



INDEKS TOPOLOGI BERBASIS DERAJAT PADA GRAF TOTAL DARI RING $\mathbb{Z}_{p^k}$ DAN $\mathbb{Z}_{pq}$

SITA ARMI AULIA



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA TERAPAN
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



PERNYATAAN MENGENAI TESIS DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis dengan judul “Indeks Topologi Berbasis Derajat pada Graf Total dari Ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$ ” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir tesis ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, 05 Agustus 2026

Sita Armi Aulia
G5501231016



RINGKASAN

SITA ARMI AULIA. Indeks Topologi Berbasis Derajat pada Graf Total dari Ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$. Dibimbing oleh SUGI GURITMAN dan BIB PARUHUM SILALAHI.

Graf total merupakan salah satu representasi graf yang dibangun dari struktur ring dengan setiap simpul merepresentasikan elemen-elemen ring, sedangkan hubungan ketetanggaan ditentukan berdasarkan sifat pembagi nol. Kajian mengenai graf total tidak hanya memberikan informasi mengenai struktur graf yang terbentuk, tetapi juga memungkinkan pengembangan berbagai indeks topologi berbasis derajat yang banyak digunakan sebagai deskriptor numerik dalam berbagai bidang, khususnya kimia. Meskipun indeks Zagreb, indeks Randić, dan indeks Sombor telah banyak dikaji pada berbagai graf yang dibangun dari struktur aljabar, penelitian mengenai indeks-indeks tersebut pada graf total dari ring bilangan bulat modulo masih relatif terbatas. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada analisis sifat derajat dan penentuan formula eksplisit indeks Zagreb, indeks Randić, dan indeks Sombor pada graf total yang dibangun dari ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$.

Penelitian ini bertujuan untuk menentukan sifat derajat simpul dan memperoleh formula eksplisit indeks Zagreb pertama, indeks Zagreb kedua, indeks Randić, dan indeks Sombor pada graf total dari ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$. Penelitian dilakukan menggunakan metode deduktif melalui kajian teoritis dengan mempelajari konsep dasar teori bilangan, teori ring, teori graf, graf total, serta indeks topologi berbasis derajat. Selanjutnya ditentukan hubungan ketetanggaan, derajat simpul, dan banyaknya sisi melalui pembuktian matematis, kemudian hasil yang diperoleh digunakan untuk menurunkan formula eksplisit masing-masing indeks topologi. Formula yang diperoleh selanjutnya diverifikasi melalui perhitungan pada beberapa contoh graf total.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf total pada ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ terdekomposisi menjadi beberapa komponen dengan derajat simpul hanya memiliki dua kemungkinan nilai, yaitu $p^{k-1} - 1$ dan $p^{k-1} - 2$. Berdasarkan karakterisasi tersebut diperoleh formula eksplisit indeks Zagreb pertama, indeks Zagreb kedua, indeks Randić, dan indeks Sombor baik untuk setiap komponen maupun untuk graf total secara keseluruhan melalui perluasan definisi pada graf terpisah. Sementara itu, untuk ring $\mathbb{Z}_{pq}$ analisis dilakukan melalui isomorfik $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$. Derajat simpul yang dihasilkan hanya terdiri atas dua nilai, yaitu $p + q - 2$ dan $p + q - 3$, yang selanjutnya digunakan untuk menurunkan formula eksplisit indeks Zagreb pertama, indeks Zagreb kedua, indeks Randić, dan indeks Sombor.

Temuan utama pada penelitian ini adalah diperolehnya karakterisasi hubungan ketetanggaan, derajat simpul, dan banyak sisi pada graf total dari ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$ serta diperolehnya formula eksplisit indeks Zagreb pertama, indeks Zagreb kedua, indeks Randić, dan indeks Sombor. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian mengenai graf yang dibangun dari struktur aljabar, khususnya graf total, serta menjadi dasar bagi pengembangan indeks topologi lainnya pada graf aljabar.

Kata kunci: graf total, indeks Randić, indeks Sombor, indeks topologi, indeks Zagreb.

@HimpunanAljabarIPB



SUMMARY

SITA ARMI AULIA. Topology Index Based on Degree in the Total Graph of Ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$. Supervised by SUGI GURITMAN and BIB PARUHUM SILALAH.

The total graph is a graph representation constructed from a ring, where each vertex represents an element of the ring, and two distinct vertices are adjacent if and only if their sum is a zero divisor. The study of total graphs not only provides insights into the structural properties of graphs derived from rings but also enables the development of degree-based topological indices, which are widely used as numerical descriptors in various fields, particularly chemistry. Although the Zagreb, Randić, and Sombor indices have been extensively investigated for various graphs associated with algebraic structures, studies concerning these indices on total graphs of integer modulo rings remain limited. Therefore, this research focuses on analyzing the degree properties and deriving explicit formulas for the Zagreb, Randić, and Sombor indices of total graphs constructed from the rings $\mathbb{Z}_{p^k}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$.

This study aims to determine the degree properties of vertices and to derive explicit formulas for the first Zagreb index, the second Zagreb index, the Randić index, and the Sombor index of total graphs over the rings $\mathbb{Z}_{p^k}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$. The research employs a deductive method through theoretical analysis by studying the fundamental concepts of number theory, ring theory, graph theory, total graphs, and degree-based topological indices. The adjacency relations, vertex degrees, and the number of edges are established through mathematical proofs. These results are then used to derive explicit formulas for each topological index. Finally, the derived formulas are verified through computations on several examples of total graphs.

The results show that the total graph over the ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ is decomposed into several connected components, and its vertex degrees take only two possible values, namely $p^{k-1} - 1$ and $p^{k-1} - 2$. Based on this characterization, explicit formulas for the first Zagreb index, the second Zagreb index, the Randić index, and the Sombor index are obtained for each connected component as well as for the total graph as a whole by extending the definitions to disconnected graphs. Meanwhile, for the ring $\mathbb{Z}_{pq}$ the analysis is carried out using the isomorphic graph $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$. The resulting vertex degrees take only two values, namely $p + q - 2$ and $p + q - 3$, which are then used to derive explicit formulas for the first Zagreb index, the second Zagreb index, the Randić index, and the Sombor index.

The main contribution of this research is the complete characterization of adjacency relations, vertex degrees, and the number of edges in total graphs over the rings $\mathbb{Z}_{p^k}$ and $\mathbb{Z}_{pq}$ together with the derivation of explicit formulas for the first Zagreb index, the second Zagreb index, the Randić index, and the Sombor index. The results of this study are expected to enrich the theory of graphs associated with algebraic structures, particularly total graphs, and to provide a foundation for the development of other topological indices on algebraic graphs.

Keywords: Randić index, Sombor index, topological index, total graph, Zagreb index.



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta Milik IPB, Tahun 2026
Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.



INDEKS TOPOLOGI BERBASIS DERAJAT PADA GRAF TOTAL DARI RING $\mathbb{Z}_{p^k}$ DAN $\mathbb{Z}_{pq}$

SITA ARMI AULIA

Tesis
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Magister Matematika pada
Program Studi Matematika Terapan

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA TERAPAN
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**



@Hak cipta milik IPB University

IPB University

Tim Penguji pada Ujian Tesis

1. Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S.



- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Judul Tesis : Indeks Topologi Berbasis Derajat pada Graf Total dari Ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$

Nama : Sita Armi Aulia

NIM : G5501231016

Disetujui oleh:

Pembimbing 1:

Dr. Drs. Sugi Guritman

Pembimbing 2:

Prof. Dr. Ir. Bib Paruhum Silalahi, M. Kom.

Diketahui oleh

Ketua Program Studi:

Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S.

NIP. 19651102 199302 1 001

Dekan Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika:

Prof. Dr. Ir. Agus Buono, M.Si., M.Kom.

NIP 19660702 199301 1 001

Tanggal Ujian: 04 Agustus 2026

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji syukur ke hadirat Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Indeks Topologi Berbasis Derajat pada Graf Total dari Ring $\mathbb{Z}_{p^k}$ dan $\mathbb{Z}_{pq}$ ”.

Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari dukungan, bimbingan, bantuan serta do'a dari berbagai pihak. Oleh karena itu, dengan segala kerendahan hati penulis menyampaikan rasa hormat, penghargaan, dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Drs. Sugi Guritman dan Prof. Dr. Ir. Bib Paruhum Silalahi, M.Kom. selaku komisi pembimbing yang telah meluangkan waktu, tenaga, dan pikiran untuk memberikan bimbingan, masukan, arahan, serta motivasi kepada penulis selama proses penyusunan tesis ini.
2. Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc. selaku pembahas pada seminar kolokium dan Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S. selaku penguji luar komisi dalam ujian tesis yang telah memberikan berbagai masukan, kritik yang membangun, serta saran yang sangat bermanfaat dalam penyempurnaan karya ilmiah ini.
3. Dr. Drs. Paian Sianturi selaku moderator seminar kolokium dan Dr. Yuni Puji Hastuti, S.Pi., M.Si. selaku dosen seminar hasil yang telah memandu jalannya seminar serta memberikan saran dan masukan yang berharga bagi penyempurnaan penelitian ini
4. Ayahanda dan Ibunda tercinta, Bapak Arifuddin dan Ibu Rosmiati, serta adik-adik tersayang As Syifa Umiturrahma, Abul Ghifari Al-Kahfi, dan Muhammad Al Hafizh yang selalu memberi kasih sayang, doa, perhatian, dukungan, serta dukungan baik dari segi materi, moral maupun spiritual.
5. Seluruh dosen dan tenaga kependidikan Program Studi Matematika Terapan SSMI IPB University yang telah memberikan ilmu pengetahuan, pelayanan akademik, serta bantuan kepada penulis selama menempuh pendidikan.
6. Saudara Wahyu Ulyafandhie Misuki yang senantiasa memberikan dukungan, semangat, motivasi, bantuan, serta menjadi rekan berdiskusi dalam berbagai hal selama penulis menjalani studi di IPB.
7. Teman-teman Program Studi Matematika Terapan Angkatan 60 serta seluruh pihak yang tidak dapat disebutkan satu per satu atas segala bantuan, kesabaran, dan dukungan yang telah diberikan selama proses penyusunan tesis ini.

Bogor, 05 Agustus 2026

Sita Armi Aulia



DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR	x
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Rumusan Masalah	2
1.3 Tujuan Penelitian	2
1.4 Manfaat Penelitian	2
1.5 Kebaruan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Teori Bilangan	3
2.2 Ring	3
2.3 Pembagi Nol	4
2.4 Fungsi dan Homomorfisma Ring	4
2.5 Graf	5
2.6 Graf Total	6
2.7 Indeks Topologi	6
III METODE PENELITIAN	9
3.1 Prosedur Penelitian	9
3.2 Diagram Alir Penelitian	10
IV HASIL DAN PEMBAHASAN	11
4.1 Kasus $\mathbb{Z}_{p^k}$	11
4.1.1 Analisis Sifat dan Derajat	11
4.1.2 Indeks Topologi	17
4.2 Kasus $\mathbb{Z}_{pq}$	28
4.2.1 Analisis Sifat dan Derajat	28
4.2.2 Indeks Topologi	36
V SIMPULAN DAN SARAN	44
5.1 Simpulan	44
5.2 Saran	44
DAFTAR PUSTAKA	45
RIWAYAT HIDUP	48

DAFTAR GAMBAR

Graf G	6
Graf total dari $\mathbb{Z}_6$	7
Diagram Alir Penelitian	11