

**PENENTUAN BATAS BAWAH
MINIMUM SUM COLORING PROBLEM
DENGAN DEKOMPOSISI GRAF BIPARTIT DAN KLIK**

TALENTA PARFAIBYA MAHENINDRA



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**

PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Penentuan Batas Bawah *Minimum Sum Coloring Problem* dengan Dekomposisi Graf Bipartit dan Klik” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Juli 2026

Talenta Parfaibya Mahenindra
G5401221059



ABSTRAK

TALENTA PARFAIBYA MAHENINDRA. Penentuan Batas Bawah *Minimum Sum Coloring Problem* dengan Dekomposisi Graf Bipartit dan Klik. Dibimbing oleh TEDUH WULANDARI MAS'OED dan FENDY SEPTYANTO.

Masalah Pewarnaan Jumlah Minimum (*Minimum Sum Coloring Problem - MSCP*) merupakan varian dari pewarnaan graf yang bertujuan meminimalkan penjumlahan nilai warna. Mengingat masalah ini memiliki kompleksitas komputasi yang tinggi (*NP-Complete*), penentuan batas bawah (*lower bound*) menjadi krusial sebagai tolak ukur evaluasi performa algoritma pewarnaan dalam mencapai solusi optimal. Penelitian ini mengkaji secara teoretis metode penentuan batas bawah MSCP melalui pendekatan ekstraksi graf parsial, yakni dekomposisi bipartit beserta subkelasnya (pohon dan lintasan), serta dekomposisi klik. Analisis matematis dan evaluasi komparatif dilakukan dengan mengimplementasikan metode-metode tersebut pada sebuah contoh struktur graf untuk memvalidasi tingkat keketatan batas bawah yang dihasilkan terhadap nilai *chromatic sum* aktual. Hasil kajian menunjukkan bahwa dekomposisi bipartit terbukti valid dalam memformulasi batas bawah, namun memiliki keterbatasan teoretis yang nilainya tidak akan pernah melampaui total simpul ditambah fungsi rantai dari setengah simpulnya. Sebaliknya, dekomposisi klik berhasil mengekstrak kepadatan graf menjadi sekumpulan subgraf lengkap secara lepas. Karakteristik ini memungkinkan nilai warna bertumbuh secara kuadratik mengikuti deret aritmetika, sehingga dekomposisi klik dalam contoh tersebut lebih unggul dalam menghasilkan batas bawah dibandingkan rumpun dekomposisi bipartit.

Kata kunci: Batas Bawah, Dekomposisi Bipartit, Dekomposisi Klik, *Minimum Sum Coloring Problem*, Pewarnaan Graf.

ABSTRACT

TALENTA PARFAIBYA MAHENINDRA. Lower Bound Determination for the Minimum Sum Coloring Problem using Bipartite and Clique Graph Decompositions. Supervised by TEDUH WULANDARI MAS'OED dan FENDY SEPTYANTO.

The Minimum Sum Coloring Problem (MSCP) is a variant of graph coloring that aims to minimize the total sum of color values assigned to vertices. Given its high computational complexity (NP-complete), determining lower bounds is crucial as a benchmark for evaluating the performance of coloring algorithms in achieving optimal solutions. This study theoretically examines lower bound determination methods for MSCP through a partial graph extraction approach, namely bipartite decomposition along with its subkelases (tree and lintasan decompositions), and clique decomposition. Mathematical analysis and comparative evaluation are conducted by implementing these methods on a dense graph structure to validate the tightness of the resulting lower bounds against the actual chromatic sum value. The results show that the bipartite decomposition family is proven valid in formulating lower bounds, but possesses a theoretical

limitation whereby its value will never exceed the total number of vertices plus the floor function of half the number of vertices. In contrast, clique decomposition successfully extracts the graph's density into a collection of disjoint complete subgraphs. This characteristic enables color values to grow quadratically following an arithmetic series, leading to the conclusion that clique decomposition is superior in producing significantly tighter lower bounds compared to the bipartite decomposition family.

Keywords: Lower Bound, Bipartite Decomposition, Clique Decomposition, Minimum Sum Coloring Problem, Graph Coloring.

@Hak cipta milik IPB University

IPB University



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2026
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.

**PENENTUAN BATAS BAWAH
MINIMUM SUM COLORING PROBLEM
DENGAN DEKOMPOSISI GRAF BIPARTIT DAN KLIK**

TALENTA PARFAIBYA MAHENINDRA

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Tim Penguji pada Ujian Skripsi:
Drs. Siswandi, M.Si.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.



Judul Skripsi : Penentuan Batas Bawah *Minimum Sum Coloring Problem* dengan Dekomposisi Graf Bipartit dan Klik

Nama : Talenta Parfaibya Mahenindra
NIM : G5401221059

@Hak cipta milik IPB University

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Teduh Wulandari Mas'oed, S.Si., M.Si.

Pembimbing 2:

Fendy Septyanto, B.Sc., M.Si.

Diketahui oleh

Ketua Program Studi:

Dr. Donny Citra Lesmana, S.Si., M.Fin.Math.
NIP 1979022720050110001

Tanggal Ujian:
2 Juli 2026

Tanggal Lulus:

PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Allah subhanaahu wa ta'ala atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Tema yang dipilih dalam penelitian yang dilaksanakan sejak bulan September 2025 sampai bulan Juni 2026 ini ialah tugas akhir, dengan judul “Penentuan Batas Bawah *Minimum Sum Coloring Problem* dengan Dekomposisi Graf Bipartit dan Klik”. Dalam penyusunan karya ilmiah ini, penulis menyadari keberhasilan tidak terlepas dari bantuan, dukungan dan doa dari berbagai pihak. Oleh karena itu pada kesempatan ini penulis ingin menyampaikan terimakasih sebesar-besarnya kepada:

1. Allah SWT., Dzat yang Maha Penyayang, yang memberikan kehidupan beserta kekuatannya bagi penulis untuk menjalankannya. Penelitian ini dipersembahkan untuk Allah, yang telah menyusun konstelasi semesta dengan begitu indah untukku bertahan (@nrrhm).
2. Kedua orang tua dan keluarga penulis yaitu Mama, Papa, Mas Nobby, Mba Fasta, Mba Mebby, dan Aksa yang senantiasa mencurahkan kasih sayang, dukungan moril maupun materiil, serta untaian doa yang tiada putus, sehingga penulis dapat menyelesaikan seluruh tahapan studi ini.
3. Ibu Teduh Wulandari Mas'ood, M.Si. selaku Dosen Pembimbing I dan Bapak Fendy Septyanto, M.Si. selaku Dosen Pembimbing II yang telah dengan sabar memberikan bimbingan, arahan, motivasi, serta masukan selama proses penyusunan karya ilmiah ini.
4. Bapak Drs. Siswandi, M.Si. selaku dosen penguji yang telah memberikan saran, kritik, dan masukan yang sangat membangun bagi penyempurnaan karya ilmiah ini.
5. Seluruh dosen dan tenaga kependidikan Departemen Matematika IPB University diantaranya Mas Jimly dan Mba Tania atas ilmu, bimbingan, dan bantuan yang telah diberikan selama masa perkuliahan.
6. Teman-teman MTKOMB yakni Rere, Namira, Nabila, Diki, dan Mena, yang merupakan tempat pulang terbaik bagi penulis di IPB, serta orang terdekat penulis yang menyertai sekaligus memberikan banyak kebahagiaan dan warna bagi hidup penulis.
7. Teman-teman Matematika 59, yang bersama-sama berjuang selama perkuliahan ini.

Penulis menyadari bahwa karya ilmiah ini masih jauh dari sempurna. Oleh karena itu, kritik dan saran yang membangun sangat diharapkan demi perbaikan dimasa yang akan datang. Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Juli 2026

Talenta Parfaibya Mahenindra



DAFTAR ISI

DAFTAR ISI	x
DAFTAR GAMBAR	xi
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
III HASIL DAN PEMBAHASAN	9
3.1 Definisi Minimum Sum Coloring Problem (MSCP)	9
3.2 Dekomposisi Bipartit	13
3.3 Dekomposisi Pohon atau Hutan	17
3.4 Dekomposisi Lintasan	20
3.5 Hubungan batas bawah MSCP hasil dekomposisi bipartit, pohon, dan lintasan	22
3.6 Dekomposisi Klik	27
3.7 Perbandingan batas bawah MSCP hasil dekomposisi bipartit dan klik	32
IV SIMPULAN DAN SARAN	39
4.1 Simpulan	39
4.2 Saran	39
DAFTAR PUSTAKA	40
RIWAYAT HIDUP	42



DAFTAR GAMBAR

1	Graf G_4	3
2	Subgraf H dari graf G_4	5
3	Graf K_4	5
4	Hubungan antara $\chi(G)$ dan $s(G)$	10
5	Graf G_2	13
6	Graf G_2'	13
7	Graf G	14
8	Graf B_1	15
9	Graf B_2	16
10	Graf B_3	16
11	Graf T_1	18
12	Graf T_2	19
13	Graf T_3	19
14	Graf P_1	21
15	Graf P_2	21
16	Graf P_3	22
17	Graf Q_1	28
18	Graf Q_2	29
19	Graf Q_3	29
20	Graf G_3	33
21	Graf X_1	34
22	Graf X_2	35
23	Graf X_3	35
24	Graf Y_1	36
25	Graf Y_2	37
26	Graf Y_3	37