



IDEAL NIL-PRIMA PADA RING FAKTOR $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ DAN KARAKTERISASINYA

BRAMANTYO ADI KUNCORO



**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**



PERNYATAAN MENGENAI SKRIPSI DAN SUMBER INFORMASI SERTA PELIMPAHAN HAK CIPTA

Dengan ini saya menyatakan bahwa skripsi dengan judul “Ideal Nil-Prima pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dan Karakterisasinya” adalah karya saya dengan arahan dari dosen pembimbing dan belum diajukan dalam bentuk apa pun kepada perguruan tinggi mana pun. Sumber informasi yang berasal atau dikutip dari karya yang diterbitkan maupun tidak diterbitkan dari penulis lain telah disebutkan dalam teks dan dicantumkan dalam Daftar Pustaka di bagian akhir skripsi ini.

Dengan ini saya melimpahkan hak cipta dari karya tulis saya kepada Institut Pertanian Bogor.

Bogor, Juli 2026

Bramantyo Adi Kuncoro
G5401221007

- Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

ABSTRAK

BRAMANTYO ADI KUNCORO. Ideal Nil-Prima Pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ Dan Karakterisasinya. Dibimbing oleh TEDUH WULANDARI dan FENDY SEPTYANTO.

Perkembangan kajian ideal dalam aljabar abstrak telah melahirkan berbagai generalisasi konsep ideal prima pada ring komutatif, salah satunya adalah ideal nil-prima. Dengan mendenotasikan $Nil(R)$ sebagai himpunan semua unsur nilpoten dalam suatu ring R , suatu ideal sejati P dari ring komutatif R disebut ideal nil-prima terhadap $X \in Nil(R)$ jika untuk setiap $a, b \in R$ dengan $ab \in P$, berlaku $a \in P$ atau $b \in P$ atau $a + X \in P$ atau $b + X \in P$. Penelitian ini bertujuan untuk merekonstruksi struktur ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, dan memperlihatkan suatu himpunan $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ merupakan ideal nil-prima, serta mengkarakterisasi sifat-sifatnya. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ring faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ tersusun atas kelas-kelas polinomial berbentuk $a + bX$ dengan $a, b \in \mathbb{Z}_n$, dengan X bersifat nilpoten. Untuk I ideal prima di $\mathbb{Z}_n$ dan $J = \mathbb{Z}_n$, terbukti bahwa $K_{(I,J)}$ merupakan ideal prima sekaligus ideal nil-prima pada $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. Karakterisasi menunjukkan bahwa untuk setiap $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ berlaku $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$ jika n ganjil dan $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$ jika n genap.

Kata kunci: ideal nil-prima, ring faktor, ring polinomial, unsur nilpoten.

ABSTRACT

BRAMANTYO ADI KUNCORO. Ideal Nil-Prime in Ring Factors $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ and Their Characterization. Supervised by TEDUH WULANDARI and FENDY SEPTYANTO.

The development of ideal theory in abstract algebra has given rise to various generalizations of the concept of prime ideals in commutative rings, one of which is the nil-prime ideal. By denoting $Nil(R)$ as the set of all nilpotent elements in a commutative ring R , a proper ideal P of a commutative ring R is called a nil-prime ideal with respect to $X \in Nil(R)$ if for every $a, b \in R$ with $ab \in P$, it holds that $a \in P$ or $b \in P$ or $a + X \in P$ or $b + X \in P$. This study aims to reconstruct the structure of the quotient ring $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$, to show that the set $K_{(I,J)} \subseteq \mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ constitutes a nil-prime ideal, and to characterize its properties. The results show that the quotient ring $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ consists of polynomial classes of the form $a + bX$ with $a, b \in \mathbb{Z}_n$, with X is nilpotent element. For I a prime ideal in $\mathbb{Z}_n$ and $J = \mathbb{Z}_n$, it is proven that $K_{(I,J)}$ is both prime ideal and nil-prime ideal in $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$. The characterization shows that for every $Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle)$ it holds that $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) = K_{(I,J)}$ if n is odd, and $2 \cdot Nil(\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle) \subseteq K_{(I,J)}$ if n is even.

Keywords: nil-prime ideal, nilpotent element, polynomial ring, quotient ring.



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

© Hak Cipta milik IPB, tahun 2026
Hak Cipta dilindungi Undang-Undang

Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan atau menyebutkan sumbernya. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik, atau tinjauan suatu masalah, dan pengutipan tersebut tidak merugikan kepentingan IPB.

Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apa pun tanpa izin IPB.

IDEAL NIL-PRIMA PADA RING FAKTOR $\mathbb{Z}_n[x]/\langle x^2 \rangle$ DAN KARAKTERISASINYA

BRAMANTYO ADI KUNCORO

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Matematika pada
Program Studi Matematika

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
SEKOLAH SAINS DATA, MATEMATIKA, DAN INFORMATIKA
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2026**



@Hak cipta milik IPB University

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

Tim Penguji pada Ujian Skripsi:
Dr. Drs. Sugi Guritman



Judul Skripsi : Ideal Nil-Prima Pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dan Karakterisasinya

Nama : Bramantyo Adi Kuncoro

NIM : G5401221007

Disetujui oleh

Pembimbing 1:

Teduh Wulandari Mas'ood, S.Si., M.Si.

Pembimbing 2:

Fendy Septyanto, B.Sc., M.Si.

Diketahui oleh

Ketua Program Studi Matematika:

Dr. Donny Citra Lesmana, S.Si., M.Fin.Math.

NIP. 197902272005011001

Tanggal Ujian:

8 Juli 2026

Tanggal Lulus:



PRAKATA

Puji dan syukur penulis panjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa atas segala karunia-Nya sehingga karya ilmiah ini berhasil diselesaikan. Tema yang dipilih dalam penelitian yang dilaksanakan sejak bulan November 2025 sampai bulan Juli 2026 ini ialah Struktur Aljabar, dengan judul “Ideal Nil-Prima pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[X]/\langle X^2 \rangle$ dan Karakterisasinya”. Penyusun karya ilmiah ini dapat diselesaikan tentunya tidak terlepas dari bantuan dan dukungan berbagai pihak. Oleh karena itu, dalam kesempatan ini penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Bapak Bendot Supriyanto dan Ibu Sri Astuti selaku kedua orang tua penulis yang selalu memberikan doa, motivasi, dan dukungan setiap hari demi kelancaran putra semata wayangnya selama ini,
2. Valentina Febriati selaku kakak penulis yang telah berkorban luar biasa besar dan hebat dalam membiayai dan memfasilitasi segala kebutuhan penulis selama ini,
3. Ibu Teduh Wulandari Mas’oed, S.Si., M.Si selaku dosen pembimbing pertama dan Bapak Fendy Septyanto, B.Sc., M.Si selaku dosen pembimbing kedua atas segala ilmu, bimbingan, dan saran yang diberikan kepada penulis selama proses penyusunan karya ilmiah ini,
4. Bapak Dr. Drs. Sugi Guritman selaku dosen penguji atas segala kritik dan saran yang diberikan kepada penulis,
5. Mas Jimly, Mba Tania, dan seluruh tenaga kependidikan Program Studi Matematika IPB University atas bantuannya dalam segala kebutuhan administrasi selama penulisan karya ilmiah ini,
6. Lamtiur Sihotang atas kesediaannya menjadi pembahas dalam seminar hasil tugas akhir penulis,
7. Ainayah, Davina, Fathan, Maharani, Naila, dan Putri selaku sahabat penulis sejak Sekolah Menengah Pertama hingga saat ini atas motivasi dan penyemangat bagi penulis dalam menyelesaikan karya ilmiah ini,
8. All, Alin, Blaze, Dudum, Lala, Sapi, Ucup, Vis, Bella, dan seluruh teman-teman online penulis dalam Discord Midnysoul atas kebersamaan, sukacita dalam game Roblox, serta sebagai tempat berkeluh-kesah penulis selama penyusunan karya ilmiah ini,
9. Jerome Polin Sijabat sebagai tokoh inspirasi penulis dalam memilih Program Studi Matematika yang juga menumbuhkan rasa cinta akan keindahan dunia matematika,
10. Diri sendiri yang telah berjuang luar biasa hebat, pantang menyerah, dan kesabaran yang amat besar dalam menyelesaikan karya ilmiah ini.

Semoga karya ilmiah ini bermanfaat bagi pihak yang membutuhkan dan bagi kemajuan ilmu pengetahuan.

Bogor, Juli 2026

Bramantyo Adi Kuncoro



Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL	viii
I PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang	1
1.2 Tujuan	2
II TINJAUAN PUSTAKA	3
2.1 Operasi Biner	3
2.2 Grup	3
2.3 Grup Abelian	3
2.4 Grup Bilangan Bulat Modulo n ($\mathbb{Z}_n$)	3
2.5 Subgrup	4
2.6 Koset	5
2.7 Ring	5
2.8 Subring	5
2.9 Ideal	6
2.10 Unit	6
2.11 Unsur Pembagi Nol	7
2.12 Unsur Nilpoten	7
2.13 Karakteristik Ring	7
2.14 Ring Faktor	7
2.15 Ideal Prima	8
2.16 Ideal Maksimal	9
2.17 Ideal Utama	9
2.18 Polinomial atas Ring R	9
2.19 Operasi Fungsi Polinomial	10
2.20 Himpunan Polinomial atas Ring R	10
2.21 Algoritma Pembagian Polinomial	11
2.22 Ideal Nil-Prima	12
III HASIL DAN PEMBAHASAN	13
3.1 Konstruksi dan Struktur Aljabar Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[\mathbf{X}]/\langle \mathbf{X}^2 \rangle$	13
3.2 Himpunan $K_{(I,J)}$ pada Ring Faktor $\mathbb{Z}_n[\mathbf{X}]/\langle \mathbf{X}^2 \rangle$	21
3.3 Himpunan $K_{(I,J)}$ sebagai Ideal Prima	22
3.4 Karakterisasi Himpunan $K_{(I,J)}$ sebagai Ideal Nil-Prima	42
IV KESIMPULAN DAN SARAN	50
4.1 Kesimpulan	50
4.2 Saran	50
DAFTAR PUSTAKA	51
RIWAYAT HIDUP	54



DAFTAR TABEL

1	Rekapitulasi hasil kali $a(X)b(X)$ terhadap himpunan $K_{((2),(1))}$	25
2	Rekapitulasi hasil kali $a(X)b(X)$ terhadap himpunan $K_{((0),(1))}$	31
3	Rekapitulasi hasil kali $a(X)b(X)$ terhadap himpunan $K_{((3),(1))}$	42

Hak Cipta Dilindungi Undang-undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber :
a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah
b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB University.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University.