4}{an(n-1)}. \end{aligned}$$

Sedangkan penduga tak bias bagi penduga ragam dan peragam bagi \hat{S}^2 dan \hat{S}_a^2 adalah sebagai berikut (Searle *et al.*, 1992):

$$\begin{aligned} \text{ra}\hat{\text{g}}\text{am}(\hat{S}^2) &= \frac{2\hat{S}^4}{a(n-1) + 2} \\ \text{ra}\hat{\text{g}}\text{am}(\hat{S}_a^2) &= \frac{2}{n^2} \left[\frac{(n\hat{S}_a^2 + \hat{S}^2)^2}{a-1} + \frac{\hat{S}^4}{a(n-1) + 2} \right] \\ \text{per}\hat{\text{a}}\text{g}\text{am}(\hat{S}_a^2, \hat{S}^2) &= \frac{-2\hat{S}^4}{an(n-1) + 2}. \end{aligned}$$

Untuk kasus jumlah ulangan tidak sama, tabel analisis ragamnya dapat diperoleh melalui penguraian jumlah kuadrat berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - y_{..})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} [(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\bar{y}_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_i^a \sum_j^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{N} = \left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{N} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_i} \right), \text{ dengan } N = \sum_{i=1}^a n_i$$

$$y_{i.} = \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{ij}) = n_i \mathbf{m} + n_i \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_i$$

$$\frac{y_{i.}^2}{n_i} = n_i \mathbf{m}^2 + n_i \mathbf{a}_i^2 + \frac{\mathbf{e}_i^2}{n_i}$$

$$E\left(\frac{y_{i.}^2}{n_i}\right) = n_i \mathbf{m}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i.}^2}{n_i}\right) = N \mathbf{m}^2 + N \mathbf{s}_a^2 + a \mathbf{s}^2.$$

Selanjutnya

$$y_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{n_i} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{ij}) = N \mathbf{m} + \sum_{i=1}^a n_i \mathbf{a}_i + \mathbf{e}_{..}$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{..}^2}{N}\right) = N \mathbf{m}^2 + \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N} \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2$$

$$E(JKA) = E\left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i.}^2}{n_i}\right) - E\left(\frac{y_{..}^2}{N}\right) = \left(N - \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N}\right) \mathbf{s}_a^2 + (a-1) \mathbf{s}^2$$

$$E(KTA) = \frac{\left(N - \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N}\right)}{a-1} \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2$$

$$JKG = \sum_i^a \sum_j^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_i^a \frac{y_{i.}^2}{n_i}$$

$$y_{ij}^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{a}_i^2 + \mathbf{e}_{ij}^2 + 2(\mathbf{m} \mathbf{a}_i + \mathbf{m} \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{ij})$$

$$E(y_{ij}^2) = \mathbf{m}^2 + \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_i^a \sum_j^{n_i} E(y_{ij}^2) = N \mathbf{m}^2 + N \mathbf{s}_a^2 + N \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$\begin{aligned} E(JKG) &= N \mathbf{m}^2 + N \mathbf{s}_a^2 + N \mathbf{s}^2 - (N \mathbf{m}^2 + N \mathbf{s}_a^2 + a \mathbf{s}^2) \\ &= (N - a) \mathbf{s}^2 \end{aligned}$$

$$E(KTG) = \frac{(N - a)}{(N - a)} s^2 = s^2.$$

Secara ringkas hasil analisis ragam dan nilai harapan kuadrat tengah untuk kasus jumlah ulangan tidak sama disajikan pada Tabel 9.

Tabel 9 Analisis ragam untuk model acak satu faktor dengan ulangan tidak sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
Á	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} - \frac{y_{...}^2}{n..}$	$\frac{JKA}{a-1}$	$s^2 + \frac{\left(N - \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N}\right)}{a-1} s_a^2$
Galat	N-ab	$\sum_i^a \sum_j^{n_i} y_{ij}^2 - \sum_{i=1}^a \frac{y_i^2}{n_i}$	$\frac{JKG}{N-a}$	s^2
Total	N-1	$\sum_i^a \sum_j^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{...}^2}{N}$		

Catatan: $N = \sum_i n_i$

Dari tabel analisis ragam Tabel 9 di atas dapat diperoleh penduga bagi ragam s^2 dan s_a^2 sebagai berikut:

$$\hat{s}^2 = KTG$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{(KTA - KTG)}{\left(N - \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{N}\right) / (a-1)}.$$

Sedangkan ragam dan peragam bagi penduga komponen ragam \hat{s}^2 dan \hat{s}_a^2 untuk ulangan yang tidak sama adalah sebagai berikut (Searle *et al.*, 1992):

$$ragam(\hat{s}^2) = ragam(KTG) = \frac{2s^4}{N-a}$$

$$ragam(\hat{s}_a^2) = ragam\left(\frac{KTA - KTG}{\left(N - \sum_i n_i^2 / N\right) / (a-1)}\right) = \frac{2N}{\left(N^2 - \sum_i n_i^2\right)} \times \left[\frac{N(N-1)(a-1)}{(N-a)(N^2 - \sum_i n_i^2)} s^2 + 2s^2 s_a^2 + \frac{N^2 \sum_i n_i^2 + (\sum_i n_i^2)^2 - 2N \sum_i n_i^3}{N(N^2 - \sum_i n_i^2)} s_a^2 \right]$$

$$peragam(\hat{s}_a^2, \hat{s}^2) = \frac{peragam[(KTA - KTG), KTG]}{\left(N - \sum_i n_i^2 / N\right) / (a-1)} = \frac{-2s^4}{(N-a)(N - \sum_i n_i^2 / N) / (a-1)}.$$

Ketaksimbangan jumlah ulangan ternyata tidak berpengaruh terhadap ragam bagi S^2 , tetapi berpengaruh terhadap ragam dari S_a^2 dan peragam (S_a^2, S^2) . Nilai peragam (S_a^2, S^2) akan semakin membesar jika derajat ketaksimbangan semakin tinggi.

Pada model acak dengan jumlah ulangan tidak sama, untuk kasus $S_a^2 > 0$, statistik uji F ternyata tidak dapat ditentukan karena KTA tidak menyebar c^2 (Searle *et al.*, 1992).

Model Acak Tersarang Dua Faktor

Model acak tersarang dua faktor yang dituliskan pada persamaan (4.2) mengasumsikan bahwa a_i , $b_{j(i)}$, dan e_{ijk} merupakan peubah acak yang mengikuti pola sebaran normal dan saling bebas, dengan nilai tengah nol dan ragam masing-masing s_a^2 , s_b^2 , dan s^2 . Untuk kasus $i=1, 2, \dots, a$; $j=1, 2, \dots, b$; dan $k=1, 2, \dots, n$, maka penguraian jumlah kuadratnya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y} \dots)^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n [(\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \\ &+ 2\left\{ \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots)(\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots)(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \right. \\ &\left. + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})(y_{ijk} - \bar{y}_{ij.}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y} \dots)^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

$$JK(\text{Total}) = JK(\hat{a}) + JK(\hat{b}) + JK(\text{Galat}).$$

Persamaan tersebut di atas sering juga ditulis sebagai berikut:

$$\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n y_{ijk}^2 - \frac{y^2 \dots}{abn} = \left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y^2 \dots}{abn} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} \right) + \left(\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^n y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} \right)$$

Tabel 10 Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus level **b** dan jumlah ulangan sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
\hat{a}	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn} - \frac{y_{...}^2}{abn}$	$\frac{JK(a)}{a-1}$	$s^2 + ns_b^2 + bns_a^2$
\hat{a}	a(b-1)	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{bn}$	$\frac{JK(b)}{a(b-1)}$	$s^2 + ns_b^2$
Galat	ab(n-1)	$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n}$	$\frac{JK(G)}{ab(n-1)}$	s^2
Total	abn-1	$\sum_i \sum_j \sum_k y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{abn}$		

Dari tabel analisis ragam di atas dapat diperoleh penduga bagi ragam s^2 , s_b^2 , dan s_a^2 sebagai berikut:

$$\hat{s}^2 = KT(G)$$

$$s_b^2 = \frac{KT(b) - KT(G)}{n}$$

$$s_a^2 = \frac{KT(a) - KT(b)}{bn}$$

Jumlah taraf faktor **b** tidak harus sama untuk setiap a_i , demikian juga jumlah ulangan untuk setiap $b_{j(i)}$ tidak harus selalu sama. Berikut ini akan diturunkan tabel analisis ragam untuk kasus ukuran **b** tidak sama, ulangan tidak sama, dan kasus baik ukuran **b** maupun ulangan tidak sama. Beberapa hasil penurunan tabel analisis ragam sama dengan yang diberikan oleh (Searle *et al.*, 1992).

Kasus ukuran \hat{a} tidak sama

Misalkan $i=1, 2, \dots, a$; $j=1, 2, \dots, b_i$; dan $k=1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - y_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n [(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^n y_{ijk}^2 - \frac{y_{i..}^2}{nb_i} = \left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i} - \frac{y_{i..}^2}{nb_i} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i} \right) + \left(\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^n y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n} \right)$$

dimana $b_i = \sum_{i=1}^a b_i$

Perhitungan E(KT)

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n y_{ijk} = \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = nb_i \mathbf{m} + nb_i \mathbf{a}_i + n \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{i..}$$

$$\frac{y_{i..}^2}{nb_i} = nb_i \mathbf{m}^2 + nb_i \mathbf{a}_i^2 + \frac{n^2}{nb_i} \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} + \frac{\mathbf{e}_{i..}^2}{nb_i} + \frac{n^2}{nb_i} \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{j' \neq j}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij'}$$

$$+ 2\{nb_i \mathbf{m} \mathbf{a}_i + n \mathbf{m} \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{i..} + n \mathbf{a}_i \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{i..} + n \mathbf{e}_{i..} \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij}\}.$$

Sesuai dengan asumsi model di atas:

$$E(\mathbf{a}_i) = 0; E(\mathbf{b}_{ij}) = 0; E(\mathbf{e}_{ijk}) = 0; E(\mathbf{a}_i \mathbf{b}_{ij}) = 0;$$

$$E(\mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij'}) = 0 \text{ untuk } j \neq j'; E(\mathbf{b}_{ij} \mathbf{e}_{ijk}) = 0.$$

Dengan penggantian: $E(\mathbf{a}_i^2) = \mathbf{s}_a^2, E(\mathbf{b}_{ij}^2) = \mathbf{s}_b^2, E(\mathbf{e}_{ijk}^2) = \mathbf{s}^2$ maka diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{i..}^2}{nb_i}\right) = nb_i \mathbf{m}^2 + nb_i \mathbf{s}_a^2 + \frac{n^2}{nb_i} b_i \mathbf{s}_b^2 + \frac{1}{nb_i} nb_i \mathbf{s}^2$$

$$= nb_i \mathbf{m}^2 + nb_i \mathbf{s}_a^2 + n \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i..}^2}{nb_i}\right) = nb \mathbf{m}^2 + nb \mathbf{s}_a^2 + a n \mathbf{s}_b^2 + a \mathbf{s}^2.$$

Selanjutnya

$$y_{i..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n y_{ijk} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^n (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = nb \mathbf{m} + n \sum_{i=1}^a b_i \mathbf{a}_i + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{i..}$$

$$E\left(\frac{y_{i..}^2}{nb}\right) = nb \mathbf{m}^2 + \frac{n^2 \sum_{i=1}^a b_i^2 \mathbf{s}_a^2}{nb} + \frac{n^2 b_i \mathbf{s}_b^2}{nb} + \frac{nb \mathbf{s}^2}{nb}$$

$$= nb \mathbf{m}^2 + \frac{n}{b} \sum_{i=1}^a b_i^2 \mathbf{s}_a^2 + n \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$E(JK(\mathbf{a})) = E\left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i}\right) - E\left(\frac{y_{...}^2}{nb}\right)$$

$$= \left(nb - \frac{n}{b} \sum_{i=1}^a b_i^2\right) \mathbf{s}_a^2 + (an - n) \mathbf{s}_b^2 + (a-1) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{a})) = \frac{\left(nb - \frac{n}{b} \sum_{i=1}^a b_i^2\right)}{a-1} \mathbf{s}_a^2 + n \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$JK(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i}$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^n y_{ijk} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n\mathbf{m} + n\mathbf{a}_i + n\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ij.}$$

$$\frac{y_{ij.}^2}{n} = n\mathbf{m}^2 + n\mathbf{a}_i^2 + n\mathbf{b}_{ij}^2 + \frac{\mathbf{e}_{ij.}^2}{n} + 2(n\mathbf{m}\mathbf{a}_i + n\mathbf{m}\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m}\mathbf{e}_{ij.} + n\mathbf{a}_i\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i\mathbf{e}_{ij.} + \mathbf{b}_{ij}\mathbf{e}_{ij.}).$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n}\right) = n\mathbf{m}^2 + n\mathbf{s}_a^2 + n\mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n}\right) = nb\mathbf{m}^2 + nb\mathbf{s}_a^2 + nb\mathbf{s}_b^2 + b\mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$E(JK(\mathbf{b})) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n}\right) - \sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i..}^2}{nb_i}\right)$$

$$= nb\mathbf{m}^2 + nb\mathbf{s}_a^2 + nb\mathbf{s}_b^2 + b\mathbf{s}^2 - nb\mathbf{m}^2 + nb\mathbf{s}_a^2 + ans_b^2 + a\mathbf{s}^2$$

$$= n(b-a)\mathbf{s}_b^2 + (b-a)\mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{b})) = \frac{n(b-a)\mathbf{s}_b^2}{b-a} + \frac{(b-a)\mathbf{s}^2}{b-a} = n\mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$JK(\text{Galat}) = \sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^n y_{ijk}^2 - \sum_i^a \sum_j^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n}$$

$$y_{ijk}^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_{ij}^2 + \mathbf{e}_{ijk}^2 + 2(n\mathbf{m}\mathbf{a}_i + n\mathbf{m}\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m}\mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i\mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{b}_{ij}\mathbf{e}_{ijk})$$

$$E(y_{ijk}^2) = \mathbf{m}^2 + \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^n E(y_{ijk}^2) = nb.m^2 + nb.s_a^2 + nb.s_b^2 + nb.s^2.$$

Dengan demikian

$$E(JK(Galat)) = nb.m^2 + nb.s_a^2 + nb.s_b^2 + nb.s^2 - (nb.m^2 + nb.s_a^2 + nb.s_b^2 + b.s^2) = b.(n-1)s^2$$

$$E(KT(Galat)) = \frac{b.(n-1)}{b.(n-1)} s^2 = s^2.$$

Tabel 11 Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus ukuran **b** tidak sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
á	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i} - \frac{y_{...}^2}{nb.}$	$\frac{JK(a)}{a-1}$	$s^2 + ns_b^2 + \left(\frac{nb. - \frac{n}{b} \sum_{i=1}^a b_i^2}{a-1} \right) s_a^2$
â	b.-a	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{nb_i}$	$\frac{JK(b)}{b.-a}$	$s^2 + ns_b^2$
Galat	b.(n-1)	$\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^c y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n}$	$\frac{JK(G)}{b.(n-1)}$	s^2
Total	nb.-1	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^c y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{nb.}$		

Kasus jumlah ulangan tidak sama

Misalkan $i=1, 2, \dots, a$; $j=1, 2, \dots, b$; dan $k=1, 2, \dots, n_j$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_j} (y_{ijk} - y_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_j} [(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_j} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_j} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_j} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{n_j} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{n..} = \left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} - \frac{y_{...}^2}{n..} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} \right) + \left(\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{n_j} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} \right)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_{i.} \mathbf{m} + n_{i.} \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^b n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{i..}$$

$$\frac{y_{i..}^2}{n_{i.}} = n_{i.} \mathbf{m}^2 + n_{i.} \mathbf{a}_i^2 + \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2 \mathbf{b}_{ij}^2}{n_{i.}} + \frac{\mathbf{e}_{i..}^2}{n_{i.}} + \sum_{j=1}^b \sum_{j' \neq j} \frac{n_{ij} n_{ij'} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij'}}{n_{i.}}$$

$$+ 2 \left(n_{i.} \mathbf{m} \mathbf{a}_i + \mathbf{m} \sum_{j=1}^b n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{i..} + \mathbf{a}_i \sum_{j=1}^b n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{i..} + \frac{(\sum_{j=1}^b n_{ij} \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{e}_{i..}}{n_{i.}} \right)$$

Dimana $n_{i.} = \sum_{j=1}^b n_{ij}$ dan $n_{..} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij}$.

Sesuai dengan asumsi model di atas diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}\right) = n_{i.} \mathbf{m}^2 + n_{i.} \mathbf{s}_a^2 + \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}\right) = n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} \mathbf{s}_b^2 + a \mathbf{s}^2.$$

Selanjutnya

$$y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_{..} \mathbf{m} + \sum_{i=1}^a n_{i.} \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{...}$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{...}^2}{n_{..}}\right) = n_{..} \mathbf{m}^2 + \sum_{i=1}^a \frac{n_{i.}^2}{n_{..}} \mathbf{s}_a^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{..}} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$E(JK(\mathbf{a})) = E\left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_{i.}}\right) - E\left(\frac{y_{...}^2}{n_{..}}\right)$$

$$= \left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \frac{n_{i.}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_a^2 + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_b^2 + (a-1) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{a})) = \frac{\left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \frac{n_{i.}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_a^2}{a-1} + \frac{\left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{i.}} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_b^2}{a-1} + \mathbf{s}^2$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_{ij} \mathbf{m} + n_{ij} \mathbf{a}_i + n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ij.}$$

$$\frac{y_{ij}^2}{n_{ij}} = n_{ij} \mathbf{m}^2 + n_{ij} \mathbf{a}_i^2 + n_{ij} \mathbf{b}_{ij}^2 + \frac{\mathbf{e}_{ij}^2}{n_{ij}} + 2(n_{ij} \mathbf{m} \mathbf{a}_i + n_{ij} \mathbf{m} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{ij} + n_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{ij} + \mathbf{b}_{ij} \mathbf{e}_{ij}).$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{ij}^2}{n_{ij}}\right) = n_{ij} \mathbf{m}^2 + n_{ij} \mathbf{s}_a^2 + n_{ij} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b E\left(\frac{y_{ij}^2}{n_{ij}}\right) = n.. \mathbf{m}^2 + n. \mathbf{s}_a^2 + n. \mathbf{s}_b^2 + ab \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$E(JK(\mathbf{b})) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b E\left(\frac{y_{ij}^2}{n_{ij}}\right) - \sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i.}^2}{n_i}\right) = \left(n.. - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_i}\right) \mathbf{s}_b^2 + (ab - a) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{b})) = \frac{\left(n.. - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_i}\right)}{ab - a} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$JK(\text{Galat}) = \sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_i^a \sum_j^b \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

$$y_{ijk}^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_{ij}^2 + \mathbf{e}_{ijk}^2 + 2(\mathbf{m} \mathbf{a}_i + \mathbf{m} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{b}_{ij} \mathbf{e}_{ijk})$$

$$E(y_{ijk}^2) = \mathbf{m}^2 + \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_i^a \sum_j^b \sum_k^{n_{ij}} E(y_{ijk}^2) = n.. \mathbf{m}^2 + n. \mathbf{s}_a^2 + n. \mathbf{s}_b^2 + n. \mathbf{s}^2.$$

Dengan demikian

$$E(JK(\text{Galat})) = n.. \mathbf{m}^2 + n. \mathbf{s}_a^2 + n. \mathbf{s}_b^2 + n. \mathbf{s}^2 - (n.. \mathbf{m}^2 + n. \mathbf{s}_a^2 + n. \mathbf{s}_b^2 + ab \mathbf{s}^2) = (n.. - ab) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\text{Galat})) = \frac{(n.. - ab)}{(n.. - ab)} \mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^2.$$

Tabel 12 Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus jumlah ulangan tidak sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
á	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} - \frac{y_{...}^2}{n..}$	$\frac{JK(\mathbf{a})}{a-1}$	$\mathbf{s}^2 + \frac{a_1 - a_3}{a-1} \mathbf{s}_b^2 + \frac{n.. - a_2}{a-1} \mathbf{s}_a^2$
â	ab-a	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i}$	$\frac{JK(\mathbf{b})}{ab-a}$	$\mathbf{s}^2 + \frac{n.. - a_1}{ab-a} \mathbf{s}_b^2$
Galat	n..-ab	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$	$\frac{JK(\mathbf{G})}{n.. - ab}$	\mathbf{s}^2
Total	n..-1	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{n..}$		

Dimana: $a_1 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n_i}$; $a_2 = \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{n..}$; $a_3 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \frac{n_{ij}^2}{n..}$

Kasus ukuran â dan jumlah ulangan tidak sama

Misalkan $i=1, 2, \dots, a$; $j=1, 2, \dots, b_i$; dan $k=1, 2, \dots, n_{ij}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - y_{...})^2 &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} [(\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..}) + (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..}) + (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})]^2 \\ &= \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2 \end{aligned}$$

Atau dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{n..} = \left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} - \frac{y_{...}^2}{n..} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} \right) + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} \right)$$

$$y_{i..} = \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_i \mathbf{m} + n_i \mathbf{a}_i + \sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{i..}$$

$$\frac{y_{i..}^2}{n_i} = n_i \mathbf{m}^2 + n_i \mathbf{a}_i^2 + \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2 \mathbf{b}_{ij}^2}{n_i} + \frac{\mathbf{e}_{i..}^2}{n_i} + \sum_{j=1}^{b_i} \sum_{j' \neq j} \frac{n_{ij} n_{ij'} \mathbf{b}_{ij} \mathbf{b}_{ij'}}{n_i}$$

$$+ 2 \left(n_i \mathbf{m} \mathbf{a}_i + \mathbf{m} \sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{i..} + \mathbf{a}_i \sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{i..} + \frac{(\sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \mathbf{b}_{ij}) \mathbf{e}_{i..}}{n_i} \right)$$

Sesuai dengan asumsi model di atas diperoleh:

2. Dilarang mengemukakan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

$$E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_i}\right) = n_i \mathbf{m}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2 + \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_i}\right) = n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} \mathbf{s}_b^2 + a \mathbf{s}^2.$$

Selanjutnya

$$y_{...} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_{..} \mathbf{m} + \sum_{i=1}^a n_i \mathbf{a}_i + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}...$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh

$$E\left(\frac{y_{...}^2}{n_{..}}\right) = n_{..} \mathbf{m}^2 + \sum_{i=1}^a \frac{n_i}{n_{..}} \mathbf{s}_a^2 + \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_{..}} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$E(JK(\mathbf{a})) = E\left(\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i}\right) - E\left(\frac{y_{...}^2}{n_{..}}\right)$$

$$= \left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \frac{n_i}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_a^2 + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_b^2 + (a-1) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{a})) = \frac{\left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \frac{n_i}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_a^2 + \left(\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_{..}}\right) \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2}{a-1}$$

$$y_{ij.} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} (\mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}) = n_{ij} \mathbf{m} + n_{ij} \mathbf{a}_i + n_{ij} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ij.}$$

$$\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} = n_{ij} \mathbf{m}^2 + n_{ij} \mathbf{a}_i^2 + n_{ij} \mathbf{b}_{ij}^2 + \frac{\mathbf{e}_{ij.}^2}{n_{ij}} + 2(n_{ij} \mathbf{m} \mathbf{a}_i + n_{ij} \mathbf{m} \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m} \mathbf{e}_{ij.} + n_{ij} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{e}_{ij.} + \mathbf{b}_{ij} \mathbf{e}_{ij.}).$$

Dengan asumsi yang sama diperoleh:

$$E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}\right) = n_{ij} \mathbf{m}^2 + n_{ij} \mathbf{s}_a^2 + n_{ij} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}\right) = n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + n_{..} \mathbf{s}_b^2 + b \mathbf{s}^2.$$

Sehingga

$$E(JK(\mathbf{b})) = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} E\left(\frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}\right) - \sum_{i=1}^a E\left(\frac{y_{i..}^2}{n_i}\right)$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$= \left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} \right) \mathbf{s}_b^2 + (b.-a) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(\mathbf{b})) = \frac{\left(n_{..} - \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i} \right)}{b.-a} \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$JK(Galat) = \sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_i^a \sum_j^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$$

$$y_{ijk}^2 = \mathbf{m}^2 + \mathbf{a}_i^2 + \mathbf{b}_{ij}^2 + \mathbf{e}_{ijk}^2 + 2(\mathbf{m}\mathbf{a}_i + \mathbf{m}\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{m}\mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{a}_i\mathbf{b}_{ij} + \mathbf{a}_i\mathbf{e}_{ijk} + \mathbf{b}_{ij}\mathbf{e}_{ijk})$$

$$E(y_{ijk}^2) = \mathbf{m}^2 + \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}^2$$

$$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{n_{ij}} E(y_{ijk}^2) = n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + n_{..} \mathbf{s}_b^2 + n_{..} \mathbf{s}^2.$$

Dengan demikian

$$E(JK(Galat)) = n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + n_{..} \mathbf{s}_b^2 + n_{..} \mathbf{s}^2 - (n_{..} \mathbf{m}^2 + n_{..} \mathbf{s}_a^2 + n_{..} \mathbf{s}_b^2 + b \mathbf{s}^2)$$

$$= (n_{..} - b) \mathbf{s}^2$$

$$E(KT(Galat)) = \frac{(n_{..} - b)}{(n_{..} - b)} \mathbf{s}^2 = \mathbf{s}^2.$$

Tabel 13 Tabel analisis ragam dan E(KT)-nya untuk model acak tersarang dua faktor untuk kasus jumlah level **b** dan jumlah ulangan tidak sama

Sumber	db	JK	KT	E(KT)
á	a-1	$\sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i} - \frac{y_{...}^2}{n_{..}}$	$\frac{JK(\mathbf{a})}{a-1}$	$\mathbf{s}^2 + \frac{a_1 - a_3}{a-1} \mathbf{s}_b^2 + \frac{n_{..} - a_2}{a-1} \mathbf{s}_a^2$
â	b.-a	$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}} - \sum_{i=1}^a \frac{y_{i..}^2}{n_i}$	$\frac{JK(\mathbf{b})}{b.-a}$	$\mathbf{s}^2 + \frac{n_{..} - a_1}{ab-a} \mathbf{s}_b^2$
Galat	n..- b.	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \sum_i^a \sum_j^{b_i} \frac{y_{ij.}^2}{n_{ij}}$	$\frac{JK(G)}{n_{..} - b.}$	\mathbf{s}^2
Total	n..-1	$\sum_i^a \sum_j^{b_i} \sum_k^{n_{ij}} y_{ijk}^2 - \frac{y_{...}^2}{n_{..}}$		

Dimana: $a_1 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_i}$; $a_2 = \sum_{i=1}^a \frac{n_i^2}{n_{..}}$; $a_3 = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}^2}{n_{..}}$

4.3. Pendugaan dengan Metode Kemungkinan maksimum

Model Acak Satu Faktor

Penduga kemungkinan maksimum bagi parameter $\mathbf{q} = (\mathbf{m}, \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_a^2)$ model (4.1) dapat diperoleh dari fungsi kemungkinannya sebagai berikut:

$$L(\mathbf{q}) = \frac{\exp[-\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{m})'V^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{m})]}{(2\mathbf{p})^{\frac{1}{2}N} |V|^{\frac{1}{2}}}$$

Dimana

$$|V| = \prod_{i=1}^a \mathbf{s}^{2(n_i-1)} (\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2) \text{ dan}$$

$$V^{-1} = \frac{I_{n_i}}{\mathbf{s}^2} - \frac{\mathbf{s}_a^2}{\mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2)} J_{n_i} \quad (\text{Searle } et al., 1992).$$

Dengan demikian fungsi kemungkinan di atas dapat dituliskan menjadi:

$$L(\mathbf{q}) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mathbf{m})^2 - \sum_i \frac{\mathbf{s}_a^2}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} (y_{i.} - n_i \mathbf{m})^2 \right]\right\}}{(2\mathbf{p})^{\frac{1}{2}N} \mathbf{s}^{2[\frac{1}{2}(N-a)]} \prod_{i=1}^a (\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Sehingga log dari fungsi kemungkinannya menjadi:

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(N-a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log(\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2) \\ & - \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^2} \sum_i \frac{\mathbf{s}_a^2}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} (y_{i.} - n_i \mathbf{m})^2 \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

Kasus jumlah ulangan sama

Untuk kasus ulangan sama berarti $n_i = n$ untuk setiap i , dengan demikian log fungsi kemungkinan (4.3) menjadi:

$$\begin{aligned} \log L = & -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2} a(n-1) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} a \log(\mathbf{s}^2 + n \mathbf{s}_a^2) \\ & - \frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2} + \frac{n^2 \mathbf{s}_a^2 \sum_i (\bar{y}_{i.} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 + n \mathbf{s}_a^2)} \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Dua suku terakhir dari persamaan (4.4) di atas jika diekspresikan dalam bentuk JKA dan JKG menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sum_i \sum_j (y_{ij} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2} + \frac{n^2 \mathbf{s}_a^2 \sum_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}^2 (\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2)} \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \mathbf{m})^2 - \frac{n^2 \mathbf{s}_a^2}{(\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2)} \sum_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[\sum_i \sum_j \{ (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 + 2(y_{ij} - \bar{y}_i)(\bar{y}_i - \mathbf{m}) \} - \frac{n^2 \mathbf{s}_a^2}{(\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2)} \sum_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[\sum_i \sum_j \{ (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_i \sum_j (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 + 0 - \frac{n^2 \mathbf{s}_a^2}{(\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2)} \sum_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[\sum_i \sum_j \{ (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 + \sum_i n(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 - \frac{n\mathbf{s}_a^2}{(\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2)} \sum_i n(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[JKG + \left(1 - \frac{n\mathbf{s}_a^2}{\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2} \right) \sum_i n(y_i - \bar{y}_i + \bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[JKG + \left(1 - \frac{n\mathbf{s}_a^2}{\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2} \right) \sum_i n\{ (y_i - \bar{y}_i)^2 + (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2 \} \right] \\
 &= -\frac{1}{2\mathbf{s}^2} \left[JKG + \frac{\mathbf{s}^2}{\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2} [JKA + an(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2] \right].
 \end{aligned}$$

Karena penduga kemungkinan maksimum dari suatu fungsi parameter sama dengan fungsi dari penduga kemungkinan maksimum dari parameter, kita dapat menyederhanakan notasi dengan menuliskan:

$$I = \mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_a^2$$

Sehingga persamaan (4.4) menjadi:

$$\log L = -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2} a(n-1) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} a \log I - \frac{JKG}{2\mathbf{s}^2} - \frac{JKA}{2I} - \frac{an(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2I}.$$

Dengan menurunkan secara parsial terhadap \mathbf{m} , \mathbf{s}^2 dan I diperoleh:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \frac{an(\bar{y}_i - \mathbf{m})}{I}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{a(n-1)}{2\mathbf{s}^2} + \frac{JKG}{2\mathbf{s}^4}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial I} = -\frac{a}{2I} + \frac{JKA}{2I^2} + \frac{an(\bar{y}_{..} - m)^2}{2I^2}.$$

Evaluasi ketiga persamaan ini pada nilai 0, memberikan penduga kemungkinan maksimum sebagai berikut:

$$\hat{m} = \bar{y}_{..}$$

$$\hat{S}^2 = KTG \quad \text{dan} \quad \hat{S}_a^2 = \frac{(1-1/a)KTA - KTG}{n}$$

$$\text{dimana } KTA = \frac{JKA}{(a-1)} \quad \text{dan} \quad KTG = \frac{JKG}{a(n-1)}.$$

Sedangkan turunan kedua untuk ketiga persamaan tersebut di atas masing-masing terhadap m , S^2 dan I diperoleh:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2} = -\frac{an}{I}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial (S^2)^2} = \frac{a(n-1)}{2S^4} - \frac{JKG}{S^6}$$

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial I^2} = \frac{a}{2I^2} - \frac{JKA}{I^3} - \frac{an(\bar{y}_{..} - m)^2}{I^3}.$$

Dengan memasukkan penduga kemungkinan maksimum bagi m , S^2 dan I di atas kedalam ketiga persamaan turunan kedua fungsi kemungkinan ini akan menghasilkan nilai yang negatif. Dengan demikian penduga kemungkinan maksimum tersebut terbukti merupakan titik maksimum dari fungsi kemungkinannya.

Penduga S^2 ternyata merupakan penduga yang tak bias terhadap S^2 , sedangkan \hat{S}_a^2 merupakan penduga yang berbias terhadap S_a^2 karena

$$E(\hat{S}^2) = S^2 \quad \text{sedangkan} \quad E(\hat{S}_a^2) = (1 - \frac{1}{a})S_a^2 - \frac{1}{an}S^2.$$

Penduga S^2 dan ragam S^2 yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil (ANOVA) dan metode kemungkinan maksimum ternyata sama, sedangkan penduga \hat{S}_a^2 yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut berbeda.

Pada beberapa kasus dimungkinkan diperolehnya penduga komponen ragam \hat{S}_a^2 yang negatif. Oleh karena itu, untuk memperoleh nilai harapan penduga kemungkinan maksimumnya lebih sulit karena tergantung dari nilai \hat{S}_a^2 apakah positif atau negatif

(Searle *et al.*, 1992). Selanjutnya, untuk menghindari mendapatkan penduga yang negatif, Searle *et al.* (1992) memberikan penduga kemungkinan maksimum bagi \mathbf{s}^2 dan $\hat{\mathbf{s}}_a^2$ sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{s}}_a^2 = \begin{cases} [(1-1/a)KTA - KTG]/n; & \text{untuk } (1-1/a)KTA \geq KTG \\ 0 & \text{selainnya} \end{cases}$$

dan

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \begin{cases} KTG; & \text{untuk } (1-1/a)KTA \geq KTG \\ \frac{JKT}{an}; & \text{untuk selainnya.} \end{cases}$$

Ragam dari masing-masing penduga $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{s}}^2$, dan $\hat{\mathbf{s}}_a^2$ dapat diperoleh melalui nilai harapan dari turunan kedua log fungsi kemungkinannya sebagai berikut:

$$\text{ragam} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{s}}^2 \\ \hat{\mathbf{I}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{an}{I} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(n-1)}{2\mathbf{s}^4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a}{2I^2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{I}{an} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\mathbf{s}^4}{a(n-1)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2I^2}{a} \end{bmatrix}$$

Dengan demikian:

$$\text{ragam}(\hat{\mathbf{m}}) = \frac{\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_a^2}{an}$$

$$\text{ragam} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}^2 \\ \hat{\mathbf{s}}_a^2 \end{bmatrix} \cong 2\mathbf{s}^4 \begin{bmatrix} \frac{1}{a(n-1)} & -\frac{1}{an(n-1)} \\ -\frac{1}{an(n-1)} & \frac{1}{n^2} \left(\frac{I^2}{\mathbf{s}^4} + \frac{1}{a(n-1)} \right) \end{bmatrix}$$

Kasus jumlah ulangan tidak sama

Penurunan penduga kemungkinan maksimum untuk kasus ulangan tidak sama akan mengacu pada log fungsi kemungkinan yang dituliskan pada persamaan (4.3). Dengan menotasikan kembali $I_i = \mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2$ dan mengeks-presikan fungsi tersebut dalam bentuk JKG dan JKA, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\log L = -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(N-a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log I_i - \frac{JKG}{2\mathbf{s}^2} - \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2I_i} \dots (4.5)$$

Dengan menurunkan secara parsial terhadap \mathbf{m} , \mathbf{s}^2 dan I diperoleh:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})}{I_i}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{(N-a)}{2\mathbf{s}^2} - \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{I_i} + \frac{JKG}{2\mathbf{s}^4} + \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2I_i^2}$$

$$\frac{\partial \log L}{\partial I} = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i}{I_i} + \sum_i \frac{n^2 (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2I_i^2}$$

Dengan mengevaluasi fungsi turunan terhadap \mathbf{m} di atas terhadap 0, diperoleh penduga kemungkinan maksimum bagi \mathbf{m} sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{m}} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\hat{I}_i}}{\sum_i \frac{n_i}{\hat{I}_i}} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\hat{\mathbf{s}}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\hat{\mathbf{s}}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}} = \frac{\sum_i \frac{\bar{y}_i}{\text{var}(\bar{y}_i)}}{\sum_i \frac{1}{\text{var}(\bar{y}_i)}}$$

dimana: $\text{ragam}(\bar{y}_i) = \mathbf{s}_a^2 + \mathbf{s}^2 / n_i$.

Sedangkan untuk kasus ulangan tidak sama, solusi secara analitik bagi penduga kemungkinan maksimum \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 tidak dapat diperoleh (Searle *et al.*, 1992).

Ragam dari masing-masing penduga ini dapat diperoleh melalui nilai harapan dari turunan ke dua log fungsi kemungkinannya sebagai berikut:

$$\text{ragam} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{m}} \\ \hat{\mathbf{s}}^2 \\ \hat{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_i \frac{n_i}{I_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N-a}{2\mathbf{s}^4} + \frac{1}{2} \sum_i \frac{1}{I_i^2} & \frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i}{I_i^2} \\ 0 & \frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i}{I_i^2} & \frac{1}{2} \sum_i \frac{n_i^2}{I_i^2} \end{bmatrix}^{-1}$$

Dengan demikian

$$\text{ragam}(\hat{\mathbf{m}}) = \left(\sum_i \frac{n_i}{I_i} \right)^{-1} = \left(\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} \right)^{-1}$$

$$\text{ragam} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}^2 \\ \hat{\mathbf{s}}_a^2 \end{bmatrix} = \frac{2}{D} \begin{bmatrix} \sum_i \frac{n_i^2}{I_i^2} & -\sum_i \frac{n_i}{I_i^2} \\ -\sum_i \frac{n_i}{I_i^2} & \frac{N-a}{\mathbf{s}^4} + \sum_i \frac{1}{I_i^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{Dimana } D = \frac{N-a}{\mathbf{s}^4} \sum_i \frac{n_i^2}{I_i^2} + \sum_i \frac{1}{I_i^2} \sum_i \frac{n_i^2}{I_i^2} - \left(\sum_i \frac{n_i}{I_i^2} \right)^2$$

Untuk jumlah ulangan tidak sama, penduga parameter bagi komponen ragam pada umumnya tidak dapat diperoleh melalui rumus jadi (*closed form*) (Searle *et al.*, 1992). Salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh penduga bagi komponen ragamnya untuk kasus ulangan tidak sama adalah algoritma *iterative backfitting* seperti yang digunakan oleh Pawitan (2001). Pada bagian ini akan diuraikan metode pendugaan bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 menggunakan algoritma iteratif yang dikembangkan dari Pawitan (2001).

Secara umum, model (4.1) jika dituliskan dalam bentuk matriks akan menjadi:

$$y = \mathbf{1}\mathbf{m} + \mathbf{Z}\mathbf{b} + e$$

Dengan asumsi $b \sim N(0, D)$ dan $e \sim N(0, \Sigma)$, sedangkan $y \sim N(\mathbf{m}\mathbf{1}, V)$ dimana

$$V = \Sigma + \mathbf{Z}\mathbf{D}\mathbf{Z}'$$

Log fungsi kemungkinan pada parameter fixed (\mathbf{m}, \mathbf{q}) dimana $\mathbf{q} = \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_a^2$ adalah

$$\log L(\mathbf{m}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{1}{2} (y - \mathbf{m}\mathbf{1})' V^{-1} (y - \mathbf{m}\mathbf{1})$$

Pada nilai \mathbf{q} yang tetap, turunan pertama fungsi ini terhadap \mathbf{m} dan mengevaluasinya pada nilai 0 menghasilkan penduga \mathbf{m} sebagai berikut:

$$\hat{\mathbf{m}} = (\mathbf{1}' V^{-1} \mathbf{1})^{-1} \mathbf{1}' V^{-1} y$$

Profil *likelihood* dari parameter \mathbf{q} adalah

$$\log L(\mathbf{q}) = -\frac{1}{2} \log |V| - \frac{1}{2} (y - \hat{\mathbf{m}}\mathbf{1})' V^{-1} (y - \hat{\mathbf{m}}\mathbf{1}) \dots\dots\dots (4.6)$$

Log-likelihood seluruh parameter model ($\mathbf{m}, \mathbf{b}, \mathbf{q}$ dengan $\mathbf{q} = \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_a^2$) dapat ditentukan berdasarkan sebaran bersama dari (y, \mathbf{b}) , yaitu

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{q}, \mathbf{b}) = p(y | \mathbf{b}) p(\mathbf{b})$$

Sebaran bersyarat y jika diketahui \mathbf{b} adalah normal dengan nilai tengah

$$E(y | \mathbf{b}) = \mathbf{m}\mathbf{1} + \mathbf{Z}\mathbf{b} \text{ dan ragam } \Sigma. \text{ Sedangkan } \mathbf{b} \text{ menyebar normal dengan nilai tengah}$$

0 dan ragam D, sehingga

$$\log L(\mathbf{m}, \mathbf{q}, \mathbf{b}) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} (y - \mathbf{1}\mathbf{m} - \mathbf{Z}\mathbf{b})' \Sigma^{-1} (y - \mathbf{1}\mathbf{m} - \mathbf{Z}\mathbf{b}) - \frac{1}{2} \log |D| - \frac{1}{2} \mathbf{b}' D^{-1} \mathbf{b}$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{m} dan \mathbf{b} menghasilkan:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \mathbf{1}' \Sigma^{-1} (y - \mathbf{1}\mathbf{m} - \mathbf{Z}\mathbf{b})$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
 1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\frac{\partial \log L}{\partial b} = Z' \Sigma^{-1} (y - \mathbf{1}m - Zb) - D^{-1}b$$

Dengan mengevaluasi pada nilai 0, maka penduga bagi \mathbf{m} dan b dapat diperoleh melalui solusi dari persamaan tersebut sebagai berikut:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} & \mathbf{1}'\Sigma^{-1}Z \\ Z'\Sigma^{-1}\mathbf{1} & Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m} \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1}'\Sigma^{-1}y \\ Z'\Sigma^{-1}y \end{pmatrix}$$

Dengan berpedoman bahwa (Pawitan, 2001) :

$$\begin{aligned} V^{-1} &= \Sigma^{-1} - \Sigma^{-1}Z(Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1})^{-1}Z'\Sigma^{-1} \\ \hat{b} &= DZ'V^{-1}(y - \mathbf{m}\mathbf{1}) \\ V^{-1}(y - \mathbf{m}\mathbf{1}) &= \Sigma^{-1}(y - \mathbf{m}\mathbf{1} - Z\hat{b}) \\ (y - \mathbf{m}\mathbf{1})'V^{-1}(y - \mathbf{m}\mathbf{1}) &= (y - \mathbf{m}\mathbf{1} - Z\hat{b})'\Sigma^{-1}(y - \mathbf{m}\mathbf{1} - Z\hat{b}) + \hat{b}'D^{-1}\hat{b} \\ |V| &= |\Sigma| \cdot |-Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}| \end{aligned}$$

Maka persamaan (4.6) dapat dituliskan kembali menjadi:

$$\begin{aligned} \log L(\mathbf{q}) &= -\frac{1}{2} \log |\Sigma| - \frac{1}{2} (y - \hat{\mathbf{m}} - Z\hat{b})'\Sigma^{-1}(y - \hat{\mathbf{m}} - Z\hat{b}) - \frac{1}{2} \log |D| - \frac{1}{2} \hat{b}'D^{-1}\hat{b} \\ &\quad - \frac{1}{2} \log |Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}| \\ \log L(\mathbf{q}) &= \log L(\hat{\mathbf{m}}, \mathbf{q}, \hat{b}) - \frac{1}{2} \log |Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|. \end{aligned}$$

Dari persamaan ini terlihat bahwa $\log L(\mathbf{q})$ merupakan modifikasi $\log L(\hat{\mathbf{m}}, \mathbf{q}, \hat{b})$ dengan menambahkan persamaan $-\frac{1}{2} \log |Z'\Sigma^{-1}Z + D^{-1}|$ yang tidak lain merupakan informasi Fisher dari b .

Selanjutnya, untuk mendapatkan penduga bagi \mathbf{m} , b , dan komponen ragam \mathbf{s}_a^2 dan \mathbf{s}_b^2 dapat dilakukan melalui prosedur iteratif.

Dengan mengasumsikan:

$$\Sigma = \mathbf{s}_a^2 A \quad \text{dan} \quad D = \mathbf{s}_b^2 R$$

Dimana A dan R merupakan matriks yang diketahui dan berpangkat N dan q (pada banyak aplikasi, matriks A dan R merupakan matriks identitas). Dengan demikian, untuk memperoleh penduga parameter tersebut, fungsi tujuan yang harus dimaksimumkan adalah

$$Q = -\frac{N}{2} \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2\mathbf{s}^2} e'A^{-1}e - \frac{q}{2} \log \mathbf{s}_b^2 - \frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} \log b'R^{-1}b - \frac{1}{2} \log |\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1}|$$

Dimana $e = y - \mathbf{m} - Zb$

Turunan Q terhadap \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 menghasilkan:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e'A^{-1}e + \frac{q}{2\mathbf{s}^4} \text{teras}\{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}_b^2} = -\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{q}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras}\{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}.$$

Dengan mengevaluasi masing-masing pada nilai 0, dan mengisolasi nilai \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 maka diperoleh persamaan iteratif sebagai berikut:

$$\mathbf{s}^2 = \frac{1}{N} [e'A^{-1}e + \text{teras}\{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}]$$

$$\mathbf{s}_b^2 = \frac{1}{q} [b'R^{-1}b + \text{teras}\{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}].$$

Dengan demikian, prosedur iteratif untuk menduga \mathbf{m} , b , dan komponen ragam \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 adalah sebagai berikut:

1. Tentukan nilai awal \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}_b^2 , \mathbf{m} dan b
(Nilai awal bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_b^2 dapat diambil dari penduga kuadrat terkecil, sedangkan nilai awal untuk $b = 0$)
2. Hitung:

$$\hat{\mathbf{m}} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}$$

Hitung vektor data terkoreksi

$$y^c = y - \hat{\mathbf{m}} - Zb$$

dan hitung nilai b melalui persamaan

$$b = (Z' \Sigma^{-1} Z + D^{-1})^{-1} Z' \Sigma^{-1} y^c$$

3. Hitung: $e = y - \hat{\mathbf{m}} - Zb$
4. Hitung nilai komponen ragam baru menggunakan:

$$\mathbf{s}^2 = \frac{1}{N} [e'A^{-1}e + \text{teras}\{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}]$$

$$\mathbf{s}_b^2 = \frac{1}{q} [b'R^{-1}b + \text{teras}\{(\mathbf{S}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}]$$

Dimana nilai \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_b^2 sebelah kanan mengambil nilai pada iterasi sebelumnya.

5. Ulangi 2-5 sampai konvergen.

Algoritma *iterative backfitting* di dalam aljabar linier lebih dikenal dengan sebutan metode Jacobi atau Gauss-Seidel. Menurut Anton (1987), metode Jacobi atau Gauss-Seidel terkadang berjumpa dengan kondisi yang divergen atau tidak konvergen, sehingga metode ini tidak selalu memberikan solusi. Pemilihan ekspresi dari persamaan parameter yang akan diduga dapat membantu diperolehnya kondisi yang konvergen.

Model Acak Tersarang Dua Faktor

Kasus Jumlah Taraf dan Ulangan Sama

Model (4.2) untuk jumlah taraf & ulangan sama dapat dituliskan sebagai:

$$y_{ijk} = \mathbf{m} + \mathbf{a}_i + \mathbf{b}_{ij} + \mathbf{e}_{ijk}, \quad i=1, 2, \dots, a; \quad j=1, 2, \dots, b; \quad \text{dan } k=1, 2, \dots, n$$

Dengan asumsi : $\mathbf{a}_i \sim N(0, \mathbf{s}_a^2)$, $\mathbf{b}_{ij} \sim N(0, \mathbf{s}_b^2)$, $\mathbf{e}_{ijk} \sim N(0, \mathbf{s}^2)$.

Sesuai dengan Tabel 10, rumus umum tabel analisis ragamnya dapat dituliskan seperti Tabel 14.

Tabel 14 Tabel analisis ragam untuk model acak tersarang dua faktor dengan ulangan sama

JK	db	KT	E(KT)
$S_3 = bn \sum (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$	v_3	$m_3 = S_3/v_3$	$\mathbf{s}_{123}^2 = \mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_b^2 + bn\mathbf{s}_a^2$
$S_2 = n \sum \sum (\bar{y}_{ij.} - \bar{y}_{i..})^2$	v_2	$m_2 = S_2/v_2$	$\mathbf{s}_{12}^2 = \mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_b^2$
$S_1 = \sum \sum \sum (\bar{y}_{ijk} - \bar{y}_{ij.})^2$	v_1	$m_1 = S_1/v_1$	$\mathbf{s}_1^2 = \mathbf{s}^2$

Keterangan: $v_1 = ab(n-1)$, $v_2 = a(b-1)$, $v_3 = (a-1)$,

$$m_1 = KTG, \quad m_2 = KTB, \quad m_3 = KTA$$

Berdasarkan model dan tabel analisis ragam di atas, fungsi kemungkinan bagi \mathbf{m} , \mathbf{s}_1^2 , \mathbf{s}_{12}^2 , dan \mathbf{s}_{123}^2 adalah sebagai berikut (Tiao & Box, 1967) :

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) \propto (\mathbf{s}_1^2)^{-\frac{1}{2}v_1} (\mathbf{s}_{12}^2)^{-\frac{1}{2}v_2} (\mathbf{s}_{123}^2)^{-\frac{1}{2}(v_3+1)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} \right\} \right] \dots \dots \dots (4.7)$$

Log dari fungsi kemungkinan persamaan (4.7) ini menjadi:

$$\log L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) = -\frac{1}{2} v_1 \log \mathbf{s}_1^2 - \frac{1}{2} v_2 \log \mathbf{s}_{12}^2 - \frac{1}{2} (v_3 + 1) \log \mathbf{s}_{123}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} \right\}$$

Turunan pertama fungsi ini terhadap \mathbf{m} , \mathbf{s}_1^2 , \mathbf{s}_{12}^2 , dan \mathbf{s}_{123}^2 adalah sebagai berikut:

- (a) $\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2}$
- (b) $\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_1^2} = -\frac{v_1}{2\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_1 m_1}{2\mathbf{s}_1^4}$
- (c) $\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{12}^2} = -\frac{v_2}{2\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_2 m_2}{2\mathbf{s}_{12}^4}$
- (d) $\frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{123}^2} = -\frac{v_3 + 1}{2\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}_{123}^4}$

Evaluasi keempat persamaan ini terhadap 0 menghasilkan

- (a) $\frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2} = 0$
 $\hat{\mathbf{m}} = \bar{y}_{...}$
- (b) $-\frac{v_1}{2\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_1 m_1}{2\mathbf{s}_1^4} = 0$
 $\hat{\mathbf{s}}^2 = m_1 = KTG$
- (c) $-\frac{v_2}{2\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_2 m_2}{2\mathbf{s}_{12}^4} = 0$
 $\hat{\mathbf{s}}_{12}^2 = m_2$
 $\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_b^2 = m_2$
 $\hat{\mathbf{s}}_b^2 = \frac{m_2 - \hat{\mathbf{s}}^2}{n} = \frac{KTB - KTG}{n}$

$$(d) -\frac{v_3 + 1}{2s_{123}^2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - m)^2}{2s_{123}^4} = 0$$

$$\hat{s}_{123}^2 = \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2}{v_3 + 1} = \frac{v_3 m_3}{v_3 + 1}$$

$$\hat{s}^2 + n\hat{s}_b^2 + bn\hat{s}_a^2 = \frac{v_3 m_3}{a}$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{\frac{v_3 m_3}{a} - \hat{s}^2 - n\hat{s}_b^2}{bn}$$

$$\hat{s}_a^2 = \frac{\frac{JKA}{a} - KTG - n\left(\frac{KTB - KTG}{n}\right)}{bn} = \frac{JKA/a - KTB}{bn}$$

Permasalahan yang dihadapi dalam pendugaan komponen ragam pada model acak tersarang adalah adanya kemungkinan diperolehnya penduga ragam yang negatif. Oleh karena itu, Searle *et al.* (1992) memberikan penduga kemungkinan maksimum bagi komponen ragam tersebut seperti yang disajikan pada Tabel 15.

Tabel 15 Penduga kemungkinan maksimum bagi s^2 , s_b^2 , dan s_a^2 pada model acak tersarang dua faktor

Kondisi yang dihadapi oleh solusi KM	Nilai Penduga Kemungkinan Maksimum (KM)		
	\hat{s}_a^2	\hat{s}_b^2	\hat{s}
$\hat{s}_a^2 \geq 0, \hat{s}_b^2 \geq 0$	$\frac{JKA/a - KTB}{bn}$	$\frac{KTB - KTG}{n}$	KTG
$\hat{s}_a^2 \geq 0, \hat{s}_b^2 < 0$	$\frac{JKA/a - \hat{s}^2}{bn}$	0	$\frac{JKG + JKB}{a(bn - 1)}$
$\hat{s}_a^2 < 0, \hat{s}_b^2 \geq 0$	0	$\frac{1}{n} \left(\frac{JKA + JKB}{ab} - KTG \right)$	KTG
$\hat{s}_a^2 < 0, \hat{s}_b^2 < 0$	0	0	$\frac{JKT}{abn}$

Ragam bagi \hat{m} dapat diperoleh melalui turunan kedua dari fungsi $\log L$ di atas sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial m^2} = -\frac{abn}{s_{123}^2}$$

Dengan demikian $ragam(\hat{m}) = \frac{\mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_b^2 + bn\mathbf{s}_a^2}{abn}$.

Kasus Jumlah Taraf dan Ulangan Tidak Sama

Menurut Searle *et al.* (1992), tidak ada bentuk tertutup (*closed form*) persamaan penduga kemungkinan maksimum bagi komponen ragam pada model tersarang dua faktor (model 4.2) untuk kasus jumlah ulangan yang tidak sama. Khusus untuk penduga bagi m , Searle (1970) telah menurunkan penduga kemungkinan maksimumnya sebagai berikut:

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^a \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}} \bar{y}_{ij}}{\sum_{i=1}^a \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}} = \frac{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} k_{ij} \bar{y}_{ij}}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^{b_i} k_{ij}} \dots\dots\dots (4.8)$$

dimana $1/k_{ij} = \left(\mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}_e^2/n_{ij} \right) \left(1 + \mathbf{s}_a^2 \sum_j \frac{1}{\mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}_e^2/n_{ij}} \right)$.

Sedangkan ragamnya adalah sebagai berikut:

$$Var(\hat{m}) = 1/1'V^{-1}1 = 1/\sum_{i=1}^a \frac{1}{q_i} \sum_{j=1}^{b_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}$$

Dimana: $m_{ij} = n_{ij}\mathbf{s}_b^2 + \mathbf{s}_e^2$
 $q_i = 1 + \mathbf{s}_a^2 \sum_{j=1}^{c_i} \frac{n_{ij}}{m_{ij}}$.

4.4. Penerapan

Pada sub bab penerapan ini akan dicoba kan menerapkan pendekatan menggunakan metode kuadrat terkecil dan metode kemungkinan maksimum pada data sampling untuk pendugaan produktivitas komoditas hortikultura. Metode analisis akan dicobakan untuk kasus jumlah ulangan sama dan jumlah ulangan yang berbeda.

Data yang digunakan adalah data hasil ujicoba penentuan produktivitas komoditas hortikultura yang telah dilakukan oleh Pusdatin Departemen Pertanian pada Tahun 2002 di Kabupaten Brebes. Jumlah plot contoh sebenarnya adalah 40 plot yang tersebar di dua kecamatan dan lima desa. Data ini akan digunakan analisis untuk kasus jumlah

ulangan tidak sama. Sedangkan untuk kasus jumlah ulangan sama (jumlah petani atau plot contoh per dusun sama), akan dilakukan dengan cara mereduksi data hasil ujicoba tersebut sehingga setiap dusun hanya ada enam petani saja seperti yang disajikan pada Tabel 16.

Penerapan untuk ulangan sama menggunakan data yang disajikan pada Tabel 16. Hasil analisis ragam terhadap data tersebut adalah sebagai berikut:

Sumber	DB	JK	KT	F	P
Dusun	4	124.3567	31.0892	6.681	0.001
Petani	25	116.3300	4.6532		
Total	29	240.6867			

Komponen Ragam

Sumber	Komp. Ragam	%	
		Total	StDev
Dusun	4.406	48.64	2.099
Petani	4.653	51.36	2.157
Total	9.059		3.010

Berdasarkan tabel analisis ragam di atas dan dengan hipotesis $H_0: s_a^2 = 0$ vs $H_1: s_a^2 > 0$ dapat disimpulkan bahwa H_0 ditolak, artinya produktivitas antar dusun nyata beragam. Dari tabel di atas dapat dilihat bahwa penduga bagi ragam galat (s^2) dan ragam antar dusun (s_a^2) masing-masing sebesar 4.653 dan 4.406.

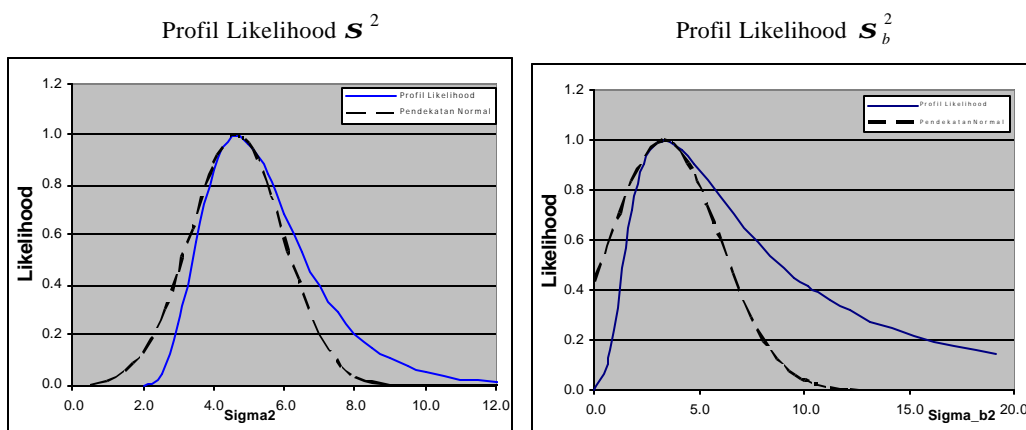
Dengan menggunakan metode kemungkinan maksimum ternyata diperoleh penduga bagi s^2 dan s_a^2 masing-masing sebesar 4.653 dan 3.370, sedangkan penduga bagi m dan $\text{var}(\hat{m})$ masing-masing sebesar 25.267 dan 0.829. Dari hasil ini terlihat bahwa hasil dugaan s_a^2 metode kuadrat terkecil berbeda dengan metode kemungkinan maksimum, sedangkan hasil dugaan terhadap s^2 sama.

Dengan menggunakan kebalikan matriks informasi Fisher, diperoleh ragam bagi s^2 dan s_a^2 masing-masing sebesar 1.720 dan 6.873. Sesuai dengan teori asimtotik normal, sebaran kedua komponen ragam tersebut adalah $\hat{s}^2 \sim N(s^2, 1.720)$ dan $\hat{s}_a^2 \sim N(s_a^2, 6.873)$. Dengan demikian selang kepercayaan 95% bagi s^2 dan s_a^2 masing-masing adalah (2.082, 7.224) dan (-1.769, 8.508). Khusus untuk s_a^2 , selang

kepercayaannya mencakup nilai 0, berarti bertentangan dengan hasil pengujian menggunakan analisis ragam.

Perbandingan fungsi kemungkinan bagi s^2 dan s_a^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal disajikan pada Gambar 4.1. Dari hasil perbandingan ini dapat dilihat bahwa ternyata pendekatan fungsi kemungkinan normal cukup baik untuk s^2 , tetapi berbeda cukup jauh untuk s_a^2 . Salah satu penyebab ketidakkonsistenan hasil pengujian analisis ragam dengan metode kemungkinan maksimum terhadap s_a^2 adalah adanya korelasi *interclass* yang cukup tinggi (Pawitan, 2001). Besarnya nilai korelasi *interclass* pada data contoh tersebut di atas adalah:

$$cor(y_{ij}, y_{ik}) = \frac{\hat{S}_a^2}{\hat{S}^2 + \hat{S}_a^2} = 0.42$$



Gambar 5 Perbandingan fungsi kemungkinan bagi s^2 dan s_a^2 dengan fungsi kemungkinan asimtotik normal

Penerapan untuk kasus jumlah ulangan yang tidak sama menggunakan data yang disajikan pada Tabel 7 (Bab 3). Hasil analisis ragam terhadap data tersebut adalah sebagai berikut:

Sumber	DB	JK	KT
Dusun	4	204.0576	51.0144
Petani	35	129.9934	3.7141
Total	39	334.0510	

Komponen Ragam

Sumber	Komp. Ragam	%	
		Total	StDev
Dusun	6.074	62.05	2.465
Petani	3.714	37.95	1.927
Total	9.788		3.129

Dari tabel di atas diperoleh penduga kuadrat terkecil bagi s^2 dan s_a^2 masing-masing adalah 3.714 dan 6.074. Sedangkan menggunakan metode kemungkinan maksimum diperoleh penduga bagi s^2 dan s_a^2 masing-masing adalah 3.701 dan 3.867 (program perhitungan penduga s^2 dan s_a^2 menggunakan bahasa R disajikan pada Lampiran). Dari hasil pendugaan terhadap s^2 ternyata kedua metode memberikan hasil yang relatif sama, tetapi terhadap s_a^2 ternyata kedua metode memberikan perbedaan hasil yang cukup jauh. Sedangkan penduga kemungkinan maksimum bagi m dan $\text{var}(\hat{m})$ masing-masing sebesar 25.305 dan 0.873.

Tabel 16 Data hasil ubinan dengan jumlah petani per dusun sama

No	Kecamatan	Desa	Dusun	Produktivitas
1	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	22.6
2	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	22.7
3	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	23.6
4	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	21.5
5	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	18.2
6	Paguyangan	Pandansari	Kalikidang	21.5
7	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	25.3
8	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	22.8
9	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	26.0
10	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	24.6
11	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	22.1
12	Sirampog	Batursari	Dukuh Tengah	25.6
13	Sirampog	Dawuhan	Paingan	26.9
14	Sirampog	Dawuhan	Paingan	23.2
15	Sirampog	Dawuhan	Paingan	27.8
16	Sirampog	Dawuhan	Paingan	24.6
17	Sirampog	Dawuhan	Paingan	28.7
18	Sirampog	Dawuhan	Paingan	31.7
19	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	23.0
20	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	26.2
21	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	27.4
22	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	28.2
23	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	24.3
24	Sirampog	Igirklanceng	Igir Tengah	27.9
25	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	28.8
26	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	24.3
27	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	26.1
28	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	25.5
29	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	28.8
30	Sirampog	Wanareja	Gronggongan	28.1

V. PENDEKATAN BAYES PADA MODEL ACAK

5.1. Pendahuluan

Pada banyak kasus, seringkali dapat diperoleh informasi awal tentang parameter yang akan diduga. Sebagai contoh adalah pada kasus pendugaan produktivitas tanaman hortikultura yang telah dibahas pada Bab 2. Pada saat melakukan *listing* di dusun, sebenarnya dari setiap petani dapat juga dikumpulkan informasi tentang perkiraan produksi dan/atau produksi pada musim sebelumnya. Data produksi (atau produktivitas) ini dapat dijadikan sebagai data dasar (awal) untuk memperbaiki hasil pendugaan dari data plot yang diperoleh dari dusun yang bersangkutan. Salah satu metode yang dapat memanfaatkan informasi awal tersebut dalam proses pendugaan parameter adalah metode Bayes.

Pada banyak literatur/penelitian, misalnya dapat dilihat pada Lindley & Smith (1972) dan Berger (1985), metode Bayes dapat memberikan dugaan yang lebih baik dibandingkan dengan metode-metode klasik seperti metode kuadrat terkecil atau metode kemungkinan maksimum.

Metode Bayes merupakan salah satu metode pendugaan parameter yang memanfaatkan informasi awal tentang parameter yang akan diduga (θ) yang biasa disebut sebagai informasi prior ($\pi(\theta)$) dan informasi dari contoh (\mathbf{x}). Informasi awal dan informasi contoh ini dikombinasikan membentuk suatu sebaran yang disebut sebagai sebaran posterior, yang merupakan sebaran dasar pengambilan keputusan atau pengujian dalam metode Bayes (Berger, 1985).

Sebaran posterior θ jika diketahui \mathbf{x} dilambangkan dengan $\pi(\theta|\mathbf{x})$ didefinisikan sebagai sebaran bersyarat θ jika data contoh \mathbf{x} diketahui. Andaikan θ dan \mathbf{X} memiliki fungsi kepekatan bersama:

$$h(x, \mathbf{q}) = \mathbf{p}(\mathbf{q}) f(x | \mathbf{q}),$$

dan \mathbf{X} memiliki kepekatan marginal:

$$m(x) = \int_{\mathbf{q}} f(x | \mathbf{q}) dF^{\mathbf{p}}(\mathbf{q}),$$

maka untuk $m(\mathbf{x}) \neq 0$ dapat diperoleh sebaran posterior sebagai berikut:

$$\mathbf{p}(\mathbf{q} | x) = \frac{h(x, \mathbf{q})}{m(x)}$$

Sebaran prior merefleksikan pengetahuan atau keyakinan peneliti tentang θ , yang pada umumnya informasi ini tersedia (Moore, 1997). Sedangkan $\pi(\theta|\mathbf{x})$ merupakan refleksi dari perbaikan nilai θ setelah dilakukan observasi contoh \mathbf{x} . Atau dengan perkataan lain, sebaran posterior merupakan kombinasi antara informasi awal tentang θ dengan informasi tentang θ yang dibawa oleh contoh \mathbf{x} .

Pada bab ini akan dicoba menelaah pendekatan Bayes untuk pendugaan parameter model acak persamaan (4.1) dan (4.2).

5.2. Penentuan Prior

Sebaran prior secara garis besar dapat ditentukan melalui dua cara, yaitu secara subyektif dan secara empiris. Pada umumnya, sebaran posterior $p(\mathbf{q} | x)$ dan sebaran marginal $m(x)$ tidak mudah ditentukan. Ada kelas sebaran prior yang membuat sebaran posterior $p(\mathbf{q} | x)$ dapat ditentukan dengan mudah yang disebut sebagai *conjugate prior*. Sebaran *conjugate prior* pada berbagai fungsi kemungkinan sebaran keluarga eksponen disajikan pada Tabel 17.

Dengan adanya prior *conjugate*, untuk mendapatkan sebaran posterior $p(\mathbf{q} | x)$, kita tidak perlu menghitung sebaran marginal $m(x)$. Secara umum, sebaran posterior $p(\mathbf{q} | x)$ dapat ditentukan melalui kaidah berikut (Gill, 2002):

$$p(\mathbf{q} | x) \propto p(\mathbf{q})L(\mathbf{q} | x)$$

dimana $p(\mathbf{q})$ adalah sebaran prior bagi \mathbf{q} , dan $L(\mathbf{q} | x)$ merupakan fungsi kemungkinan \mathbf{q} .

Untuk ukuran pemusatan, prior yang paling umum digunakan adalah sebaran normal. Sebaran normal sangat umum digunakan, baik pada pendekatan-pendekatan Bayesian maupun Non-Bayesian. Beberapa alasan yang mendasarinya antara lain (Gill, 2002): (1) secara alamiah data empiris kebanyakan mengikuti pola sebaran normal, yang diperkuat juga dengan adanya dalil limit pusat; (2) Banyak kelas sebaran posterior dapat dimodelkan dengan mengkombinasikan asumsi fungsi kemungkinan normal dengan prior yang berbeda; (3) Pada banyak model Bayesian lebih sulit dalam mendapatkan penduga secara numerik, tetapi sebaran normal memberikan sebaran

posterior yang mudah ditelusuri secara analitik. Sedangkan untuk ukuran keragaman (parameter ragam), sebaran prior yang paling umum digunakan adalah Inverse Gamma.

Tabel 17 Beberapa bentuk sebaran keluarga eksponen dan *conjugate prior* (Gill, 2002)

Sebaran fungsi kemungkinan	Sebaran <i>conjugate prior</i>	Hyperparameter
Bernoulli	Beta	$a > 0, b > 0$
Binomial	Beta	$a > 0, b > 0$
Multinomial	Dirichlet	$q_j > 0, \sum q_j = q_0$
Negative Binomial	Beta	$a > 0, b > 0$
Poisson	Gamma	$a > 0, b > 0$
Exponential	Gamma	$a > 0, b > 0$
Gamma	Gamma	$a > 0, b > 0$
Normal untuk \mathbf{m}	Normal	$\mathbf{m} \in R, \mathbf{s}^2 > 0$
Normal untuk \mathbf{s}^2	Inverse Gamma	$a > 0, b > 0$
Pareto untuk \mathbf{a}	Gamma	$a > 0, b > 0$
Pareto untuk \mathbf{b}	Pareto	$a > 0, b > 0$
Uniform	Pareto	$a > 0, b > 0$

Pada keadaan tertentu, prior yang kita tentukan tidak dapat memberikan informasi secara spesifik tentang parameter \mathbf{q} . Sebagai contoh, untuk parameter lokasi \mathbf{m} hanya dapat menyebutkan $-\infty < \mathbf{m} < \infty$; atau untuk parameter ragam \mathbf{s}^2 hanya dapat menyebutkan $\mathbf{s}^2 > 0$. Prior untuk kasus yang demikian disebut sebagai *noninformative prior*, yang berarti prior yang tidak mengandung informasi tentang \mathbf{q} (Berger, 1985).

Metode yang paling umum digunakan untuk menentukan *noninformative prior* adalah metode yang dikemukakan oleh Jeffreys (1961) dalam Berger (1985), yaitu mengambil nilai akar kuadrat nilai harapan dari informasi Fisher $I(\mathbf{q})$ sebagai *noninformative prior* seperti berikut:

$$p(\mathbf{q}) = [I(\mathbf{q})]^{-\frac{1}{2}}$$

Secara umum, untuk parameter lokasi \mathbf{m} dan parameter regresi \mathbf{b} , *noninformative prior*-nya adalah

$$p(\mathbf{m}) \propto c \text{ atau } p(\mathbf{b}) \propto c.$$

Sedangkan *noninformative prior* untuk parameter ragam \mathbf{s}^2 adalah

$$p(\mathbf{s}^2) \propto \frac{1}{\mathbf{s}^2} \quad (\text{Berger, 1985 dan Kass \& Wasserman, 1996}).$$

Khusus untuk model acak satu faktor (persamaan 4.1), sebaran priornya berkaitan dengan parameter \mathbf{m} , \mathbf{s}_a^2 , dan \mathbf{s}^2 . Pada kasus model ini akan dibahas untuk sebaran prior sebagai berikut:

- (1). Untuk parameter \mathbf{m} akan dicoba dua prior, yaitu *noninformative prior* dan prior normal, yaitu $\mathbf{m} \sim N(\mathbf{t}, \mathbf{d}^2)$
- (2). Untuk parameter \mathbf{s}_a^2 akan dicoba dua prior, yaitu *noninformative prior* dan prior normal, yaitu $\hat{\mathbf{s}}_a^2 \sim N(m, \mathbf{g}^2)$
- (3). Untuk parameter \mathbf{s}^2 akan dicoba menggunakan *noninformative prior*.

Sedangkan untuk model acak dua faktor tersarang (persamaan 4.2), sebaran priornya berkaitan dengan parameter \mathbf{m} , \mathbf{s}_a^2 , \mathbf{s}_b^2 dan \mathbf{s}^2 . Pada kasus model ini, ada dua sebaran prior untuk parameter \mathbf{m} akan dibahas, yaitu *noninformative prior* dan prior normal $\mathbf{m} \sim N(\mathbf{t}, \mathbf{d}^2)$, sedangkan untuk parameter komponen ragam \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}_b^2 , dan \mathbf{s}_a^2 menggunakan *noninformative prior* saja.

5.3. Pendekatan Bayes

Sub bab ini akan membahas pendekatan Bayes untuk kasus model acak persamaan (4.1) dan (4.2) yang telah dibahas pada Bab 4. Sedangkan sebaran priornya menggunakan kombinasi prior yang diungkapkan pada Sub Bab 5.2.

Secara umum, pada model acak satu faktor, jika diketahui prior untuk \mathbf{m} , \mathbf{s}_a^2 , dan \mathbf{s}^2 yang masing-masing adalah $p_1(\mathbf{m})$, $p_2(\mathbf{s}_a^2)$, dan $p_3(\mathbf{s}^2)$, maka fungsi sebaran posterior bagi $\mathbf{q} = \mathbf{m}, \mathbf{s}_a^2, \mathbf{s}^2$ dapat dinyatakan sebagai

$$p(\mathbf{q} | y) = L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_a^2, \mathbf{s}^2 | y) p_1(\mathbf{m} | \mathbf{s}_a^2, \mathbf{s}^2) p_2(\mathbf{s}_a^2) p_3(\mathbf{s}^2).$$

Pendekatan Bayes untuk Model Acak Satu Faktor

a. Kasus *noninformative prior* untuk m , s_a^2 , dan s^2

Dengan mengacu pada fungsi kemungkinan (4.5), maka bg fungsi posterior untuk model acak satu faktor yang dimaksud di sini (persamaan 4.1) adalah sebagai berikut:

$$\log p(\mathbf{q} | y) \propto -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(N - a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log I_i - \frac{JKE}{2\mathbf{s}^2} - \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2I_i} + \log \frac{1}{\mathbf{s}_a^2} + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}.$$

dengan $I_i = \mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2$.

Penurunan fungsi ini terhadap m menghasilkan

$$\frac{\partial \log p}{\partial m} = \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - m)}{I_i}.$$

Selanjutnya, dengan mengevaluasi fungsi ini terhadap 0 diperoleh

$$\sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - m)}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} = 0$$

$$\hat{m} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}.$$

Untuk kasus jumlah ulangan sama, penduga \hat{m} akan diperoleh sama seperti penduga kuadrat terkecil dan penduga kemungkinan maksimum, yaitu $\hat{m} = \bar{y}_{..}$.

Sedangkan ragam dari \hat{m} dapat diperoleh dengan cara yang sama dengan penduga kemungkinan maksimum seperti yang telah dibahas pada Bab 4, sehingga diperoleh

$$ragam(\hat{m}) = \left(\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} \right)^{-1}.$$

Untuk kasus jumlah ulangan sama akan diperoleh $ragam(\hat{m})$ sama seperti penduga kemungkinan maksimum, yaitu $ragam(\hat{m}) = \frac{\hat{s}^2 + n \hat{s}_a^2}{an}$.

Penduga bagi komponen ragam s_a^2 dan s^2 tidak dapat diperoleh dalam bentuk *closed form*, oleh karena itu akan diturunkan dalam bentuk proses pendugaan

menggunakan algoritma iteratif. Selanjutnya, penurunan penduga bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 (sama dengan \mathbf{s}_b^2 pada fungsi berikut) dapat diperoleh dari fungsi tujuan atau profil *posterior* sebagai berikut:

$$Q \propto -\frac{N}{2} \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2\mathbf{s}^2} e'A^{-1}e - \frac{q}{2} \log \mathbf{s}_b^2 - \frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} \log b'R^{-1}b - \frac{1}{2} \log |\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1}| + \log \frac{1}{\mathbf{s}_b^2} + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}.$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{s}_b^2 dan \mathbf{s}^2 menghasilkan:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e'Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\} - \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}_b^2} = -\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\} - \frac{1}{\mathbf{s}_b^2}.$$

Dengan mengevaluasi pada nilai 0, diperoleh

$$-\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e'Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\} - \frac{1}{\mathbf{s}^2} = 0$$

$$\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{\mathbf{s}^2} = \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e'Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}$$

$$\frac{N\mathbf{s}^2}{2} + \mathbf{s}^2 = \frac{1}{2} e'Ae + \frac{1}{2} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\}$$

$$\mathbf{s}^2 = \left(\frac{1}{N+2} \right) \left(e'Ae + \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}Z'A^{-1}Z\} \right)$$

$$-\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\} - \frac{1}{\mathbf{s}_b^2} = 0$$

$$\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{\mathbf{s}_b^2} = \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}$$

$$\frac{q\mathbf{s}_b^2}{2} + \mathbf{s}_b^2 = \frac{1}{2} b'R^{-1}b + \frac{1}{2} \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\}$$

$$\mathbf{s}_b^2 = \left(\frac{1}{q+2} \right) \left(b'R^{-1}b + \text{teras} \{(\mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1})^{-1}R^{-1}\} \right).$$

Dengan demikian, algoritma untuk menduga \mathbf{m} , b , dan komponen ragam \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 adalah sebagai berikut:

6. Tentukan nilai awal \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}_b^2 , \mathbf{m} dan b
(Nilai awal bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_b^2 dapat diambil dari penduga kuadrat terkecil, sedangkan nilai awal untuk b dapat diambil = 0)

7. Hitung:

$$\mathbf{m} = \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2}}$$

Hitung vektor data terkoreksi

$$y^c = y - \mathbf{1m} - \mathbf{Zb}$$

dan hitung nilai b melalui persamaan

$$b = (\mathbf{Z}' \Sigma^{-1} \mathbf{Z} + D^{-1})^{-1} \mathbf{Z}' \Sigma^{-1} y^c$$

8. Hitung: $e = y - \mathbf{1m} - \mathbf{Zb}$

9. Hitung nilai komponen ragam baru menggunakan:

$$\mathbf{s}^2 = \left(\frac{1}{N+2} \right) \left(e' A e + \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} \mathbf{Z}' A^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} \mathbf{Z}' A^{-1} \mathbf{Z} \} \right)$$

$$\mathbf{s}_b^2 = \left(\frac{1}{q+2} \right) \left(b' R^{-1} b + \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} \mathbf{Z}' A^{-1} \mathbf{Z} + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} \right)$$

Dimana nilai \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_b^2 sebelah kanan mengambil nilai pada iterasi sebelumnya.

10. Ulangi 2-5 sampai konvergen.

b. Kasus *noninformative prior* untuk \mathbf{m} dan \mathbf{s}^2 , sedangkan $\hat{\mathbf{s}}_a^2 \sim N(m, \mathbf{g}^2)$

Log fungsi posterior untuk kasus ini adalah sebagai berikut:

$$\log \mathbf{p}(\mathbf{q} | y) \propto -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2} (N-a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log \mathbf{I}_i - \frac{JKE}{2\mathbf{s}^2} - \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{I}_i} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{s}_a^2 - m}{\mathbf{g}} \right)^2 + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{m} , kemudian dievaluasi pada nilai 0 akan menghasilkan penduga \mathbf{m} dan $\text{ragam}(\hat{\mathbf{m}})$ yang sama dengan kasus-a.

Penduga bagi komponen ragam \mathbf{s}_a^2 dan \mathbf{s}^2 juga tidak dapat diperoleh dalam bentuk *closed form*, oleh karena itu pendugaannya dilakukan secara iteratif.

Selanjutnya, penurunan penduga bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 (sama dengan \mathbf{s}_b^2 pada fungsi berikut) akan diperoleh dari fungsi tujuan atau profil *posterior* sebagai berikut:

$$Q \propto -\frac{N}{2} \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2\mathbf{s}^2} e' Ae - \frac{q}{2} \log \mathbf{s}_b^2 - \frac{1}{2\mathbf{s}_b^2} b'R^{-1}b - \frac{1}{2} \log |\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1}| + \log \mathbf{s}^{-2} - \frac{1}{2\mathbf{g}^2} (\mathbf{s}_b^2 - m)^2$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{s}_b^2 dan \mathbf{s}^2 menghasilkan:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e' Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \} - \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}_b^2} = -\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} - \frac{1}{\mathbf{g}^2} (\mathbf{s}_b^2 - m)$$

Dengan mengevaluasi pada nilai 0, diperoleh

$$-\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e' Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \} - \frac{1}{\mathbf{s}^2} = 0$$

$$\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{\mathbf{s}^2} = \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e' Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \}$$

$$\frac{N\mathbf{s}^2}{2} + \mathbf{s}^2 = \frac{1}{2} e' Ae + \frac{1}{2} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \}$$

$$\mathbf{s}^2 = \left(\frac{1}{N+2} \right) \left(e' Ae + \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \} \right)$$

$$-\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} - \frac{\mathbf{s}_b^2}{\mathbf{g}^2} + \frac{m}{\mathbf{g}^2} = 0$$

$$\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} = \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} - \frac{1}{\mathbf{g}^2} (\mathbf{s}_b^2 - m)$$

$$\mathbf{s}_b^2 = -\frac{q\mathbf{g}^2}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{\mathbf{g}^2}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{\mathbf{g}^2}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} + m \dots\dots (5.1)$$

atau

$$\mathbf{s}_b^2 = \left(\frac{1}{q} \right) \left(b'R^{-1}b + \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} - \frac{2\mathbf{s}_b^4}{\mathbf{g}^2} (\mathbf{s}_b^2 - m) \right) \dots\dots (5.2)$$

Dengan demikian, algoritma pendugaan \mathbf{s}_b^2 dan \mathbf{s}^2 sama dengan kasus-a, tetapi hanya mengganti rumus \mathbf{s}_b^2 dengan persamaan (5.1) atau (5.2).

c. Kasus *noninformative prior* untuk \mathbf{s}_a^2 dan \mathbf{s}^2 , sedangkan $m \sim N(t, d^2)$

Log fungsi posterior untuk kasus ini adalah sebagai berikut:

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\log p(\mathbf{q} | y) \propto -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2}(N - a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log \mathbf{l}_i - \frac{JKE}{2\mathbf{s}^2} - \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{l}_i} - \frac{1}{2d^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t})^2 + \log \frac{1}{\mathbf{s}_a^2} + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}.$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{m} menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{m}} &= \sum_i \frac{n_i(\bar{y}_i - \mathbf{m})}{\mathbf{l}_i} - \frac{(\mathbf{m} - \mathbf{t})}{d^2} \\ &= \sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{l}_i} - \sum_i \frac{n_i \mathbf{m}}{\mathbf{l}_i} - \frac{\mathbf{m}}{d^2} + \frac{\mathbf{t}}{d^2}. \end{aligned}$$

Dengan mengevaluasi fungsi ini terhadap 0 dan memasukkan nilai $\mathbf{l}_i = \mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} - \mathbf{m} \left(\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} + \frac{1}{d^2} \right) + \frac{\mathbf{t}}{d^2} &= 0 \\ \hat{\mathbf{m}} &= \frac{\sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} + \frac{\mathbf{t}}{d^2}}{\sum_i \frac{n_i}{\mathbf{s}^2 + n_i \mathbf{s}_a^2} + \frac{1}{d^2}} \dots \dots \dots (5.3) \end{aligned}$$

Selanjutnya, turunan kedua dari log fungsi posteriornya menghasilkan:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \mathbf{m} \partial \mathbf{m}} = - \sum_i \frac{n_i}{\mathbf{l}_i} - \frac{1}{d^2}.$$

Dengan demikian, ragam dari $\hat{\mathbf{m}}$ adalah

$$\text{ragam}(\hat{\mathbf{m}}) = \left(\sum_i \frac{n_i}{\hat{\mathbf{s}}^2 + n_i \hat{\mathbf{s}}_a^2} + \frac{1}{d^2} \right)^{-1}.$$

Penduga bagi komponen ragam \mathbf{s}_a^2 dan \mathbf{s}^2 akan diturunkan dalam bentuk proses pendugaan menggunakan algoritma iteratif. Selanjutnya, penurunan penduga bagi \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 (sama dengan \mathbf{s}_b^2 pada fungsi berikut) akan diperoleh dari fungsi tujuan atau profil *likelihood* sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Q \propto -\frac{N}{2} \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2\mathbf{s}^2} e'A^{-1}e - \frac{q}{2} \log \mathbf{s}_b^2 - \frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} \log b'R^{-1}b \\ - \frac{1}{2} \log | \mathbf{s}^{-2}Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2}R^{-1} | + \log \frac{1}{\mathbf{s}_b^2} + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}. \end{aligned}$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{s}_b^2 dan \mathbf{s}^2 menghasilkan:

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}^2} = -\frac{N}{2\mathbf{s}^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} e'Ae + \frac{1}{2\mathbf{s}^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} Z'A^{-1}Z \} - \frac{1}{\mathbf{s}^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{s}_b^2} = -\frac{q}{2\mathbf{s}_b^2} + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} b'R^{-1}b + \frac{1}{2\mathbf{s}_b^4} \text{teras} \{ (\mathbf{s}^{-2} Z'A^{-1}Z + \mathbf{s}_b^{-2} R^{-1})^{-1} R^{-1} \} - \frac{1}{\mathbf{s}_b^2}$$

Dengan mengevaluasi pada nilai 0, diperoleh sama dengan kasus-a. Dengan demikian, algoritma perhitungan bagi penduga parameter \mathbf{m} , \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 mirip dengan butir a, tetapi hanya berbeda pada bagian penentuan penduga bagi \mathbf{m} (menggunakan persamaan 5.3).

d. Kasus noninformative prior untuk \mathbf{s}^2 , sedangkan $\mathbf{m} \sim N(\mathbf{t}, \mathbf{d}^2)$ dan $\hat{\mathbf{s}}_a^2 \sim N(\mathbf{m}, \mathbf{g}^2)$

Log fungsi posterior untuk kasus ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \log \mathbf{p} \propto & -\frac{N}{2} \log 2\mathbf{p} - \frac{1}{2} (N - a) \log \mathbf{s}^2 - \frac{1}{2} \sum_i \log \mathbf{I}_i - \frac{JKE}{2\mathbf{s}^2} - \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{I}_i} \\ & - \frac{1}{2\mathbf{d}^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t})^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{s}_a^2 - \mathbf{m}}{\mathbf{g}} \right)^2 + \log \frac{1}{\mathbf{s}^2}. \end{aligned}$$

Penurunan fungsi ini terhadap \mathbf{m} menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{m}} &= \sum_i \frac{n_i (\bar{y}_i - \mathbf{m})}{\mathbf{I}_i} - \frac{(\mathbf{m} - \mathbf{t})}{\mathbf{d}^2} \\ &= \sum_i \frac{n_i \bar{y}_i}{\mathbf{I}_i} - \sum_i \frac{n_i \mathbf{m}}{\mathbf{I}_i} - \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}^2} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{d}^2}. \end{aligned}$$

Dengan mengevaluasi fungsi ini terhadap 0 akan diperoleh penduga bagi \mathbf{m} sama dengan kasus-c. Ragam bagi $\hat{\mathbf{m}}$ juga akan sama dengan kasus-c.

Proses perhitungan untuk komponen ragam \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 akan sama dengan kasus -b, dengan demikian algoritma pendugaan bagi parameter \mathbf{m} , \mathbf{s}^2 dan \mathbf{s}_a^2 mirip dengan kasus-b, tetapi hanya berbeda pada bagian penentuan penduga bagi \mathbf{m} (menggunakan persamaan 5.3).

Pendekatan Bayes untuk Model Acak Dua Faktor Tersarang

Pendekatan Bayes pada model acak dua faktor tersarang yang akan dibahas pada tulisan ini hanya pada kasus jumlah taraf tersarang dan jumlah ulangan yang sama (seimbang). Sedangkan kasus sebaran prior bagi parameter modelnya akan dibahas dua keadaan, yaitu (a) kasus semua parameter $\mathbf{m}, \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_b^2$ dan \mathbf{s}_a^2 *noninformative prior*, dan (b) kasus $\mathbf{m} \sim N(\mathbf{t}, \mathbf{d}^2)$, sedangkan $\mathbf{s}^2, \mathbf{s}_b^2$ dan \mathbf{s}_a^2 *noninformative prior*.

a. Kasus semua parameter $\mathbf{m}, \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_b^2$ dan \mathbf{s}_a^2 *noninformative prior*

Dengan mengingat (Tabel 14) bahwa $\mathbf{s}_1^2 = \mathbf{s}^2, \mathbf{s}_{12}^2 = \mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_b^2$, dan $\mathbf{s}_{123}^2 = \mathbf{s}^2 + n\mathbf{s}_b^2 + bn\mathbf{s}_a^2$ maka *noninformative prior* bagi $\mathbf{s}^2, \mathbf{s}_b^2$ dan \mathbf{s}_a^2 akan setara dengan *noninformative prior* bagi $\mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2$ dan \mathbf{s}_{123}^2 . Di sisi lain, menurut (Tiao & Box, 1967), sebaran bersama *noninformative prior* bagi $\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2$ dan \mathbf{s}_{123}^2 adalah:

$$p(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) \propto \mathbf{s}_1^{-2}, \mathbf{s}_{12}^{-2}, \mathbf{s}_{123}^{-2}.$$

Dengan demikian, dengan merujuk pada persamaan (4.7), maka fungsi kemungkinan bagi $\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2$ dan \mathbf{s}_{123}^2 menjadi:

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) \propto (\mathbf{s}_1^2)^{-\frac{1}{2}v_1} (\mathbf{s}_{12}^2)^{-\frac{1}{2}v_2} (\mathbf{s}_{123}^2)^{-\frac{1}{2}(v_3+1)} \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} \right\} \right] \times \frac{1}{\mathbf{s}_1^2} \frac{1}{\mathbf{s}_{12}^2} \frac{1}{\mathbf{s}_{123}^2}.$$

Log dari fungsi kemungkinan ini menjadi:

$$\log L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) = -\frac{1}{2} v_1 \log \mathbf{s}_1^2 - \frac{1}{2} v_2 \log \mathbf{s}_{12}^2 - \frac{1}{2} v_3 \log \mathbf{s}_{123}^2 - \frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} \right\} - \log \mathbf{s}_1^2 - \log \mathbf{s}_{12}^2 - \log \mathbf{s}_{123}^2.$$

Turunan pertama terhadap $\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2$, dan \mathbf{s}_{123}^2 adalah sebagai berikut:

$$(a) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2}$$

$$(b) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_1^2} = -\frac{v_1}{2\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_1 m_1}{2\mathbf{s}_1^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_1^2}$$

$$(c) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{12}^2} = -\frac{v_2}{2\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_2 m_2}{2\mathbf{s}_{12}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{12}^2}$$

$$(d) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{123}^2} = -\frac{v_3 + 1}{2\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}_{123}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{123}^2}.$$

Evaluasi keempat persamaan ini terhadap 0 menghasilkan

$$(a) \quad \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2} = 0$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \bar{y}_{...}$$

$$(b) \quad -\frac{v_1}{2\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_1 m_1}{2\mathbf{s}_1^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_1^2} = 0$$

$$-\frac{\mathbf{s}_1^2 v_1 + v_1 m_1}{2} - \mathbf{s}_1^2 = 0$$

$$\mathbf{s}_1^2 v_1 + 2\mathbf{s}_1^2 = v_1 m_1$$

$$\hat{\mathbf{s}}^2 = \frac{v_1 m_1}{v_1 + 2} = \frac{JKG}{ab(n-1) + 2}$$

$$(c) \quad -\frac{v_2}{2\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_2 m_2}{2\mathbf{s}_{12}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{12}^2} = 0$$

$$-\frac{v_2 \mathbf{s}_{12}^2 + v_2 m_2}{2} - \mathbf{s}_{12}^2 = 0$$

$$v_2 \mathbf{s}_{12}^2 + 2\mathbf{s}_{12}^2 = v_2 m_2$$

$$\mathbf{s}_{12}^2 = \frac{v_2 m_2}{v_2 + 2}$$

$$\hat{\mathbf{s}}^2 + n \hat{\mathbf{s}}_b^2 = \frac{v_2 m_2}{v_2 + 2}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_b^2 = \left(\frac{JKB}{v_2 + 2} - \hat{\mathbf{s}}^2 \right) \left(\frac{1}{n} \right)$$

$$(d) \quad -\frac{v_3 + 1}{2\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}_{123}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{123}^2} = 0$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$-\frac{\mathbf{s}_{123}^2(v_3+1)}{2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{2} - \mathbf{s}_{123}^2 = 0$$

$$\mathbf{s}_{123}^2(v_3+1) + 2\mathbf{s}_{123}^2 = bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2$$

$$\mathbf{s}_{123}^2 = \frac{v_3 m_3}{v_3 + 3}$$

$$\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_b^2 + bn\hat{\mathbf{s}}_a^2 = \frac{v_3 m_3}{a+2}$$

$$\hat{\mathbf{s}}_a^2 = \frac{\frac{v_3 m_3}{a+2} - \hat{\mathbf{s}}^2 - n\hat{\mathbf{s}}_b^2}{bn}$$

$$= \frac{\frac{JKA}{(a+2)} - \hat{\mathbf{s}}^2 - n\hat{\mathbf{s}}_b^2}{bn}$$

Ragam bagi $\hat{\mathbf{m}}$ dapat diperoleh melalui turunan kedua dari fungsi $\log L$ di atas sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{m}^2} = -\frac{abn}{\mathbf{s}_{123}^2}$$

Dengan demikian $ragam(\hat{\mathbf{m}}) = \frac{\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_b^2 + bn\hat{\mathbf{s}}_a^2}{abn}$.

b. Kasus $\mathbf{m} \sim N(\mathbf{t}, \mathbf{d}^2)$ dan komponen ragamnya *noninformative prior*

Fungsi kemungkinan untuk kasus ini adalah

$$L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) \propto (\mathbf{s}_1^2)^{-\frac{1}{2}v_1} (\mathbf{s}_{12}^2)^{-\frac{1}{2}v_2} (\mathbf{s}_{123}^2)^{-\frac{1}{2}(v_3+1)} \\ \times \exp \left[-\frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{1}{\mathbf{d}^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t})^2 \right\} \right] \times \frac{1}{\mathbf{s}_1^2} \frac{1}{\mathbf{s}_{12}^2} \frac{1}{\mathbf{s}_{123}^2}$$

Log dari fungsi kemungkinan ini menjadi:

$$\log L(\mathbf{m}, \mathbf{s}_1^2, \mathbf{s}_{12}^2, \mathbf{s}_{123}^2) = -\frac{1}{2} v_1 \log \mathbf{s}_1^2 - \frac{1}{2} v_2 \log \mathbf{s}_{12}^2 - \frac{1}{2} v_3 \log \mathbf{s}_{123}^2 \\ - \frac{1}{2} \left\{ \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{v_2 m_2}{\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_1 m_1}{\mathbf{s}_1^2} + \frac{1}{\mathbf{d}^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t})^2 \right\} - \log \mathbf{s}_1^2 - \log \mathbf{s}_{12}^2 - \log \mathbf{s}_{123}^2$$

Turunan pertama terhadap \mathbf{m} , \mathbf{s}_1^2 , \mathbf{s}_{12}^2 , dan \mathbf{s}_{123}^2 adalah sebagai berikut:

$$(a) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{m}} = \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2} - \frac{1}{\mathbf{d}^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t})$$

$$(b) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_1^2} = -\frac{v_1}{2\mathbf{s}_1^2} + \frac{v_1 m_1}{2\mathbf{s}_1^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_1^2}$$

$$(c) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{12}^2} = -\frac{v_2}{2\mathbf{s}_{12}^2} + \frac{v_2 m_2}{2\mathbf{s}_{12}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{12}^2}$$

$$(d) \quad \frac{\partial \log L}{\partial \mathbf{s}_{123}^2} = -\frac{v_3 + 1}{2\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})^2}{2\mathbf{s}_{123}^4} - \frac{1}{\mathbf{s}_{123}^2}.$$

Evaluasi persamaan (a) terhadap 0 menghasilkan

$$\frac{bn \sum (\bar{y}_{i..} - \mathbf{m})}{\mathbf{s}_{123}^2} - \frac{1}{\mathbf{d}^2} (\mathbf{m} - \mathbf{t}) = 0$$

$$\frac{abn\bar{y}_{...}}{\mathbf{s}_{123}^2} - \frac{abn\mathbf{m}}{\mathbf{s}_{123}^2} - \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{d}^2} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{d}^2} = 0$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \left(\frac{abn\bar{y}_{...}}{\mathbf{s}_{123}^2} + \frac{\mathbf{t}}{\mathbf{d}^2} \right) \left(\frac{\mathbf{s}_{123}^2}{abn} \right)$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \bar{y}_{...} + \mathbf{t} \frac{(\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_b^2 + bn\hat{\mathbf{s}}_a^2)}{\mathbf{d}^2 (abn)}.$$

Sedangkan evaluasi persamaan ini (b), (c) dan (d) terhadap 0 menghasilkan penduga bagi \mathbf{s}^2 , \mathbf{s}_b^2 , dan \mathbf{s}_a^2 sama dengan kasus-a.

Ragam bagi $\hat{\mathbf{m}}$ dapat diperoleh melalui turunan kedua dari fungsi $\log L$ di atas sebagai berikut:

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mathbf{m}^2} = -\frac{abn}{\mathbf{s}_{123}^2} - \frac{1}{\mathbf{d}^2}.$$

Dengan demikian $\text{ragam}(\hat{\mathbf{m}}) = \left(\frac{abn}{\hat{\mathbf{s}}^2 + n\hat{\mathbf{s}}_b^2 + bn\hat{\mathbf{s}}_a^2} + \frac{1}{\mathbf{d}^2} \right)^{-1}.$

5.5. Penerapan

Penerapan pendekatan Bayes pada model acak akan dicobakan untuk data dengan jumlah ulangan sama (data Tabel 7, Bab 3) dan data dengan ulangan tidak sama (data Tabel 16, Bab 4). Sebaran prior untuk \mathbf{m} dan \mathbf{S}_a^2 (selain *noninformative prior*) dicoba menggunakan sebaran normal dengan mengambil besaran parameter di sekitar penduga kemungkinan maksimumnya, yaitu $\mathbf{m} \sim N(25, 1)$ dan $\mathbf{S}_a^2 \sim N(4, 7)$.

Hasil pendugaan terhadap $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}_a^2$, dan $ragam(\hat{\mathbf{m}})$ untuk data dengan jumlah ulangan sama (data Tabel 16) disajikan pada Tabel 18, sedangkan untuk data dengan jumlah ulangan tidak sama (data Tabel 7) disajikan pada Tabel 19.

Tabel 18 Hasil pendugaan terhadap $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}_a^2$, dan $ragam(\hat{\mathbf{m}})$ untuk data dengan jumlah ulangan sama (Tabel 16)

Metode / Kasus	$\hat{\mathbf{m}}$	$\hat{\mathbf{S}}^2$	$\hat{\mathbf{S}}_a^2$	$ragam(\hat{\mathbf{m}})$
MKM	25.267	4.653	3.370	0.829
Bayes Kasus (a)	25.267	4.434	1.930	0.534
Bayes Kasus (b)	25.267	4.300	3.732	0.890
Bayes Kasus (c)	25.174	4.434	1.936	0.535
Bayes Kasus (d)	25.141	4.300	3.740	0.891

Tabel 19 Hasil pendugaan terhadap $\hat{\mathbf{m}}$, $\hat{\mathbf{S}}^2$, $\hat{\mathbf{S}}_a^2$, dan $ragam(\hat{\mathbf{m}})$ untuk data dengan jumlah ulangan tidak sama (Tabel 7)

Metode / Kasus	$\hat{\mathbf{m}}$	$\hat{\mathbf{S}}^2$	$\hat{\mathbf{S}}_a^2$	$ragam(\hat{\mathbf{m}})$
MKM	25.305	3.701	3.867	0.873
Bayes Kasus (a)	25.284	3.524	2.545	0.604
Bayes Kasus (b)	25.309	3.502	3.943	0.883
Bayes Kasus (c)	25.177	3.527	2.541	0.603
Bayes Kasus (d)	25.164	3.503	3.946	0.884

VI. PEMBAHASAN

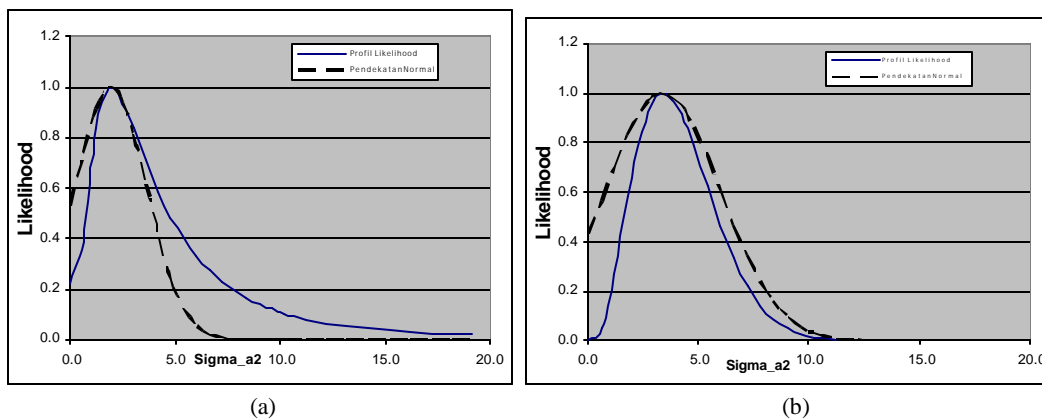
Pada analisis yang menggunakan pendekatan model acak satu faktor (model persamaan 4.1), metode kuadrat terkecil secara umum memberikan hasil dugaan yang berbeda dengan metode kemungkinan maksimum. Pada kasus jumlah ulangan sama, pendugaan metode kuadrat terkecil terhadap m dan s^2 memberikan hasil yang sama dengan metode kemungkinan maksimum, tetapi terhadap s_a^2 ternyata memberikan hasil yang berbeda. Dugaan \hat{s}_a^2 yang dihasilkan oleh metode kuadrat terkecil cenderung lebih besar daripada dugaan s_a^2 yang dihasilkan oleh metode kemungkinan maksimum. Bahkan untuk kasus yang telah dibahas pada Bab 4 nampak hasil pengujian terhadap komponen s_a^2 , pendekatan kuadrat terkecil dan pendekatan kemungkinan maksimum memberikan hasil yang saling bertentangan. Pada kasus jumlah ulangan yang berbeda, hasil pendugaan kedua metode tersebut berbeda pada seluruh komponen parameter model (m , s^2 dan s_a^2).

Hasil dugaan metode kemungkinan maksimum terhadap m dan ragam dari \hat{m} untuk data kasus Tabel 7 (hasil ubinan kentang dengan jumlah ulangan tidak sama) ternyata berbeda dengan pendekatan konvensional yang telah dibahas pada Bab 3. Pada pendekatan konvensional diperoleh penduga m dan ragam dari \hat{m} untuk data contoh kasus tersebut masing-masing sebesar 24.734 dan 1.083, sedangkan dengan pendekatan kemungkinan maksimum diperoleh masing-masing sebesar 25.305 dan 0.873. Fenomena ini menunjukkan bahwa ragam dugaan dari \hat{m} pada pendekatan metode kemungkinan maksimum cenderung lebih kecil dibandingkan dengan metode konvensional

Pendekatan menggunakan metode Bayes ternyata memberikan hasil yang beragam, sangat tergantung dari sebaran prior yang digunakan. Hasil pendugaan metode Bayes tersebut juga dicoba diperbandingkan dengan metode kemungkinan maksimum. Perbandingan hasil dugaan metode Bayes dengan metode konvensional sudah umum dilakukan, seperti yang dilakukan juga oleh Lindley & Smith (1972) yang membandingkan Bayes dengan metode kuadrat terkecil. Pada kasus lain, misalnya dijumpai pada Chen (2001), yang membandingkan hasil pendugaan metode Bayes

dengan metode kemungkinan maksimum pada kasus pendugaan statistik area kecil (*small-area estimation*).

Untuk kasus dimana seluruh parameter menggunakan *noninformative prior* (kasus-a), ternyata pendekatan Bayes secara umum memberikan hasil dugaan yang berbeda dengan metode kemungkinan maksimum. Pada kasus jumlah ulangan sama, hasil dugaan Bayes terhadap m ternyata sama dengan metode kemungkinan maksimum, tetapi ragam bagi \hat{m} pada metode Bayes jauh lebih kecil dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum, yaitu 0.534 dibanding 0.829. Fenomena yang sama juga terjadi pada penduga bagi s^2 dan s_a^2 , dimana hasil penduga Bayes lebih kecil daripada hasil penduga kemungkinan maksimum. Disamping itu, profil likelihood s_a^2 yang dihasilkan oleh metode Bayes tersebut tampaknya lebih mengarah pada bentuk sebaran normal dibandingkan dengan profil likelihood bagi s_a^2 pada metode kemungkinan maksimum.



Gambar 6 Perbandingan profil likelihood bagi s_a^2 : (a) Bayes kasus-a dengan profil likelihood normal, dan (b) Bayes kasus-b dengan profil likelihood normal

Pendekatan Bayes dengan menggunakan prior sebaran normal untuk s_a^2 dan *noninformative prior* untuk m dan s^2 (kasus-b), ternyata memberikan hasil yang agak berbeda. Pada kasus jumlah ulangan sama, penduga Bayes yang dihasilkan untuk s_a^2 lebih mirip dengan penduga kemungkinan maksimum, sedangkan untuk s^2 lebih kecil, baik dengan metode kemungkinan maksimum maupun dengan penduga Bayes kasus-a. Walaupun hasil dugaan terhadap s_a^2 relatif sama dengan metode kemungkinan

maksimum, tetapi profil *likelihood* yang dihasilkan tampaknya berubah cukup drastis mengarah pada bentuk sebaran normal. Sehingga pendekatan normal untuk S_a^2 mungkin menjadi lebih sesuai. Perbandingan profil *posterior* bagi S_a^2 untuk penduga Bayes kasus-a dan kasus-b dengan profil *likelihood* normal disajikan pada Gambar 6.

Penambahan informasi prior tentang m terhadap Bayes kasus-a dan kasus-b (menjadi kasus -c dan kasus-d) ternyata tidak terlalu banyak merubah hasil dugaan. Hasil dugaan yang banyak dipengaruhi hanya menyangkut dugaan terhadap m , sedangkan hasil dugaan terhadap S^2 dan S_a^2 tidak banyak mengalami perubahan.

Pada kasus jumlah ulangan tidak sama, pendekatan Bayes secara umum memberikan hasil yang berbeda dengan metode kemungkinan maksimum. Tidak seperti kasus jumlah ulangan sama, pada kasus ulangan tidak sama, pendekatan Bayes (hampir) selalu memberikan hasil dugaan yang berbeda terhadap m . Hasil dugaan metode Bayes terhadap S^2 secara umum lebih kecil dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum. Sedangkan penduga ragam dari \hat{m} , metode Bayes memberikan performans dugaan yang berbeda tergantung sebaran prior yang digunakan. Pada pendekatan Bayes kasus-a dan kasus-c, diperoleh penduga ragam \hat{m} yang lebih kecil (0.604 dan 0.603) dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum (0.873) dan metode konvensional (1.083). Sedangkan pada Bayes kasus-b dan kasus-d, diperoleh penduga ragam \hat{m} yang lebih besar (0.883 dan 0.884) dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum.

Penetapan parameter dari sebaran prior (*hyper-prior*) ternyata memberikan pengaruh yang cukup besar terhadap hasil dugaan. Pada kasus-b, penetapan ragam *hyper-prior* S_a^2 yang semakin besar ternyata memberikan hasil dugaan terhadap S_a^2 dan ragam (\hat{m}) yang semakin kecil, dan sebaliknya, semakin kecil ragam *hyper-prior* S_a^2 maka semakin besar hasil dugaan terhadap S_a^2 dan ragam (\hat{m}). Perbedaan ragam *hyper-prior* S_a^2 ini relatif tidak berpengaruh terhadap hasil dugaan terhadap S^2 dan m . Sedangkan penetapan nilai tengah *hyper-prior* S_a^2 ternyata memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap hasil dugaan seluruh parameter model. Pada nilai tengah *hyper-prior* S_a^2 yang semakin besar dan semakin jauh terhadap hasil dugaan metode

kemungkinan maksimum, maka nilai dugaan $\hat{m} S^2$, S_a^2 , dan ragam(\hat{m}) menjadi membesar. Nilai dugaan $\hat{m} S^2$, S_a^2 , ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario *hyper-prior* dari S_a^2 untuk kasus-c disajikan pada Tabel 20.

Tabel 20 Nilai dugaan \hat{m} , S^2 , S_a^2 , ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario nilai *hyper-prior* dari S_a^2 untuk kasus-b

Nilai <i>hyper-prior</i> S_a^2		Nilai dugaan			
Nilai Tengah	Ragam	\hat{m}	S^2	S_a^2	ragam(\hat{m})
4	7	25.309	3.502	3.943	0.883
4	4	25.309	3.501	3.959	0.886
4	2	25.309	3.501	3.975	0.889
4	1	25.310	3.501	3.986	0.892
4	8	25.309	3.502	3.939	0.882
4	12	25.309	3.502	3.927	0.880
4	16	25.309	3.502	3.919	0.878
7	7	25.326	3.497	6.076	1.310
9	7	25.334	3.497	7.971	1.689
12	7	25.341	3.499	11.038	2.302

Pada kasus-c, penetapan ragam *hyper-prior* m yang semakin besar ternyata memberikan hasil dugaan terhadap m juga semakin besar, tetapi perubahan ini relatif tidak berpengaruh terhadap nilai dugaan S^2 , S_a^2 , dan ragam(\hat{m}). Sedangkan penetapan nilai tengah *hyper-prior* m ternyata memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap hasil dugaan terhadap m , S_a^2 , dan ragam(\hat{m}). Pada nilai tengah *hyper-prior* m yang semakin kecil dan semakin jauh terhadap hasil dugaan metode kemungkinan maksimum, maka nilai dugaan \hat{m} menjadi semakin kecil, nilai dugaan S_a^2 dan ragam(\hat{m}) semakin membesar, sedangkan nilai dugaan S^2 cenderung semakin kecil walaupun perubahannya relatif kecil. Nilai dugaan $\hat{m} S^2$, S_a^2 , ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario *hyper-prior* dari m untuk kasus-c disajikan pada Tabel 21.

Tabel 21 Nilai dugaan \hat{m} , S^2 , S_a^2 , ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario nilai *hyper-prior* dari m untuk kasus-c

Nilai <i>hyper-prior</i> m		Nilai dugaan			
Nilai Tengah	Ragam	\hat{m}	S^2	S_a^2	ragam(\hat{m})
25	1	25.177	3.527	2.541	0.603
25	5	25.253	3.525	2.543	0.603
25	10	25.268	3.525	2.544	0.603
25	15	25.273	3.525	2.544	0.603
25	1	25.129	3.528	2.545	0.604
20	1	21.426	3.523	13.266	2.749
17	1	17.875	3.516	42.272	8.550
15	1	15.695	3.515	68.987	13.893

Pengaruh perubahan *hyper-prior* pada kasus-d ternyata sejalan dengan kasus-b dan kasus -c. Penetapan ragam *hyper-prior* S_a^2 yang semakin besar memberikan hasil dugaan S_a^2 dan ragam(\hat{m}) yang semakin kecil, dan sebaliknya. Sedangkan penetapan nilai tengah *hyper-prior* S_a^2 ternyata memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap hasil dugaan seluruh parameter model. Pada nilai tengah *hyper-prior* S_a^2 yang semakin besar dan semakin jauh terhadap hasil dugaan metode kemungkinan maksimum, maka nilai dugaan \hat{m} , S^2 , S_a^2 , dan ragam(\hat{m}) menjadi membesar.

Penetapan ragam *hyper-prior* m yang semakin besar memberikan hasil dugaan terhadap m juga semakin besar, tetapi perubahan ini relatif tidak berpengaruh terhadap nilai dugaan S^2 , S_a^2 , dan ragam(\hat{m}). Sedangkan penetapan nilai tengah *hyper-prior* m ternyata memberikan pengaruh yang sangat besar terhadap hasil dugaan terhadap m , S_a^2 , dan ragam(\hat{m}). Pada nilai tengah *hyper-prior* m yang semakin jauh terhadap hasil dugaan metode kemungkinan maksimum, maka nilai dugaan \hat{m} juga semakin jauh dari nilai dugaan kemungkinan maksimum, nilai dugaan S_a^2 dan ragam(\hat{m}) semakin membesar, sedangkan nilai dugaan S^2 cenderung semakin kecil walaupun

perubahannya relatif kecil. Nilai dugaan \hat{m} , \hat{s}^2 , dan ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario *hyper-prior* dari s_a^2 dan m untuk kasus-d disajikan pada Tabel 22.

Tabel 22 Nilai dugaan \hat{m} , \hat{s}^2 , ragam(\hat{m}) pada berbagai skenario nilai *hyper-prior* dari s_a^2 dan m untuk kasus-d

Nilai <i>hyper-prior</i>				Nilai dugaan			
m		s_a^2					
Nilai Tengah	Ragam	Nilai Tengah	Ragam	\hat{m}	\hat{s}^2	\hat{s}_a^2	ragam(\hat{m})
25	1	4	7	25.164	3.503	3.946	0.884
25	5	4	7	25.263	3.502	3.942	0.883
25	10	4	7	25.284	3.502	3.942	0.883
25	15	4	7	25.292	3.502	3.942	0.883
25	1	4	4	25.164	3.503	3.961	0.887
20	1	4	7	22.233	3.555	6.450	1.386

Pada model acak tersarang dua faktor, penduga Bayes yang telah dibahas pada Bab 5 hanya mengambil kasus data seimbang. Pengambilan kasus ini dilakukan karena kesulitan memperoleh fungsi kemungkinan maksimum bagi kasus data yang tak berimbang (jumlah taraf tersarang dan/atau jumlah ulangan tidak sama).

Untuk kasus seluruh parameter *noninformative* prior (kasus-a), ternyata penduga Bayes bagi m dan ragam(\hat{m}) sama dengan penduga metode kemungkinan maksimum. Namun demikian, nilai dugaan ragam(\hat{m}) dapat berbeda antara metode Bayes dengan metode kemungkinan maksimum karena nilai dugaan \hat{s}^2 , \hat{s}_b^2 , dan \hat{s}_a^2 kedua metode tersebut berbeda. Nilai penduga Bayes bagi s^2 , s_b^2 , dan s_a^2 sedikit berbeda dengan penduga kemungkinan maksimum. Perbedaannya terletak pada pembagi JK yang dikoreksi dengan penambahan bilangan 2. Dengan penambahan bilangan 2 pada pembagi JK, maka potensi diperolehnya penduga komponen ragam yang negatif menjadi lebih kecil.

Untuk kasus parameter $m \sim N(t, d^2)$ dan komponen ragamnya *noninformative* prior (kasus-b), ternyata penduga Bayes bagi m merupakan kombinasi linier antara

penduga kemungkinan maksimum ($\bar{y}_{...}$) dan rata-rata hyper priorinya (t), dimana peranan rata-rata hyper prior ini dalam mempengaruhi nilai \hat{m} diboboti dengan

$$\frac{(\hat{s}^2 + n\hat{s}_b^2 + bn\hat{s}_a^2)}{d^2(abn)} = \frac{\text{ragam}(\bar{y}_{...})}{d^2}.$$

Hal ini berarti bahwa semakin besar nilai $\text{ragam}(\bar{y}_{...})$ atau semakin kecil nilai d^2 maka semakin besar peranan nilai rata-rata hyper prior t dalam membentuk nilai \hat{m} . Demikian juga sebaliknya, semakin kecil nilai $\text{ragam}(\bar{y}_{...})$ atau semakin besar nilai d^2 maka semakin kecil peranan nilai rata-rata hyper prior t dalam membentuk nilai \hat{m} .

Penduga $\text{ragam}(\hat{m})$ dalam kasus-b ini berbeda antara metode Bayes dengan metode kemungkinan maksimum. Secara umum dugaan $\text{ragam}(\hat{m})$ pada metode Bayes lebih kecil daripada metode kemungkinan maksimum. Semakin besar nilai ragam hyper priorinya (d^2), maka nilai dugaan $\text{ragam}(\hat{m})$ pada metode Bayes semakin mendekati dugaan metode kemungkinan maksimum.

Kondisi bahwa $\text{ragam}(\hat{m})$ yang dihasilkan oleh metode Bayes lebih kecil daripada metode kemungkinan maksimum tampaknya berlaku umum. Hasil simulasi pada berbagai skenario keragaman yang disajikan pada Tabel 23 dan Tabel 24 menunjukkan bahwa $\text{ragam}(\hat{m})$ yang dihasilkan oleh metode kemungkinan maksimum (melalui pendekatan model acak) tidak selalu lebih kecil daripada metode konvensional. Penggunaan metode kemungkinan maksimum melalui pendekatan model acak tampaknya cukup baik pada kondisi ragam dusun setidaknya sama atau lebih besar daripada ragam petani atau plot, sedangkan pada kondisi ragam dusun yang lebih kecil dari ragam petani atau plot, penggunaan metode kemungkinan maksimum melalui pendekatan model acak terlihat kurang efektif. Namun hal ini tidak berlaku bagi metode Bayes, dari Tabel 24 tersebut terlihat jelas bahwa pada berbagai kondisi yang ada, $\text{ragam}(\hat{m})$ yang dihasilkan oleh metode Bayes selalu lebih kecil, baik dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum maupun dengan metode konvensional.

Tabel 23 Skenario keragaman untuk menguji hasil pendugaan metode kemungkinan maksimum dan metode Bayes

Skenario	Keragaman	Ragam dusun vs petani	Ragam dusun	Ragam petani
S0	Sedang	Lebih besar	6.074	3.714
S1	Kecil	Relatif sama	2.893	2.820
S2	Besar	Lebih kecil	1.459	16.621
S3	Besar	Lebih besar	13.159	3.348
S4	Sangat Besar	Jauh lebih kecil	0.802	22.911
S5	Besar	Relatif sama	8.807	8.669
S6	Kecil	Lebih kecil	0.833	2.410
S7	Kecil	Lebih besar	3.900	1.848

Tabel 24 Perbandingan hasil pendugaan terhadap μ dan ragam (\hat{m}) dengan metode konvensional, metode kemungkinan maksimum (ML), dan metode Bayes (kasus-a)

Skenario	Konvensional		ML		Bayes Kasus -a	
	\hat{m}	Ragam(\hat{m})	\hat{m}	Ragam(\hat{m})	\hat{m}	Ragam(\hat{m})
S0	24.735	1.083	25.305	0.873	25.284	0.604
S1	25.585	0.670	25.308	0.630	25.325	0.419
S2	24.403	0.702	24.579	0.754	24.402	0.500
S3	26.803	2.192	25.993	2.188	26.004	1.542
S4	24.283	0.754	24.374	0.821	24.284	0.663
S5	25.895	1.757	25.271	1.769	25.313	1.186
S6	25.483	0.262	25.392	0.225	25.483	0.087
S7	26.035	0.694	25.639	0.682	25.649	0.474

Salah satu sifat penduga yang baik adalah tak bias, atau nilai harapannya sama dengan parameter populasi. Pada kasus data seimbang, penduga Bayes bagi m untuk kasus-a (non informativa prior untuk seluruh parameter model) ternyata memiliki sifat tak bias karena $E(\hat{m}) = E(\bar{y}_{..}) = m$. Untuk kasus data yang tak seimbang, dengan asumsi nilai komponen ragam s^2 dan s_a^2 diketahui maka \hat{m} juga memiliki sifat yang tak bias karena:

$$E(\hat{m}) = E\left(\frac{\sum_i k_i \bar{y}_i}{\sum_i k_i}\right) = \frac{\sum_i k_i E(\bar{y}_i)}{\sum_i k_i} = m \quad \text{dimana} \quad k_i = \frac{n_i}{s^2 + n_i s_a^2}$$

Sedangkan pada kasus data yang tak seimbang dan nilai komponen ragam s^2 dan s_a^2 tidak diketahui, maka nilai komponen ragam tersebut harus diduga dengan \hat{s}^2 dan \hat{s}_a^2 . Hal ini berakibat sifat ketakbiasan dari \hat{m} tidak dapat dibuktikan secara analitik karena terkait dengan sebaran dari \hat{s}^2 dan \hat{s}_a^2 yang tidak diketahui.

Pembuktian sifat ketakbiasan dari \hat{m} sebenarnya juga dapat dilakukan secara empiris, dengan menduga lebih dahulu sebaran dari \hat{s}^2 dan \hat{s}_a^2 . Namun karena ketersediaan data empirisnya kurang memadai maka pembuktian secara empiris dalam disertasi ini juga tidak dapat dilakukan. Oleh karena itu, penelaahan sifat ketakbiasan penduga Bayes bagi m untuk kasus data tidak seimbang dicoba didekati dengan simulasi. Simulasi didisain dengan mengambil nilai parameter m yang tetap ($m=25$) dengan komponen ragam s^2 dan s_a^2 yang berbeda ($s^2 = 4$ & $s_a^2 = 4$, $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 16$, dan $s^2 = 16$ & $s_a^2 = 4$), dan ukuran contoh yang berbeda yaitu 40 dan 60.

Hasil simulasi menunjukkan bahwa penduga Bayes bagi m untuk kasus-a memiliki kecenderungan tak bias atau kalaupun berbias, nilai biasnyapun sangat kecil. Hal ini ditunjukkan oleh Gambar 7 – 10, dimana nilai dugaan \hat{m} cenderung berada di sekitar parameter dan rata-rata nilai dugaannya cenderung mendekati nilai parameter (25) dengan semakin besarnya frekuensi bangkitan.

Khusus untuk metode Bayes kasus-b (non informatif prior bagi s^2 & s_a^2 , dan $m \sim N(t, d^2)$), penduga Bayes bagi \hat{m} sudah pasti berbias. Besarnya bias merupakan fungsi dari jarak t terhadap m . Semakin besar jaraknya, semakin besar juga biasnya.

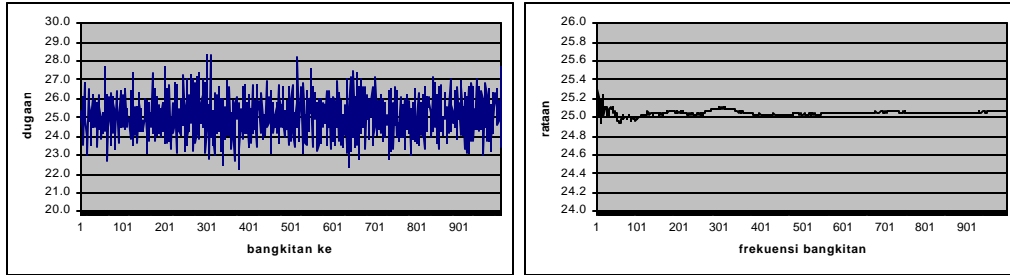
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

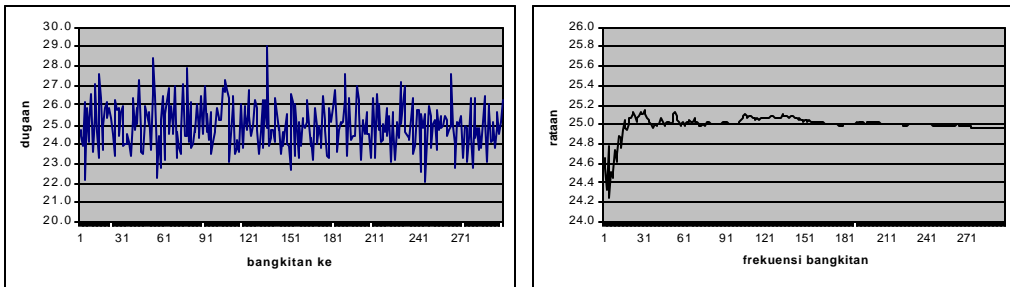
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

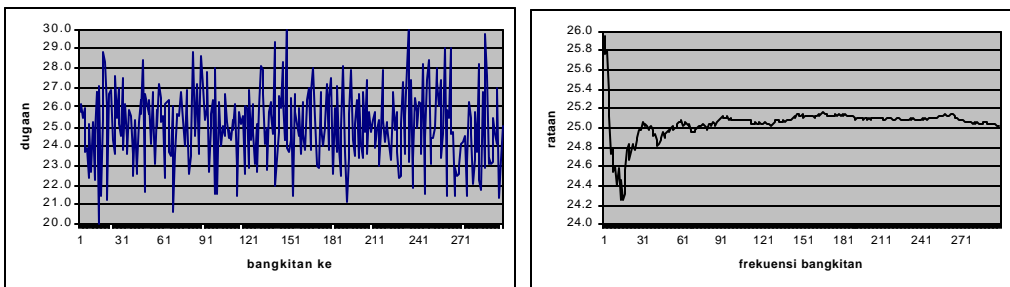
2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.



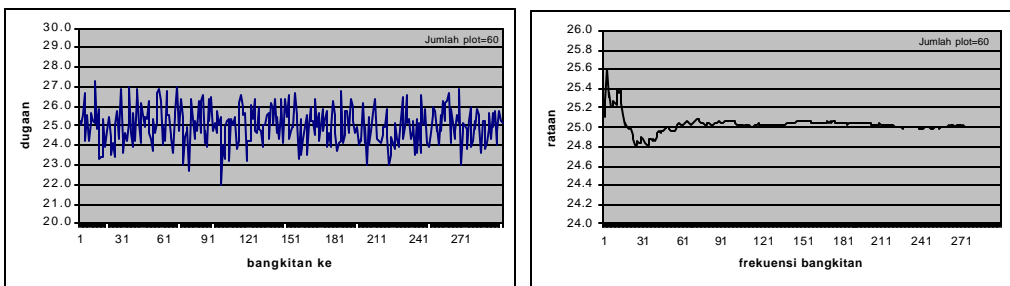
Gambar 7 Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rataan bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 40



Gambar 8 Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rataan bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 16$ dengan jumlah plot contoh 40



Gambar 9 Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rataan bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 16$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 40



Gambar 10 Nilai dugaan \hat{m} (gambar kiri) dan pola rataan bagi \hat{m} (gambar kanan) pada $s^2 = 4$ & $s_a^2 = 4$ dengan jumlah plot contoh 60

VII. KESIMPULAN DAN SARAN

7.1. Kesimpulan

Pendugaan terhadap m pada model acak satu faktor menggunakan pendekatan metode Bayes dengan memilih prior yang tepat ternyata dapat memberikan hasil dugaan yang memiliki ketepatan lebih tinggi (ragam \hat{m} yang lebih kecil). Salah satu pilihan prior yang dapat memberikan hasil cukup baik adalah *noninformative prior* untuk S^2 dan S_a^2 . Dugaan bayes terhadap m untuk kasus *noninformative prior* bagi seluruh parameter model (kasus-a) cenderung tak bias terhadap m .

Penggunaan pendekatan model acak satu faktor untuk pendugaan m dalam kasus pendugaan produktivitas kentang akan cukup efektif jika jumlah petani per dusun tidak terlalu timpang atau relatif seimbang. Ketidakseimbangan jumlah petani per dusun yang semakin tinggi cenderung menurunkan efektifitas pendugaan model acak satu faktor dalam melakukan pendugaan terhadap m . Oleh karena itu, pendekatan dengan menggunakan model acak satu faktor akan lebih sesuai jika diterapkan pada pendugaan produktivitas kentang pada daerah-daerah sentra produksi dan jumlah petani per dusun relatif seimbang.

Pada berbagai kondisi keragaman data contoh yang berbeda-beda, baik keragaman antar dusun maupun antar petani, metode Bayes selalu memberikan hasil yang lebih baik. Oleh karena itu, penggunaan pendekatan Bayes ini sebenarnya tidak hanya dapat diterapkan untuk tanaman kentang saja tetapi sesuai juga untuk komoditas hortikultura sekali panen lainnya seperti kubis, bawang putih, dan bawang merah.

Pendekatan Bayes pada model acak tersarang dua faktor memiliki potensi yang cukup baik digunakan untuk pendugaan m karena memberikan ragam \hat{m} yang lebih kecil dibandingkan dengan metode kemungkinan maksimum.

Disertasi ini menampilkan beberapa hal yang sebelumnya tidak pernah ada dalam metode percontohan di bidang hortikultura yaitu pendugaan rata-rata produktivitas komoditas hortikultura menggunakan pendekatan Bayes melalui model acak. Selain itu telah dikembangkan pula adaptasi dari algoritma *backfitting* dari metode kemungkinan maksimum ke dalam pendekatan Bayes.

7.2. Saran

Model acak tersarang yang dikaji dalam studi ini masih terbatas untuk kasus data seimbang (jumlah taraf dan jumlah ulangan sama), **padahal tidak sedikit kasus di lapangan dijumpai kasus data yang tidak seimbang**. Oleh karena itu perlu dilakukan kajian dan pengembangan pendekatan Bayes pada model acak tersarang khususnya untuk kasus data yang tak berimbang. Kajian pengembangan mungkin dapat dimulai dari bagaimana mendapatkan fungsi *likelihood* atau fungsi tujuan untuk mendapatkan penduga bagi parameter-parameter modelnya.

Beberapa kesimpulan yang dinyatakan dalam disertasi ini hanya dapat ditunjukkan melalui simulasi, dan belum dapat dibuktikan secara matematis, seperti sifat ketakbiasan penduga \hat{m} pada model acak untuk kasus data tak seimbang. Oleh karena itu, perlu dilakukan penelitian lanjutan untuk menelaah sifat ketakbiasan penduga \hat{m} secara matematis.

Lampiran 1. Program dalam Bahasa R untuk Pendugaan Parameter Model Acak dengan Metode Kemungkinan Maksimum untuk Data Tabel 7

```

teras <- function(M) {
  tr <- sum(diag(M))
  tr
}

sigma2 <- 3.714
sigma12 <- 6.074
b1 <- c(0,0,0,0,0)
b1 <- as.matrix(b1)
A <- matrix(rep(0,40*40),40)
for(i in 1:40) A[i,i] <- 1
R <- matrix(rep(0,5*5),5)
for(i in 1:5) R[i,i] <- 1
q <- 5
N <- 40
n <- 6
y <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/yhorti40.txt",sep="\t"))
y <- as.matrix(y)
Z <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/Zhorti40.txt",sep="\t"))
J <- as.matrix(rep(1,40))
ni <- c(13, 8, 6, 6, 7)
myi <- c(0, 0, 0, 0, 0)

tot <- 0
bb <- 1
ba <- ni[1]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[1] <- tot/ni[1]

tot <- 0
bb <- ni[1]+1
ba <- ni[1]+ni[2]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[2] <- tot/ni[2]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[3] <- tot/ni[3]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[4] <- tot/ni[4]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+ni[5]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[5] <- tot/ni[5]

beda1 <- 1
beda2 <- 1
epsilon <- 1e-8
mu <- sum(y)/N
while ((beda1>=epsilon) || (beda2>=epsilon) || (beda3>=epsilon))
{
  ki <- 0
  mul <- 0

```

```
pmul <- 0

while (ki<5)
  {ki <- ki + 1
  mul <- mul + (ni[ki]*myi[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
  pmul <- pmul + (ni[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
  }
mul <- mul/pmul
beda3 <- abs(mu-mul)
mu <- mul
yc <- y - as.vector(mu) * J
V <- as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z + as.vector(1/sigma12) * solve(R)
b1 <- solve(V) %*% (as.vector(1/sigma2)* t(Z) %*% solve(A) %*% yc)
e <- y - as.vector(mu) * J - (Z %*% b1)
sigmat2 <- (t(e) %*% solve(A) %*% e)
tempm1 <- solve(as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z +
as.vector(1/sigma12) * solve(R))
tempm2 <- tempm1 %*% (t(Z) %*% solve(A) %*% Z)
sigmat2 <- (sigmat2+teras(tempm2))/(N)
sigmat12 <- (t(b1) %*% solve(R) %*% b1 + teras(tempm1 %*% solve(R)))/(q)
beda1 <- abs(sigma2-sigmat2)
beda2 <- abs(sigma12-sigmat12)
sigma2 <- sigmat2
sigma12 <- sigmat12
}
mu
sigma2
sigma12
b1
```

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Lampiran 2. Program dalam Bahasa R untuk Pendugaan Parameter Model Acak dengan Menggunakan Pendekatan Bayes Kasus-a untuk Data Tabel 7

```

teras <- function(M) {
  tr <- sum(diag(M))
  tr
}

sigma2 <- 3.714
sigma12 <- 6.074
b1 <- c(0,0,0,0,0)
b1 <- as.matrix(b1)
A <- matrix(rep(0,40*40),40)
for(i in 1:40) A[i,i] <- 1
R <- matrix(rep(0,5*5),5)
for(i in 1:5) R[i,i] <- 1
q <- 5
N <- 40
n <- 6
y <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/yhorti40.txt",sep="\t"))
y <- as.matrix(y)
Z <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/Zhorti40.txt",sep="\t"))
J <- as.matrix(rep(1,40))
ni <- c(13, 8, 6, 6, 7)
myi <- c(0, 0, 0, 0, 0)

tot <- 0
bb <- 1
ba <- ni[1]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[1] <- tot/ni[1]

tot <- 0
bb <- ni[1]+1
ba <- ni[1]+ni[2]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[2] <- tot/ni[2]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[3] <- tot/ni[3]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[4] <- tot/ni[4]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+ni[5]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[5] <- tot/ni[5]

beda1 <- 1
beda2 <- 1
epsilon <- 1e-8
mu <- sum(y)/N
while ((beda1>=epsilon) || (beda2>=epsilon) || (beda3>=epsilon))
{
  ki <- 0
  mul <- 0

```



```

pmul <- 0

while (ki<5)
{
  ki <- ki + 1
  mul <- mul + (ni[ki]*myi[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
  pmul <- pmul + (ni[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
}
mul <- mul/pmul
beda3 <- abs(mu-mul)
mu <- mul
yc <- y - as.vector(mu) * J
V <- as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z + as.vector(1/sigma12) * solve(R)
b1 <- solve(V) %*% (as.vector(1/sigma2)* t(Z) %*% solve(A) %*% yc)
e <- y - as.vector(mu) * J - (Z %*% b1)
sigmat2 <- (t(e) %*% solve(A) %*% e)
tempm1 <- solve(as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z +
as.vector(1/sigma12) * solve(R))
tempm2 <- tempm1 %*% (t(Z) %*% solve(A) %*% Z)
sigmat2 <- (sigmat2+teras(tempm2))/(N+2)
sigmat12 <- (t(b1) %*% solve(R) %*% b1 + teras(tempm1 %*% solve(R)))/(q+2)
beda1 <- abs(sigma2-sigmat2)
beda2 <- abs(sigma12-sigmat12)
sigma2 <- sigmat2
sigma12 <- sigmat12
}
mu
sigma2
sigma12
b1

```

Lampiran 3. Program dalam Bahasa R untuk Pendugaan Parameter Model Acak dengan Menggunakan Pendekatan Bayes Kasus-b untuk Data Tabel 7

```

teras <- function(M) {
  tr <- sum(diag(M))
  tr
}

sigma2 <- 3.714
sigma12 <- 6.074
b1 <- c(0,0,0,0,0)
b1 <- as.matrix(b1)
A <- matrix(rep(0,40*40),40)
for(i in 1:40) A[i,i] <- 1
R <- matrix(rep(0,5*5),5)
for(i in 1:5) R[i,i] <- 1
tao <- 25
delta2 <- 1
mum <- 4
gama2 <- 1
q <- 5
N <- 40
n <- 6
y <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/yhorti40.txt",sep="\t"))
y <- as.matrix(y)
Z <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/Zhorti40.txt",sep="\t"))
J <- as.matrix(rep(1,40))
ni <- c(13, 8, 6, 6, 7)
myi <- c(0, 0, 0, 0, 0)

tot <- 0
bb <- 1
ba <- ni[1]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[1] <- tot/ni[1]

tot <- 0
bb <- ni[1]+1
ba <- ni[1]+ni[2]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[2] <- tot/ni[2]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[3] <- tot/ni[3]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[4] <- tot/ni[4]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+ni[5]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[5] <- tot/ni[5]

beda1 <- 1
beda2 <- 1
beda3 <- 1
epsilon <- 1e-8

```

```

mu <- sum(y)/N

while ((beda1>=epsilon) || (beda2>=epsilon) || (beda3>=epsilon))
{
ki <- 0
mul <- 0
pmul <- 0
while (ki<5)
{
ki <- ki + 1
mul <- mul + (ni[ki]*myi[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
pmul <- pmul + (ni[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
}
mul <- mul/pmul
beda3 <- abs(mu-mul)
mu <- mul
yc <- y - as.vector(mu) * J
V <- as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z + as.vector(1/sigma12) * solve(R)
b1 <- solve(V) %*% (as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% yc)
e <- y - as.vector(mu) * J - (Z %*% b1)
sigmat2 <- (t(e) %*% solve(A) %*% e)
tempm1 <- solve(as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z + as.vector(1/sigma12) *
solve(R))
tempm2 <- tempm1 %*% (t(Z) %*% solve(A) %*% Z)
sigmat2 <- (sigmat2+teras(tempm2))/(N+2)
sigmat12 <- -q*gama2/(2*sigma12)+(t(b1) %*% solve(R) %*% b1 + teras(tempm1 %*%
solve(R)))*gama2/(2*sigma12*sigma12)+mum
beda1 <- abs(sigma2-sigmat2)
beda2 <- abs(sigma12-sigmat12)
sigma2 <- sigmat2
sigma12 <- sigmat12
}
mu
sigma2
sigma12
b1

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Lampiran 4. Program dalam Bahasa R untuk Pendugaan Parameter Model Acak dengan Menggunakan Pendekatan Bayes Kasus-c untuk Data Tabel 7

```

teras <- function(M) {
  tr <- sum(diag(M))
  tr
}

sigma2 <- 3.714
sigma12 <- 6.074
b1 <- c(0,0,0,0,0)
b1 <- as.matrix(b1)
A <- matrix(rep(0,40*40),40)
for(i in 1:40) A[i,i] <- 1
R <- matrix(rep(0,5*5),5)
for(i in 1:5) R[i,i] <- 1
tao <- 25
delta2 <- 1
mum <- 3.37
gama2 <- 10
q <- 5
N <- 40
n <- 6
y <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/yhorti40.txt",sep="\t"))
y <- as.matrix(y)
Z <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/Zhorti40.txt",sep="\t"))
J <- as.matrix(rep(1,40))
ni <- c(13, 8, 6, 6, 7)
myi <- c(0, 0, 0, 0, 0)

tot <- 0
bb <- 1
ba <- ni[1]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[1] <- tot/ni[1]

tot <- 0
bb <- ni[1]+1
ba <- ni[1]+ni[2]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[2] <- tot/ni[2]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[3] <- tot/ni[3]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[4] <- tot/ni[4]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+ni[5]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[5] <- tot/ni[5]

beda1 <- 1
beda2 <- 1
epsilon <- 1e-8
mu <- sum(y)/N

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik IPB (Institut Pertanian Bogor)

Bogor Agricultural University

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

```

while ((beda1>=epsilon) || (beda2>=epsilon) || (beda3>=epsilon))
{
ki <- 0
mul <- 0
pmul <- 0
while (ki<5)
{
ki <- ki + 1
mul <- mul + (ni[ki]*myi[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
pmul <- pmul + (ni[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
}
mul <- (mul+tao/delta2)/(pmul+1/delta2)
beda3 <- abs(mu-mul)
mu <- mul
yc <- y - as.vector(mu) * J
V <- as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z + as.vector(1/sigma12) * solve(R)
b1 <- solve(V) %*% (as.vector(1/sigma2)* t(Z) %*% solve(A) %*% yc)
e <- y - as.vector(mu) * J - (Z %*% b1)
sigmat2 <- (t(e) %*% solve(A) %*% e)
tempm1 <- solve(as.vector(1/sigma2) * t(Z) %*% solve(A) %*% Z +
as.vector(1/sigma12) * solve(R))
tempm2 <- tempm1 %*% (t(Z) %*% solve(A) %*% Z)
sigmat2 <- (sigmat2+teras(tempm2))/(N+2)
sigmat12 <- (t(b1) %*% solve(R) %*% b1 + teras(tempm1 %*% solve(R)))/(q+2)
beda1 <- abs(sigma2-sigmat2)
beda2 <- abs(sigma12-sigmat12)
sigma2 <- sigmat2
sigma12 <- sigmat12
}
mu
sigma2
sigma12
b1

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Lampiran 5. Program dalam Bahasa R untuk Pendugaan Parameter Model Acak dengan Menggunakan Pendekatan Bayes Kasus-d untuk Data Tabel 7

```

teras <- function(M) {
  tr <- sum(diag(M))
  tr
}

sigma2 <- 3.714
sigma12 <- 6.074
b1 <- c(0,0,0,0,0)
b1 <- as.matrix(b1)
A <- matrix(rep(0,40*40),40)
for(i in 1:40) A[i,i] <- 1
R <- matrix(rep(0,5*5),5)
for(i in 1:5) R[i,i] <- 1
tao <- 25
delta2 <- 1
mum <- 4
gama2 <- 9
q <- 5
N <- 40
n <- 6
y <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/yhorti40.txt",sep="\t"))
y <- as.matrix(y)
Z <- as.matrix(read.table("F:/s3/data/Zhorti40.txt",sep="\t"))
J <- as.matrix(rep(1,40))
ni <- c(13, 8, 6, 6, 7)
myi <- c(0, 0, 0, 0, 0)

tot <- 0
bb <- 1
ba <- ni[1]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[1] <- tot/ni[1]

tot <- 0
bb <- ni[1]+1
ba <- ni[1]+ni[2]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[2] <- tot/ni[2]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[3] <- tot/ni[3]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[4] <- tot/ni[4]

tot <- 0
bb <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+1
ba <- ni[1]+ni[2]+ni[3]+ni[4]+ni[5]
for(i in bb:ba) tot <- tot + y[i]
myi[5] <- tot/ni[5]

beda1 <- 1
beda2 <- 1
epsilon <- 1e-8
mu <- sum(y)/N

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

© Hak cipta milik IPB (Institut Pertanian Bogor)

Bogor Agricultural University

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.


```

while ((beda1>=epsilon) || (beda2>=epsilon) || (beda3>=epsilon))
{
ki <- 0
mul <- 0
pmul <- 0
while (ki<5)
{ki <- ki + 1
mul <- mul + (ni[ki]*myi[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
pmul <- pmul + (ni[ki]/(sigma2+ni[ki]*sigma12))
}
mul <- (mul+tao/delta2)/(pmul+1/delta2)
beda3 <- abs(mu-mul)
mu <- mul
yc <- y - as.vector(mu) * J
V <- as.vector(1/sigma2) * t(Z) %%% solve(A) %%% Z + as.vector(1/sigma12) * solve(R)
b1 <- solve(V) %%% (as.vector(1/sigma2) * t(Z) %%% solve(A) %%% yc)
e <- y - as.vector(mu) * J - (Z %%% b1)
sigmat2 <- (t(e) %%% solve(A) %%% e)
tempm1 <- solve(as.vector(1/sigma2) * t(Z) %%% solve(A) %%% Z +
as.vector(1/sigma12) * solve(R))
tempm2 <- tempm1 %%% (t(Z) %%% solve(A) %%% Z)
sigmat2 <- (sigmat2+teras(tempm2))/(N+2)
sigmat12 <- -q*gama2/(2*sigma12)+(t(b1) %%% solve(R) %%% b1 + teras(tempm1 %%%
solve(R)))*gama2/(2*sigma12*sigma12)+mum
beda1 <- abs(sigma2-sigmat2)
beda2 <- abs(sigma12-sigmat12)
sigma2 <- sigmat2
sigma12 <- sigmat12
}
mu
sigma2
sigma12
b1

```

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:

a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.

b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkannya dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.