

# INDEKS TOPOLOGI BERBASIS JARAK PADA GRAF TOTAL DARI RING $\mathbb{Z}_{p^k}$ DAN $\mathbb{Z}_{pq}$

WAHYU ULYAFANDHIE MISUKI



PROGRAM STUDI MATEMATIKA TERAPAN  
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA  
INSTITUT PERTANIAN BOGOR UNIVERSITY  
BOGOR  
2026

@Hak cipta milik IPB University

IPB University



IPB University  
— Bogor Indonesia —

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Perpustakaan IPB University



## PERNYATAAN MENGENAI TESIS DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa tesis dengan judul “Indeks Topologi Berbasis Jarak pada Graf Total dari Ring  $\mathbb{Z}_{p^k}$  dan  $\mathbb{Z}_{pq}$ ” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir laporan tesis ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, 05 Agustus 2026

Wahyu Ulyafandhie Misuki  
G5501231015



## RINGKASAN

WAHYU ULYAFANDHIE MISUKI. Indeks Topologi Berbasis Jarak pada Graf Total dari Ring  $\mathbb{Z}_{p^k}$  dan  $\mathbb{Z}_{pq}$ . Dibimbing oleh SUGI GURITMAN dan BIB PARUHUM SILALAH

Graf total merupakan salah satu graf yang dibangun dari struktur ring komutatif dengan memanfaatkan himpunan pembagi nol sebagai dasar pembentukan relasi ketetanggaan. Sebagian besar penelitian terdahulu mendefinisikan pembagi nol dengan memasukkan elemen nol sebagai pembagi nol, sehingga karakteristik graf yang dihasilkan bergantung pada definisi tersebut. Penelitian ini mengkaji graf total pada ring bilangan bulat modulo  $\mathbb{Z}_{p^k}$  dan  $\mathbb{Z}_{pq}$  menggunakan definisi yang berbeda, yaitu hanya pembagi nol tak nol yang digunakan untuk menentukan ketetanggaan. Perubahan definisi tersebut menghasilkan struktur graf yang berbeda sehingga memerlukan karakterisasi dan analisis baru.

Penelitian ini bertujuan merumuskan karakterisasi graf total pada  $\mathbb{Z}_{p^k}$  dan  $\mathbb{Z}_{pq}$ , menentukan dekomposisi komponen terhubung, mendeskripsikan distribusi jarak antar simpul, serta memperoleh formula eksplisit beberapa indeks topologi berbasis jarak. Metode yang digunakan merupakan penelitian teoritis melalui pendekatan aljabar dan teori graf. Pada kasus  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , analisis dilakukan menggunakan partisi koset yang diperoleh dari homomorfisma kanonik menuju  $\mathbb{Z}_p$ , sedangkan pada kasus  $\mathbb{Z}_{pq}$  digunakan representasi hasil kali langsung  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  berdasarkan Teorema Sisa Cina.

Hasil penelitian menunjukkan bahwa graf total pada kedua ring tersebut memiliki karakterisasi struktur yang dapat dinyatakan secara eksplisit. Untuk  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , diperoleh dekomposisi graf ke dalam beberapa graf lengkap dan graf bipartit lengkap serta formula eksplisit untuk indeks Wiener, indeks Harary dan indeks Szeged. Sementara itu, untuk  $\mathbb{Z}_{pq}$  diperoleh karakterisasi komponen terhubung, distribusi jarak antar simpul, serta formula eksplisit untuk indeks Wiener dan indeks Harary. Penelitian ini juga menunjukkan bahwa penggunaan himpunan pembagi nol tak nol sebagai dasar relasi ketetanggaan memberikan struktur graf yang berbeda secara fundamental dibandingkan graf total klasik, sehingga menghasilkan distribusi jarak dan nilai indeks topologi yang baru. Hasil penelitian ini diharapkan dapat memperkaya kajian teori graf aljabar dan menjadi dasar bagi pengembangan penelitian mengenai indeks topologi pada graf-graf yang dibangun dari struktur ring hingga.

Kata Kunci: bilangan bulat modulo, graf total, indeks topologi, jarak



## SUMMARY

WAHYU ULYAFANDHIE MISUKI. Topological Indices of Total Graph of Ring  $\mathbb{Z}_{p^k}$  and  $\mathbb{Z}_{pq}$ . Supervised by SUGI GURITMAN and BIB PARUHUM SILALAH

The total graph is a graph constructed from a commutative ring by using the set of zero divisors to define the adjacency relation. Most previous studies have adopted the classical definition of zero divisors, which includes the zero element itself. In contrast, this thesis investigates total graphs over the integer modulo rings  $\mathbb{Z}_{p^k}$  and  $\mathbb{Z}_{pq}$  by employing nonzero zero divisors as the basis for adjacency. This modification leads to fundamentally different graph structures, thereby requiring new structural characterizations and analyses.

The objectives of this research are to characterize the total graphs over  $\mathbb{Z}_{p^k}$  and  $\mathbb{Z}_{pq}$ , determine their connected component decompositions, describe the distance distribution among vertices, and derive explicit formulas for several distance-based topological indices. The study is theoretical in nature and employs algebraic and graph-theoretical approaches. For the case of  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , the analysis is carried out using coset partitions induced by the canonical homomorphism onto  $\mathbb{Z}_p$ . For  $\mathbb{Z}_{pq}$ , the analysis is based on the direct product representation  $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$  obtained from the Chinese Remainder Theorem.

The results show that the total graphs over both rings admit explicit structural characterizations. For  $\mathbb{Z}_{p^k}$ , the graph is decomposed into complete graphs and complete bipartite graphs, and explicit formulas for the Wiener, Harary, and Szeged indices are obtained. For  $\mathbb{Z}_{pq}$ , the connected components, vertex distance distribution, and explicit formulas for the Wiener and Harary indices are successfully derived. Furthermore, the study demonstrates that defining adjacency using only nonzero zero divisors produces graph structures that differ fundamentally from the classical total graph, resulting in new distance distributions and new values of distance-based topological indices. These findings contribute to the development of algebraic graph theory by providing new insights into total graphs over finite commutative rings and establishing a foundation for further investigations of topological indices on graphs arising from algebraic structures.

Keywords: distance, modulo integer, topological indices, total graph

@tikijahipb IPB University



- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
    - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
    - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
  2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta Milik IPB, Tahun 2026

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

*Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah; dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB*

*Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB*



# INDEKS TOPOLOGI BERBASIS JARAK PADA GRAF TOTAL DARI RING $\mathbb{Z}_{p^k}$ DAN $\mathbb{Z}_{pq}$

**WAHYU ULYAFANDHIE MISUKI**

Tesis

Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar  
Magister Matematika pada  
Program Studi Matematika Terapan

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA TERAPAN  
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA  
INSTITUT PERTANIAN BOGOR UNIVERSITY  
BOGOR  
2026**

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Tim Penguji pada Ujian Tesis

1. Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S.





Judul Tesis : Indeks Topologi Berbasis Jarak pada Graf Total dari Ring  $\mathbb{Z}_{p^k}$   
dan  $\mathbb{Z}_{pq}$   
Nama : Wahyu Ulyafandhie Misuki  
NIM : G5501231015

@Hak cipta milik IPB University

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Dr. Drs. Sugi Guritman

---

Pembimbing 2:

Prof. Dr. Ir. Bib Paruhum Silalahi, M.Kom.

---

Diketahui oleh

Ketua Program Studi:

Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S.

NIP 19651102 199302 1 001

---

Dekan Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika:

Prof. Dr. Ir. Agus Buono, M.Si., M.Kom.

NIP 19660702 199301 1 001

---

Tanggal Ujian: 04 Agustus 2026

Tanggal Lulus:





## PRAKATA

Puji syukur kehadiran Allah *subhanaahu wa ta'ala* atas segala rahmat, karunia, dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tesis yang berjudul “Indeks Topologi Berbasis Jarak pada Graf Total dari Ring  $\mathbb{Z}_{p^k}$  dan  $\mathbb{Z}_{pq}$ ”. Penyusunan tesis ini tidak terlepas dari bimbingan, dukungan, doa, serta bantuan dari berbagai pihak. Oleh karena itu, pada kesempatan ini penulis menyampaikan penghargaan dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada:

1. Dr. Drs. Sugi Gurtiman dan Prof. Dr. Ir. Bib Paruhum Silalahi, M.Kom. selaku komisi pembimbing yang telah memberikan bimbingan, ilmu, arahan, masukan, motivasi, serta kesabaran selama proses penyusunan tesis ini.
2. Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc selaku pembahas pada Seminar Kolokium, Prof. Dr. Drs. Jaharuddin, M.S. selaku penguji luar komisi pada Ujian Tesis yang telah memberikan kritik, saran, dan masukan yang sangat bermanfaat bagi penyempurnaan tesis ini.
3. Dr. Drs. Paian Sianturi selaku moderator Seminar Kolokium serta Dr. Yuni Puji Hastuti, S.Pi., M.Si selaku dosen pada Seminar Hasil yang telah memandu jalannya seminar dan memberikan berbagai masukan yang membangun.
4. Ayahanda tercinta Bapak Ahmad Misuki dan Ibunda tercinta Ibu Nuratun Aini, serta adik tersayang Rizky Alfath Syadieq dan seluruh keluarga besar yang senantiasa memberikan kasih sayang, doa, dukungan, serta pengorbanan, baik secara moral, material, maupun spiritual.
5. Seluruh dosen dan tenaga kependidikan Klaster Matematika, Sekolah Sains Data, Matematika, dan Informatika (SSMI), IPB University yang telah memberikan ilmu, pelayanan, dan bantuan selama penulis menempuh pendidikan.
6. Saudari Sita Armi Aulia yang senantiasa memberikan semangat, dukungan, motivasi, serta menjadi teman berdiskusi dan berbagi selama penulis menjalani masa studi di IPB University.
7. Teman-teman Program Studi Magister Matematika Terapan angkatan 60 yang telah menjadi rekan belajar, berdiskusi, dan saling memberikan semangat selama masa perkuliahan.
8. Semua pihak yang tidak dapat penulis sebutkan satu per satu yang telah memberikan bantuan, dukungan, dan doa sehingga tesis ini dapat diselesaikan.

Semoga tesis ini dapat memberikan manfaat bagi pengembangan ilmu pengetahuan, khususnya dalam bidang matematika dan terapannya, serta bagi para pembaca yang memerlukannya.

Bogor, 05 Agustus 2026

Wahyu Ulyafandhie Misuki



## DAFTAR ISI

|                                                                                           |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| DAFTAR GAMBAR                                                                             | xi |
| I PENDAHULUAN                                                                             | 1  |
| 1.1 Latar Belakang                                                                        | 1  |
| 1.2 Rumusan Masalah                                                                       | 3  |
| 1.3 Tujuan Penelitian                                                                     | 3  |
| 1.4 Manfaat Penelitian                                                                    | 3  |
| 1.5 Kebaruan                                                                              | 3  |
| TINJAUAN PUSTAKA                                                                          | 4  |
| 2.1 Teori Bilangan                                                                        | 4  |
| 2.2 Ring                                                                                  | 5  |
| 2.3 Konsep Dasar Graf                                                                     | 7  |
| 2.3 Graf Total                                                                            | 10 |
| 2.4 Indeks Topologi Berbasis Jarak                                                        | 10 |
| III METODE PENELITIAN                                                                     | 13 |
| 3.1 Prosedur Penelitian                                                                   | 13 |
| 3.2 Diagram Alir Penelitian                                                               | 14 |
| IV HASIL DAN PEMBAHASAN                                                                   | 15 |
| 4.1 Graf Total pada $\mathbb{Z}_{p^k}$                                                    | 15 |
| 4.1.1 Struktur dan Karakterisasi Ketetanggaan                                             | 15 |
| 4.1.2 Jarak dan Distribusi Jarak                                                          | 21 |
| 4.1.3 Formula Eksplisit Indeks Topologi Berbasis Jarak                                    | 24 |
| 4.2 Graf Total pada $\mathbb{Z}_{pq}$                                                     | 33 |
| 4.2.1 Representasi pada $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ dan Karakterisasi Ketetanggaan | 33 |
| 4.2.2 Jarak dan Distribusi Jarak                                                          | 37 |
| 4.2.3 Formula Eksplisit Indeks Topologi Berbasis Jarak                                    | 44 |
| V SIMPULAN DAN SARAN                                                                      | 47 |
| 5.1 Simpulan                                                                              | 47 |
| 5.2 Saran                                                                                 | 47 |
| DAFTAR PUSTAKA                                                                            | 48 |
| RIWAYAT HIDUP                                                                             | 51 |

DAFTAR GAMBAR

|   |                                        |    |
|---|----------------------------------------|----|
| 1 | Graf Lengkap $K_{10}$                  | 9  |
| 2 | Graf Bipartit Lengkap $K_{5,5}$        | 9  |
| 3 | Graf Total $\mathcal{T}(\mathbb{Z}_6)$ | 10 |
| 4 | Diagram Alir Penelitian                | 14 |





## @Hak cipta milik IPB University

### Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
  - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
  - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.