Sebuah Karya Kecil Teruntuk :
Keluarga, Rekan-Rekan serta Sahabat Terbaikku yang Pernah dan Selalu Mencintaiku

PERSAINGAN WAKTU PENGIRIMAN ANTARPRODUSEN PADA KASUS KONSUMEN HOMOGEN

FANJI JOKO TIMUR

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2001

RINGKASAN

FANJI JOKO TIMUR. Persaingan Waktu Pengiriman Antarprodusen pada Kasus Konsumen Homogen (*Competition on Interproducer Delivery-Time with Homogenous Consumer*). Dibimbing oleh **AMRIL AMAN** dan **BERLIAN SETIAWATY**.

Respon produsen terhadap pesanan konsumen memegang peranan penting dalam menghadapi pesaing-pesaingnya. Produsen berusaha untuk merespon pesanan tersebut dalam waktu sesingkat mungkin. Tipe persaingan seperti ini merupakan hal yang menarik untuk dianalisa lebih lanjut. Analisa tersebut dapat dilakukan dengan memodelkan permasalahan di atas ke dalam suatu model antrean.

Dalam tulisan ini akan dipelajari persaingan antarprodusen yang memproduksi barang atau jasa berdasarkan kepekaan konsumen akan waktu tunda. Dalam hal ini waktu tunda didefinisikan sebagai waktu yang diperlukan pada saat pemesanan sampai dengan pesanan datang. Produsen bersaing untuk menawarkan produknya (barang atau jasa) kepada konsumen berdasarkan pesanan yang ada dengan menetapkan harga dan intensitas produksi untuk masing-masing tipe konsumen serta menetapkan kebijakannya masing-masing sedemikian sehingga keuntungan yang diperoleh adalah maksimum. Keberadaan kesetimbangan persaingan telah dibuktikan.

Selanjutnya akan ditunjukkan jika permasalahan ini dikhususkan untuk kasus produsen heterogen dan konsumen homogen (sama tipe). Produsen dikatakan heterogen karena produsen memiliki biaya produksi, rataan waktu proses dan keragaman waktu prosesnya masing-masing. Pada akhirnya akan ditunjukkan bahwa *faster, lower cost* dan *lower variability producer* akan mempunyai pangsa pasar yang lebih besar, *contribution margin*, utilitas kapasitas dan keuntungan yang lebih baik daripada pesaing-pesaingnya. Akan tetapi produsen tersebut bisa saja memiliki harga yang lebih tinggi dan waktu pengiriman yang lebih singkat maupun harga yang lebih rendah dan waktu pengiriman yang lebih lama.

PERSAINGAN WAKTU PENGIRIMAN ANTARPRODUSEN PADA KASUS KONSUMEN HOMOGEN

FANJI JOKO TIMUR

Skripsi
sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Jurusan Matematika

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2001

Judul : Persaingan Waktu Pengiriman Antarprodusen
pada Kasus Konsumen Homogen
Nama : Fanji Joko Timur
N I M : G05496019
Jurusan : Matematika

Menyetujui,

Dr. Ir. Amril Aman, M.Sc.
Pembimbing I

Dr. Berlian Setiawaty
Pembimbing II

DEPARTEMEN PENDIDIKAN NASIONAL
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

Mengetahui,

Dr. Ir. Amril Aman, M.Sc.
Ketua Jurusan

Tanggal Lulus : 0 8 DEC 2001

RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Jakarta pada tanggal 14 Oktober 1978 sebagai anak keempat dari enam bersaudara, anak dari pasangan Bapak Oos Sarkosih dan Ibu Ani Setianingsih.

Tahun 1996 penulis lulus dari SMU Negeri 34 Jakarta dan pada tahun yang sama lulus seleksi masuk IPB melalui jalur Undangan Seleksi Masuk IPB (USMI) di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, selanjutnya penulis memilih bidang minat Industri.

Selama mengikuti perkuliahan penulis pernah menjadi asisten mata kuliah Kalkulus I dan mata kuliah Pengantar Matematika pada tahun ajaran 1999/2000 dan Kabid. BOM GUMATIKA IPB tahun 1998-1999..

KATA PENGANTAR

Puji syukur, Alhamdulillah, penulis panjatkan kepada Allah SWT atas segala rahmat, kasih sayang dan cinta-Nya sehingga skripsi ini berhasil diselesaikan. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah pada teladan kita Nabi Muhammad SAW, keluarga, para sahabat dan umatnya sampai akhir jaman. Amin.

Judul yang dipilih dalam penelitian studi pustaka adalah Persaingan Waktu Pengiriman Antarprodusen pada Kasus Konsumen Homogen.

Penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyelesaian karya ilmiah ini khususnya kepada Bapak Dr. Ir. Amril Aman, M.Sc. dan Ibu Dr. Berlian Setiawaty yang telah membimbing dengan penuh ketekunan dan kesabaran hingga selesainya penulisan karya ilmiah ini. Tak lupa penulis ucapkan banyak terima kasih kepada Bapak Ir. N.K. Kutha Ardana, M.Sc. selaku penguji atas saran dan masukannya, serta staf pegawai jurusan Matematika IPB atas segala bantuannya.

Penghargaan yang tinggi penulis berikan kepada :

1. Bapak, Ibu dan seluruh keluarga atas segala do'a, cinta, kasih sayang dan dukungan yang tiada batasnya. Aku selalu mencintai kalian.
2. Oom Syamsul dan Bu'le Asih dan keluarga serta Mbah atas do'a dan bantuannya yang tulus.
3. Teman-teman Matematika'33: Didi, Nandar, Dalfi, Kustun, Budi, Minar, Jaka, Frengky, Wicak, Ismail, Reza, Beni, Kiki. Ukhti dan temen-temen akhwat '33. *terima kasih atas do'a dan dukungannya selama ini. Maafkan atas segala kesalahanku.*
4. Teman-teman warga DC 7, bafak 20 (PG). terutama Encep dan Fenta makasih atas *games*nya, Johan dan *Genk* atas pinjaman komputernya.
5. Adik-adikku angkatan 34, angkatan 35 terima kasih ......
6. Adikku Abruth (*Dila*). Makasih atas canda tawanya .....

Dan semua pihak yang tidak dapat disebutkan satu persatu. *Jazakumullah khairan katsira.*

Semoga karya ilmiah ini dapat bermanfaat dan menjadi amal sholeh bagi semua yang terlibat dalam penyusunan skripsi ini. Amiin.

Bogor, Desember 2001

Fanji Joko Timur

DAFTAR ISI

DAFTAR LAMPIRAN

Halaman

I. PENDAHULUAN

Latar Belakang

Respon produsen terhadap pesanan konsumen memegang peranan penting dalam menghadapi pesaing-pesaingnya. Produsen berusaha untuk merespon pesanan tersebut dalam waktu sesingkat mungkin. Tipe persaingan seperti ini merupakan hal yang menarik untuk dianalisa lebih lanjut. Analisa tersebut dapat dilakukan dengan memodelkan permasalahan di atas ke dalam suatu model antrean. Tulisan ini mempelajari tipe persaingan di atas dengan menggunakan model analitis yang mencakup pengaruh dari respon terhadap harga, permintaan konsumen serta keuntungan produsen.

Produsen bersaing untuk menawarkan produknya (barang atau jasa) kepada konsumen berdasarkan pesanan yang ada. Terdapat tipe konsumen yang berbeda yang mempunyai kebutuhan pelayanan (*service requirements*) dan kepekaan terhadap waktu tunda (waktu yang diperlukan pada saat pemesanan sampai dengan pesanan datang) yang berbeda satu dengan lainnya. Produsen dibedakan berdasarkan biaya produksi dan tingkat teknologinya masing-masing serta bersaing dengan menetapkan harga, produksi dan kebijakan masing-masing. Berbagai ide dari teori antrean dan teori ekonomi dapat digunakan untuk mempelajari lingkup persaingan yang terjadi.

Teori antrean digunakan untuk memodelkan kepekaan konsumen akan waktu tunda. Teori ekonomi digunakan untuk memodelkan persaingan antarprodusen dan kesetimbangan yang terjadi. Berbagai buletin ekonomi mempelajari persaingan dalam penyediaan produk (barang atau jasa) produsen terhadap kepekaan terhadap waktu (*time-sensitive*) konsumen. Sebagai contoh, De Vany dan Saving (1983) mempelajari permasalahan tersebut pada saat konsumen identik dan kepekaan konsumen terhadap harga atap. Dalam tulisan ini, harga atap didefinisikan sebagai jumlah dari harga produk dengan biaya tunda harapan.

Dalam tulisan ini akan dipelajari pula pengaruh biaya tunda terhadap harga, kebijakan, penjualan dan keuntungan produsen pada lingkup persaingan. Selain itu, dalam tulisan ini akan ditunjukkan bagaimana kemampuan bersaing produsen dalam menghadapi pesaing-pesaingnya. Kemampuan bersaing tersebut ditunjukkan melalui kemampuan proses produsen (kecepatan proses dan keragamannya) serta keuntungan produsen dalam biaya produksinya. Selanjutnya akan ditunjukkan jika permasalahan ini dikhususkan untuk kasus produsen heterogen dan konsumen homogen (sama tipe). Produsen dikatakan heterogen karena produsen memiliki biaya produksi, rataan waktu proses dan keragaman waktu prosesnya masing-masing. Pada akhirnya akan ditunjukkan bahwa *faster, lower cost dan lower variability producer* akan mempunyai pangsa pasar yang lebih besar, utilitas kapasitas yang lebih baik, dan keuntungan yang lebih baik daripada pesaing-pesaingnya. Secara lebih khusus, akan diberikan kasus pada saat biaya produksi fisik marjinal produsen adalah konstan. Jika produsen memiliki biaya produksi fisik marjinal lebih besar dibandingkan pesaing-pesaingnya, maka produsen tersebut akan memperoleh harga yang lebih baik dan waktu pengiriman yang lebih singkat.

Tujuan

Tujuan tulisan ini mempelajari persaingan waktu pengiriman antarprodusen pada kasus konsumen homogen (sama tipe).

II. LANDASAN TEORI

Model Antrean Prioritas

Proses Antrean

Proses antrean terjadi pada saat konsumen datang ke dalam fasilitas pelayanan, kemudian menunggu dalam antrean (jika semua *servers* sibuk), selanjutnya menerima pelayanan, dan akhirnya meninggalkan fasilitas pelayanan tersebut.

Sistem Antrean

Sistem antrean dapat dipandang sebagai suatu proses kelahiran dan kematian dengan populasinya adalah konsumen pada saat menunggu pelayanan atau sedang dalam pelayanan. Proses kelahiran terjadi pada saat konsumen datang ke fasilitas pelayanan; proses kematian terjadi pada saat konsumen meninggalkan fasilitas pelayanan. Pada tulisan ini *state* didefinisikan sebagai banyaknya konsumen pada sistem.

Misalkan pada waktu t terdapat n konsumen pada sistem. Jika intensitas kedatangan konsumen dan intensitas konsumen keluar dari sistem berturut-turut adalah λ dan μ, proses kelahiran dan kematian di atas diberikan oleh persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) + \lambda P_{n-1}(t)$$

untuk n=1, 2,...
dengan $P_n(t)$ adalah peluang terdapat n konsumen pada waktu t.

Karakteristik Antrean

Sistem antrean dicirikan oleh lima komponen yaitu : pola kedatangan konsumen, pola pelayanan, banyaknya *servers*, kapasitas sistem, dan disiplin antrean.

Pola Kedatangan

Pola kedatangan konsumen dapat dicirikan oleh waktu antar kedatangan (*interarrival time*) yaitu waktu antara kedatangan konsumen yang satu dengan konsumen berikutnya. Pola ini dapat bersifat deterministik (tertentu) atau bersifat probabilistik (merupakan peubah acak yang mengikuti sebaran peluang tertentu). Di samping itu pola kedatangan konsumen memiliki karakteristik sebagai berikut :

(i) Apakah kedatangan konsumen secara satuan atau secara kelompok.
(ii) Apakah *balking* atau *reneging* diterima.

Balking terjadi pada saat konsumen tidak jadi masuk ke dalam fasilitas pelayanan karena antreannya terlalu panjang. *Reneging* terjadi pada saat konsumen dalam antrean meninggalkan antrean karena terlalu lama menunggu.

Dalam permasalahan ini diasumsikan konsumen datang secara satuan dan baik *balking* atau *reneging* tidak terjadi dan pola kedatangan konsumen bersifat probabilistik.

Pola Pelayanan

Pola pelayanan biasanya dicirikan sebagai waktu pelayanan (*service time*) yaitu waktu yang digunakan oleh satu *server* untuk melayani satu konsumen. Pola ini dapat bersifat deterministik atau probabilistik. Di samping itu, dalam suatu sistem pelayanan, konsumen dapat selesai dilayani oleh satu *server* atau membutuhkan serangkaian *server*.

Dalam permasalahan ini diasumsikan pola pelayanan bersifat probabilistik dan konsumen selesai dilayani oleh satu *server*.

Kapasitas Sistem

Kapasitas sistem adalah banyaknya konsumen maksimum, baik konsumen yang sedang dilayani maupun konsumen yang ada dalam antrean ada di suatu waktu tertentu. Pada saat fasilitas pelayanan penuh, konsumen yang datang akan ditolak untuk masuk ke dalam sistem. Dengan demikian konsumen tersebut dipaksa untuk pergi tanpa menerima pelayanan.

Sistem yang tidak mempunyai batasan terhadap banyaknya konsumen yang diijinkan untuk masuk ke dalam fasilitas pelayanan disebut *infinite capacity*; sedangkan sistem yang memiliki batas disebut *finite capacity*.

Disiplin Antrean

Disiplin antrean adalah cara untuk menentukan konsumen mana yang akan dilayani. Disiplin antrean mempunyai beberapa model diantaranya model *pertama masuk pertama dilayani* (*FIFO*), model *terakhir masuk pertama dilayani* (*LIFO*); model *acak*, atau model *prioritas*.

Dalam permasalahan ini diasumsikan sistem menggunakan model *FIFO*.

Pemodelan Antrean

Bentuk model antrean distandarisasikan oleh notasi Kendall-Lee sebagai (a/b/c):(d/e/f), dengan a adalah sebaran waktu kedatangan; b adalah sebaran waktu pelayanan; c adalah banyaknya *servers*; d adalah disiplin antrean; e adalah kapasitas sistem; f adalah ukuran populasi konsumen.

Notasi yang sering digunakan untuk menyatakan sebaran peluang dari waktu kedatangan dan waktu pelayanan adalah sebagai berikut:

M=waktu antar kedatangan menyebar ekponensial.
D=deterministik.
G=sebaran lainnya.

Untuk model antrean **M/M/1** dan **M/M/c** *state* sistem sepenuhnya digambarkan oleh satu informasi, yaitu banyaknya konsumen di sistem. Informasi ini akan mempengaruhi perilaku sitem di masa yang datang. Sedangkan pada model **M/G/1** informasi ini tidak berlaku.

Formula *Little*

Dalam sistem antrean dengan intensitas kedatangan λ, hubungan antara banyaknya konsumen yang datang ke sistem dengan waktu yang dihabiskan oleh konsumen pada sistem tersebut dapat disajikan sebagai:

$$L = \lambda W$$

dengan

L= rataan banyaknya konsumen yang ada di sistem

W= rataan waktu yang dihabiskan konsumen pada sistem .

(Winston, 1994)

Formula *Pollaczec-Khinchine*

Perhatikan suatu model antrean **M/G/1** dengan disiplin *FIFO* yang memiliki sifat sebagai berikut:

a. Proses kedatangan mempunyai distribusi *Poisson* (λ).
b. Misalkan T merupakan peubah acak dari waktu pelayanan yang diberikan pada seorang konsumen dan mempunyai distribusi sembarang dengan rataan $E(T)$ dan ragam $var(T)$.
c. Dipenuhinya persyaratan kondisi kesetimbangan (*steady state*) yaitu $\rho = \lambda E(T) < 1$.

Untuk kasus ini berlaku *formula Pollaczec-Khinchine* yang dapat dinyatakan sebagai:

$$L = \lambda E(T) + \frac{\lambda^2 (E^2(T) + \mathrm{var}(T))}{2(1 - \lambda E(T))}$$

(Taha, 1992)

dengan L= rataan banyaknya konsumen yang ada pada sistem.

Antrean dengan Prioritas

Proses antrean dengan prioritas dapat dipandang sebagai proses yang mempunyai lebih dari satu tipe konsumen. Secara umum tipe konsumen pada proses antrean ini dibedakan menjadi konsumen prioritas dan konsumen bukan prioritas. Pada proses antrean ini pelayanan terhadap konsumen prioritas tidak pernah mengalami gangguan. Jika konsumen prioritas datang pada saat *server* sedang melayani konsumen bukan prioritas maka pelayanan akan segera dihentikan dan digantikan untuk melayani konsumen prioritas. Pelayanan terhadap konsumen bukan prioritas akan dilanjutkan setelah tidak ada konsumen prioritas. Proses seperti ini dikenal dengan skedul *preemptive*. Pelayanan yang diberikan kepada konsumen bukan prioritas tersebut dapat dilakukan dengan cara memberikan pelayanan dari semula atau melanjutkan pelayanan yang terhenti sebelumnya. Proses yang pertama dikenal sebagai *preempted-repeat discipline* sedangkan proses yang kedua dikenal sebagai *preempted-resume discipline*.

Sebagai contoh, misalkan model antrean dengan server tunggal untuk model *preempted-resume discipline*, dengan m tipe konsumen. Telah ditunjukkan oleh Jaiswal (1968), rataan waktu yang dihabiskan seorang konsumen tipe-k pada sistem, W_k, diberikan oleh:

$$W_k = \frac{1/\mu}{B_{k-1}\, B_k}$$

dengan B_0 =1 dan

$$B_k = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}{\mu}$$

untuk $k=1, 2,..., m$.

Sedangkan rataan banyaknya konsumen tipe-k yang ada di sistem diberikan oleh:

$$L_k = \lambda_k W_k$$

Work Conserving Rules

Misalkan suatu model antrean dengan satu atau sejumlah *server* yang identik dan aturan prioritas diterapkan. Didefinisikan *work conserving rules* sebagai berikut.

Definisi 2.1. (*Work Conserving Rules*)

Model antrean dengan aturan prioritas dikatakan *work conserving rules* apabila:

a) Tidak ada *server* yang kosong pada saat konsumen berada pada sistem.
b) Disiplin tidak mempengaruhi banyaknya waktu pelayanan yang diberikan pada konsumen atau terhadap waktu kedatangan konsumen.
c) Prioritas diberikan berdasarkan sejarah proses, dan waktu hilang sejak *epoch* terakhir menyebabkan sistem kosong. Hal ini berarti perilaku sistem hanya diamati sejak kedatangan konsumen pada saat *epoch* terakhir dan tidak tergantung pada waktu sebelumnya.

(Federgruen dan Groenevelt, 1988)

Momen, Nilai Harapan dan Sebaran Peubah Acak

Peubah Acak

Misalkan suatu percobaan acak memiliki ruang contoh Ω. Peubah acak X adalah suatu fungsi yang memetakan setiap unsur $c \in \Omega$ dengan satu dan hanya satu bilangan nyata $X(c)=x$. Ruang X adalah gugus bilangan nyata $\Psi = \{x : x = X(c), c \in \Omega\}$.

(Hogg & Craig, 1995)

Fungsi Sebaran Peluang

Fungsi sebaran peluang pada peubah acak X merupakan peluang peubah acak X lebih kecil atau sama dengan x, untuk suatu nilai riil x

$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{c \in \Omega : X(c) \in (-\infty, x]\}$

Peubah acak X dikatakan diskret jika semua gugus nilai yang mungkin dapat dicacah.

Untuk peubah acak diskret, fungsi kerapatan peluang $p_X(x_i)$ didefinisikan

$p_X(x_i) = P\{X = x_i\} = P\{c \in \Omega : X(c) = x_i\}$

dengan $p_X(x_i) \ge 0$, i = 1,2,... dan $\sum_{i=1}^{\infty} p_X(x_i) = 1$.

Fungsi sebaran pada peubah acak diskret

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{c \in \Omega : X(c) \in (-\infty, x]\} = \sum_{y \le x} p_X(y)$$

Peubah acak X dikatakan kontinu jika ada fungsi kepekatan peluang $f_X(x)$ sehingga

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = \int_{-\infty}^{x} f_X(y)\,dy$$

Dengan demikian fungsi kepekatan peluang merupakan turunan fungsi sebaran terhadap x.

(Osaki, 1992)

Momen dan Nilai Harapan

Jika X adalah peubah acak diskret, momen ke-m dari X dapat dinyatakan sebagai:

$$E[X^m] = \sum_i x_i^m P\{X = x_i\} \ .$$

Momen ke-m dari peubah acak X ada jika pernyataan di atas konvergen ke suatu nilai. Jika tidak, momen ke-m peubah acak tersebut dikatakan tidak ada.

Jika X adalah peubah acak kontinu dengan fungsi kepekatan peluang f_X, momen ke-m dari X diberikan oleh:

$$E[X^m] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^m f_X(x)\,dx$$

dan konvergen ke suatu nilai.

Momen pertama dari peubah acak X, yaitu pada saat $m=1$ disebut sebagai rataan atau nilai harapan dari X dan dinotasikan dengan $E[X]$.

Momen pusat ke-m (mth *central moment*) dari peubah acak X didefinisikan sebagai momen ke-m dari peubah acak $(X-E[X])$. Momen pusat pertama adalah nol. Didefinisikan ragam atau *variance* dari peubah acak X sebagai momen pusat kedua dari peubah acak X dan dinotasikan sebagai *var (X)* atau σ_X^2 dan diberikan oleh;

$$\mathrm{var}[X] = E[(X - E[X])^2] \ .$$

(Taylor dan Karlin, 1984)

Proses Stokastik

Proses stokastik $\{X(t),\ t \in T\}$ merupakan himpunan peubah acak, dimana $X(t)$ menunjukkan suatu kejadian pada waktu $t \in T$.

Untuk T = {0,1,2,...} proses $\{X(n),\ n$ = 0,1,2,...} disebut proses stokastik waktu diskret dan jika T merupakan waktu kontinu proses$\{X(t),\ t \ge 0\}$ disebut proses stokastik waktu kontinu.

(Osaki, 1992)

Sebaran Eksponensial

Sebaran Eksponensial mempunyai fungsi kepekatan peluang

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \mu e^{-\mu x} & (x \ge 0) \end{cases} \quad \text{untuk } \mu > 0$$

dengan fungsi sebaran

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 - e^{-\mu x} & (x \ge 0) \end{cases}$$

Sebaran eksponensial mempunyai nilai rata-rata yaitu $1/\mu$ (Osaki, 1992).

Sebaran *Poisson*

Sebaran Poisson dengan parameter $\lambda > 0$ mempunyai fungsi kerapatan peluang

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad \text{dengan } x = 0,1,\ldots$$

Sebaran Poisson mempunyai nilai rata-rata dan nilai ragam yang sama besar yaitu λ (Osaki, 1992).

Peubah acak yang merupakan jumlah dari dua atau lebih peubah acak Poisson yang saling bebas akan mempunyai distribusi Poisson juga dengan parameter d. Hal ini dapat ditunjukkan oleh teorema berikut.

Teorema 2.2.
Misalkan X dan Y adalah peubah acak saling bebas dan memiliki distribusi Poisson dengan parameter berturut-turut μ dan ν. Maka X+Y memiliki distribusi Poisson dengan parameter $\mu+\nu$.
Bukti. Lihat Taylor dan Karlin,1984.□

Proses *Poisson*
Proses Poisson dengan intensitas $\lambda > 0$ adalah proses stokastik yang bernilai bilangan bulat $\{X(t); t \geq 0\}$ yang mempunyai sifat :
(i) Untuk setiap waktu $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$, proses $X(t_1) - X(t_0), \ldots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ merupakan peubah acak yang saling bebas ;
(ii) Untuk $s \geq 0$ dan $t > 0$,
peubah acak $X(s+t) - X(s)$ mempunyai sebaran Poisson, dan

$$\Pr\{X(s+t) - X(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \;;$$

(iii) $X(0) = 0$
Jika $X(t)$ merupakan proses Poisson dengan intensitas $\lambda > 0$, maka $E[X(t)] = \lambda t$ dan ragam$[X(t)] = \lambda t$.

(Taylor dan Karlin,1984)

Pengoptimuman

Permasalahan umum dalam suatu permasalahan riset operasi adalah menentukan solusi optimal dari suatu fungsi tujuan dari permasalahan tertentu. Solusi optimal ini haruslah memenuhi kendala-kendala tertentu.

Bentuk umum permasalahan ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{array}{ll} max & f(X) \\ s.t. & g_i(X) \geq 0 \,, i = 1,2,3,\ldots,m \\ & X \geq 0 \end{array}$$

dengan $X=[x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n]$. Solusi X^* yang mengakibatkan f optimal disebut solusi optimal dari X.

Salah satu bentuk khusus dari permasalahan pengoptimuman adalah *programa konveks*. Programa konveks adalah permasalahan pengoptimuman di atas dengan syarat *f konkaf* dan g_i *konveks*. Jika g_i *konveks* maka solusi, $S \subseteq X$ yang diperoleh adalah *konveks*.

(Nikaido, 1975)

Lema berikut memberikan syarat perlu suatu fungsi mencapai nilai optimal pada permasalahan minimisasi.

Lema 2.3.
Misalkan F adalah fungsi dari X yang terdefinisi pada $\Re^n$, dengan $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]$ dan $x_i \geq 0$ untuk $i=1, 2, \ldots, n$ serta turunan parsial dari F ada. Jika F minimum pada $X=X^* \geq 0$ maka kondisi berikut terpenuhi:

1) $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{X=X^*} \geq 0$ untuk $i= 1, 2, \ldots, n$

2) $\sum_{i=1}^{n} x_i^* \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{X=X^*} = 0$,

sedemikian sehingga $\left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)_{X=X^*} = 0$ untuk $x_i^* > 0$, (1) dan (2) berlaku.

Bukti: Lihat Nikaido, 1975.□

III. PERUMUSAN MASALAH

Pemodelan

Dalam permasalahan ini, misalkan terdapat n produsen dan m tipe konsumen. Produsen-produsen tersebut dapat dibedakan berdasarkan tingkat teknologi dan biaya produksinya. Tipe konsumen yang ada pada sistem dibedakan berdasarkan fungsi permintaan, biaya tunda dan syarat prosesnya. Biaya tunda di atas merupakan biaya yang dikeluarkan konsumen karena adanya waktu tunda (waktu yang diperlukan mulai saat pemesanan sampai dengan pesanan datang). Misalkan $N=\{1,2,\ldots,n\}$ adalah himpunan produsen dan $M=\{1,2,\ldots,m\}$ adalah himpunan tipe konsumen. Produsen bersaing untuk menawarkan produknya (barang atau jasa) kepada konsumen berdasarkan pesanan yang ada. Pada kapasitas (intensitas) produksi yang diberikan, produsen dapat menetapkan harga yang berbeda untuk tipe konsumen yang berbeda untuk memperoleh keuntungan maksimum. Secara umum, permasalahan di atas dapat dibangun dengan menggunakan asumsi-asumsi berikut:

A1. Karakteristik Konsumen

Konsumen dibedakan berdasarkan kebutuhan pelayanan (*service requirements*) yang diinginkan yaitu, $v(z)$ untuk $z \in M$. Kebutuhan pelayanan dalam hal ini adalah lamanya waktu pelayanan konsumen tersebut. Selain itu, konsumen dibedakan pula berdasarkan harga produk, $p(z)$ dan biaya tunda sebesar $c(z)$ per satuan unit waktu tunda. Tingkat permintaan konsumen itu sendiri direpresentasikan oleh fungsi $d(z,P(z))$ dengan $P(z)$ adalah harga atap untuk konsumen tipe z. Harga atap ini merupakan jumlah dari harga produk dan biaya tundanya. Diasumsikan harga atap konsumen tipe z untuk setiap produsen adalah sama. Harga produk produsen i, $i \in N$ untuk konsumen tipe z haruslah memenuhi hal berikut:

$$P(z) = p_i(z) + c(z)W_i(z,\bar{\lambda}_i)$$

dengan $W_i(z,\bar{\lambda}_i)$ adalah waktu tunda harapan produsen i untuk konsumen tipe z pada saat intensitas produksi $\bar{\lambda}_i$.

A2. Proses Kedatangan

Proses kedatangan konsumen untuk semua tipe konsumen secara keseluruhan diasumsikan sebagai *proses Poisson d*.

A3. Karakteristik Produsen

Dalam melakukan kegiatan produksinya, produsen memiliki tingkat teknologi tersendiri termasuk rataan dan ragam dari waktu prosesnya. Misalkan intensitas pelayanan produsen i adalah μ_i , $i \in N$. Waktu proses produsen i untuk satu unit pelayanan memiliki sebaran tertentu dengan rataan $1/\mu_i$ dan ragam σ_i^2.

Biaya produksi fisik produsen i pada intensitas produksi $\bar{\lambda}_i$ adalah $C_i(\bar{\lambda}_i)$, dimana fungsi biaya C_i tersebut kontinu, *differentiable*, naik dan konveks terhadap variabel λ_i.

A4. Kebijakan Produsen

Produsen memiliki kebijakan tersendiri untuk mengetahui dengan pasti pekerjaan (pesanan/*order*) mana yang harus dikerjakan pada setiap saat. Kebijakan tersebut dapat berupa *FIFO* atau *static preemptive priority*.

Produsen i, $i \in N$ yang menerapkan kebijakan FIFO menempatkan pesanan yang datang pertama kali akan segera dilayani. Kebijakan ini diterapkan pada saat tipe konsumen yang ada adalah sama (homogen). *Static preemptive priority* dapat dijelaskan sebagai berikut: Konsumen z memiliki prioritas yang lebih tinggi daripada konsumen z' jika $c(z)/v(z) \geq c(z')/v(z')$. Di samping itu, kedatangan seorang konsumen z akan menghentikan pelayanan konsumen z' yang sedang dilayani. Setelah tidak ada lagi konsumen z di sistem maka pelayanan konsumen z' yang terhenti dapat segera dilanjutkan kembali. Kebijakan produsen i dinotasikan sebagai f_i.

A5. Proses Pelayanan

Distribusi waktu proses produsen i dapat berupa distribusi eksponensial atau distribusi lainnya sedemikian sehingga *static preemptive priority* merupakan kebijakan optimal bagi produsen tersebut.

A6. Karakteristik Persaingan

Produsen menetapkan harga dan intensitas produksinya untuk masing-masing tipe konsumen sedemikian sehingga keuntungan yang diperoleh maksimum. Selain itu, produsen bertindak sebagai penerima harga atap (*full price taker*) dan bukan sebagai penerima harga (*price taker*) dan oleh karena itu produsen dapat menyesuaikan harga.

Setiap produsen berkeinginan untuk dapat memaksimumkan keuntungannya pada saat harga, intensitas produksi serta kebijakan tertentu. Didefinisikan kesetimbangan persaingan sebagai vektor dari harga atap, intensitas produksi dan kebijakan sedemikian sehingga keuntungan yang diperoleh produsen maksimum dan total biaya produksi di sistem minimum. Pada saat kesetimbangan, permintaan masing-masing tipe konsumen sama dengan intensitas produksi agregat.

Keuntungan produsen i merupakan fungsi dari harga atap, intensitas produksi dan kebijakan, yang dapat disajikan sebagai berikut:

$$\pi_i(\bar{P},\bar{\lambda},f_i) =$$
$$= \sum_{z\in M} p_i(z)\lambda_i(z) - C_i(\bar{\lambda}_i)$$
$$= \sum_{z\in M}\left[P(z) - c(z)W_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i)\right]\lambda_i(z) - C_i(\bar{\lambda}_i)$$
$$= \sum_{z\in M}\left[P(z)\lambda_i(z) - c(z)\lambda_i(z)W_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i)\right] - C_i(\bar{\lambda}_i)$$
$$= \sum_{z\in M}\left[P(z)\lambda_i(z) - c(z)L_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i)\right] - C_i(\bar{\lambda}_i) \quad (3.1)$$

dengan $L_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i)$ sebagai rataan banyaknya pekerjaan (pesanan/*order*) tipe z yang dilayani produsen i.

Berikut akan diperlihatkan pemilihan produsen akan kebijakan serta intensitas produksi yang dapat memaksimumkan keuntungannya yang pada akhirnya akan dicapai kesetimbangan dalam persaingan.

Kebijakan Produsen dan Kesetimbangan Persaingan

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, setiap produsen akan memilih kebijakan dan intensitas produksinya masing-masing agar keuntungannya maksimum. *Pertama*, akan diperlihatkan kebijakan yang seperti apa yang dapat memaksimumkan keuntungan tersebut. Dari persamaan (3.1), mencari kebijakan optimal (keuntungan maksimum), f_i^0 sama halnya dengan menyelesaikan permasalahan berikut:

$$\min_{f_i} \sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i) \quad (3.2)$$

Federgruen dan Groenevelt (1988) menunjukkan bahwa *static preemptive priority* merupakan kebijakan optimal dari permasalahan di atas. Hal ini didasarkan pada saat kedatangan konsumen dipandang sebagai proses *Poisson*, kebijakan dibatasi menurut *work conserving rules*, dan waktu proses mempunyai distribusi eksponensial.

Dengan demikian pada permasalahan ini semua produsen memiliki kebijakan optimal menurut *static preemptive priority*.

Untuk penyederhanaan disusun prioritas konsumen sebagai:

$$c(1)/v(1) \ge c(2)/v(2) \ge \cdots \ge c(m)/v(m) \quad (3.3)$$

Dengan kebijakan optimal, f_i^0, dinotasikan hal berikut:

$$L_i(z,\bar{\lambda}_i) \equiv L_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i^0)$$
$$W_i(z,\bar{\lambda}_i) \equiv W_i(z,\bar{\lambda}_i,f_i^0)$$

Permasalahan selanjutnya adalah menentukan intensitas produksi produsen yang memaksimumkan keuntungan. Pada saat harga atap $\bar{P}$, permasalahan maksimisasi keuntungan produsen i, untuk $i \in N$ dapat dinyatakan sebagai:

$$\max_{\bar{\lambda}_i\in\Re_+^m} \sum_{z\in M} P(z)\lambda_i(z) - [\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\bar{\lambda}_i) + C_i(\bar{\lambda}_i)] \quad (3.4)$$

Misalkan $\bar{s}_i(\bar{P}) \equiv (s_i(z,\bar{P}))_{z\in M}$ merupakan solusi $\bar{\lambda}_i$ dari permasalahan (3.4), dengan $s_i(z,\bar{P})$ dinotasikan sebagai tingkat produksi optimal produsen i bagi konsumen z. Didefinisikan $\bar{s}(\bar{P}) = \sum_{i\in N} s_i(\bar{P})$ adalah vektor intensitas produksi agregat pada saat harga atap $\bar{P}$.

Berikut diberikan definisi kesetimbangan persaingan.

Definisi 3.1. (*Kesetimbangan Persaingan*)
Misalkan $\vec{d}(\bar{P}) \equiv (d(z,P(z)))_{z\in M}$ *adalah permintaan konsumen pada harga atap* $\bar{P}$. *Kesetimbangan persaingan adalah vektor dari harga atap* $\bar{P}^*$ *dan vektor dari keputusan berproduksi,* $(\bar{\lambda}_i^*)_{i\in N}$, *sedemikian sehingga* $\bar{s}(\bar{P}^*) = \bar{d}(\bar{P}^*)$, *dan* $\bar{\lambda}_i^* = \bar{s}_i(\bar{P}^*)$ *untuk semua* $i \in N$.

Untuk menunjukkan keberadaan kesetimbangan tersebut, digunakan asumsi berikut.

A7. Fungsi Biaya Atap
Untuk semua $i \in N$, *fungsi biaya atap produsen i adalah konveks terhadap variabel* $\bar{\lambda}_i$ *Fungsi biaya tersebut merupakan jumlah total rataan biaya tunda konsumen dan biaya produksi produsen i yang dinyatakan sebagai:*

$$\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\bar{\lambda}_i) + C_i(\bar{\lambda}_i) \quad (3.5)$$

Asumsi di atas berlaku untuk kasus-kasus berikut:

Kasus 1: Syarat proses konsumen identik, waktu proses menyebar eksponensial, dan aturan prioritas berlaku. Tanpa mengurangi sifat keumumannya diasumsikan $v(z)=1$ untuk semua $z \in M$. Hal ini dapat ditunjukkan pada lema berikut.

Lema 3.2. *Misalkan konsumen mempunyai syarat proses yang identik, waktu proses produsen i menyebar eksponensial dengan rataan waktu proses $1/\mu_i$ dan static preemptive priority berlaku. Maka* $\sum_{z \in M} c(z) L_i(z, \bar{\lambda}_i)$ *adalah naik dan strictly convex pada* $\lambda_i(z)$.

Bukti. Lihat lampiran 1. □

Kasus 2: Biaya tunda sama dan syarat proses identik. Karena biaya tunda sama, maka semua konsumen memiliki prioritas sama dan kebijakan prioritas menjadi FIFO. Disamping itu, waktu proses pada produsen *i* tidak menyebar eksponensial dengan rataan $1/\mu_i$ dan ragam σ_i^2. Diasumsikan $v(z)=1$. Hal ini ditunjukkan pada lema berikut.

Lema 3.3. *Misalkan konsumen memiliki prioritas sama. Jika waktu proses produsen i,* $\forall i \in N$ *tidak menyebar eksponensial dengan rataan waktu proses* $1/\mu_i$ *dan ragam* σ_i^2. *Maka fungsi* $cL_i(\lambda_i)$ *adalah naik dan strictly convex terhadap* λ_i.

Bukti. Lihat lampiran 2. □

Didefinisikan *biaya atap marjinal* produsen *i* sebagai kenaikan biaya produksi dan biaya tunda konsumen seiring dengan kenaikan intensitas produksinya. Biaya marjinal produsen *i* tersebut didefinisikan sebagai turunan dari fungsi biaya terhadap $\lambda_i(z)$ dan dapat ditafsirkan sebagai:

$$v_i(z, \bar{\lambda}_i) \equiv \sum_{x=1}^{m} c(x) \frac{\partial L_i(x, \bar{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i(z)} + \frac{\partial C_i(\bar{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i(z)} \qquad (3.6)$$

Lema berikut menunjukkan syarat perlu terdapatnya solusi optimal dari permasalahan (3.4).

Lema 3.4. *Misalkan* $\sum_{z \in M} c(z) L_i(z, \bar{\lambda}_i)$ *naik dan strictly convex terhadap* $\lambda_i(z)$. $(\bar{P}^*, (\bar{\lambda}_i^*)_{i \in N})$ *merupakan kesetimbangan persaingan dari permasalahan (3.4) jika dan hanya jika terdapat* $\gamma_i^*(z) \geq 0$ *sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi:*

$$P^*(z) - v_i(z, \bar{\lambda}_i^*) + \gamma_i^*(z) = 0 \qquad (3.7)$$

$$\gamma_i^*(z) \lambda_i^*(z) = 0 \qquad (3.8)$$

$$\gamma_i^*(z) \geq 0 \qquad (3.9)$$

$$\lambda_i^*(z) \geq 0 \qquad (3.10)$$

$$\sum_{i \in N} \lambda_i^*(z) = d(z, P^*(z)) \qquad (3.11)$$

Bukti. Lihat lampiran 3. □

Pada lema 3.4, jika $\lambda_i^*(z) > 0$ maka harga atap kesetimbangan untuk konsumen tipe *z*, $P^*(z)$ akan sama dengan biaya atap marjinal pada saat kesetimbangan, $v_i(z, \bar{\lambda}_i^*)$. Jika $\lambda_i^*(z) = 0$ maka harga atap kesetimbangan untuk konsumen tipe z, $P^*(z)$ tidak lebih tinggi dari biaya atap marjinal pada saat kesetimbangan, $v_i(z, \bar{\lambda}_i^*)$. Hal ini diperlihatkan oleh proposisi berikut.

Proposisi 3.5 *Jika* $\left(\bar{P}^*, (\bar{\lambda}_i^*)_{i \in N}\right)$ *merupakan kesetimbangan persaingan, produksi yang meminimumkan total biaya produksi produsen dan penundaan konsumen dipengaruhi oleh pemenuhan permintaan. Lebih lanjut, harga atap untuk konsumen tipe z sama dengan biaya atap marjinal (marginal full costs) produsen yang melayani konsumen tersebut dan tidak lebih tinggi dari biaya atap marjinal produsen yang tidak melayani konsumen tersebut.*

Bukti. Lihat lampiran 4. □

IV. PEMBAHASAN

Untuk menunjukkan pengaruh biaya, waktu proses, dan keragaman waktu proses produsen untuk bersaing diberikan suatu contoh kasus berikut, yaitu persaingan antarprodusen yang heterogen yang melayani konsumen bertipe sama. Produsen dikatakan heterogen karena mereka memiliki fungsi biaya yang berbeda, rataan waktu proses dan keragaman waktu proses yang berbeda pula. Pada kasus tersebut akan diperlihatkan pengaruh dari kemampuan produksi produsen pada penguasaan pangsa pasar, harga, waktu tunggu harapan (waktu pengiriman), utilitas kapasitas dan keuntungan produsen.

Tinjauan Kasus : Produsen Heterogen dan Konsumen Homogen

Pada bab ini, akan dipelajari kesetimbangan persaingan untuk kasus dimana,

a. Konsumen bertipe sama, yakni $M=\{1\}$.
b. Waktu proses produsen tidak menyebar eksponensial.
c. Proses kedatangan konsumen diasumsikan sebagai proses *Poisson*.

Untuk kasus ini kebijakan yang diterapkan adalah FIFO. Kebijakan tersebut dapat diperoleh dengan menggunakan formula *Pollaczec-Khinchine* yang dinyatakan sebagai:

$$L_i(\lambda_i) = \lambda_i E(T) + \frac{\lambda_i^2(E^2(T)+\mathrm{var}(T))}{2(1-\lambda_i E(T))}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \frac{\lambda_i^2(1+\mu_i^2\sigma_i^2)}{2\mu_i^2(1-\frac{\lambda_i}{\mu_i})}$$

$$= \lambda_i\left(\frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i\theta_i}{\mu_i(\mu_i-\lambda_i)}\right) \qquad (4.1)$$

dan

$$W_i(\lambda_i) = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i\theta_i}{\mu_i(\mu_i-\lambda_i)}, \qquad (4.2)$$

dengan $\theta_i \equiv (1+\mu_i^2\sigma_i^2)/2$, $1/\mu_i$ dan σ_i^2 berturut-turut merupakan rataan dan ragam dari waktu proses produsen i. Hal ini berakibat

$$\frac{dL_i(\lambda_i)}{d\lambda_i} = W_i(\lambda_i) + \lambda_i W_i'(\lambda_i)$$

$$= W_i(\lambda_i) + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i)^2}. \qquad (4.3)$$

Hasil berikut menunjukkan ketunggalan dan ciri khas dari kesetimbangan persaingan.

Proposisi 4.1. *Di bawah kondisi a-c, terdapat kesetimbangan persaingan yang unik. Pada kesetimbangan , terdapat himpunan dari produsen aktif* N^*, *yakni* $\lambda_i^* > 0$ *jika* $i \in N^*$ *dan* $\lambda_i^* = 0$ *selainnya. Untuk setiap* $i \in N^*$;

$$P^* = d^{-1}\left(\sum_{j\in N}\lambda_j^*\right) = cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*) \qquad (4.4)$$

Bukti. Lihat lampiran 5. □

Permasalahan selanjutnya adalah memperlihatkan sejauh mana kemampuan bersaing masing-masing produsen dalam menghadapi pesaing-pesaingnya. Kemampuan bersaing tersebut dapat diperlihatkan menurut waktu proses (*processing capability*) dan biaya produksi fisik marjinal (*production cost advantages*). Waktu proses menunjukkan seberapa cepat produsen dapat melayani konsumen yang datang padanya, sedangkan biaya produksi fisik marjinal produsen menunjukkan seberapa besar pengaruh dari parameter yang berhubungan dengan biaya produksi. Parameter tersebut dapat berupa lokasi fasilitas, komposisi tenaga kerja dsb.

Dalam pembahasan ini akan dipelajari pengaruh dari karakteristik produksi produsen di atas terhadap harga, *contributions margin*, penguasaan pangsa pasar, dan utilitas kapasitas.

Dinotasikan $\bar{\alpha}_i = (1/\mu_i, \mu_i\sigma_i)$ sebagai parameter waktu proses produsen i. $\bar{\alpha}_i = (1/\mu_i, \mu_i\sigma_i)$ adalah pasangan dari rataan dan koefisien keragaman dari waktu proses produsen i. Panjang antrean (4.1) dan rataan waktu tunggu (4.2) berturut-turut dapat pula disajikan sebagai $L(\lambda_i, \bar{\alpha}_i)$ dan $W(\lambda_i, \bar{\alpha}_i)$. $L_i'(\lambda_i, \bar{\alpha}_i)$ dipandang sama seperti persamaan (4.3) serta naik terhadap $\bar{\alpha}_i$.

Misalkan $\vec{\beta}_i$ merupakan parameter yang mempengaruhi biaya produksi fisik dari produsen i. Dinotasikan biaya produksi fisik produsen i sebagai $C(\lambda_i, \vec{\beta}_i) = C(\lambda_i)$. Diasumsikan biaya produksi fisik marjinal, $C'(\lambda_i, \vec{\beta}_i)$ turun terhadap $\vec{\beta}_i$.

Produsen i merupakan *faster producer* dibandingkan produsen j jika $\mu_i \geq \mu_j$, *lower variability producer* jika waktu proses produsen i memiliki *koefisien keragaman* (*coefficient of variation*) yang lebih kecil dari pada produsen j, $\mu_i\sigma_i \leq \mu_j\sigma_j$, dan *lower cost producer* jika $C'(\lambda,\vec{\beta}_i) \leq C'(\lambda,\vec{\beta}_j)$ untuk semua $\lambda \geq 0$. Hasil berikut menunjukkan bahwa jika produsen i merupakan *faster*, *lower variability*, dan *lower cost producer* maka pada saat kesetimbangan produsen i akan memperoleh pangsa pasar, λ_i^* dan keuntungan, $\pi_i(P^*,\lambda_i^*)$ yang lebih besar daripada pesaing-pesaingnya.

Akibat 4.2. *Jika* $\vec{\alpha}_i \leq \vec{\alpha}_j$ *dan* $\vec{\beta}_i \geq \vec{\beta}_j$ *untuk* $i,j \in N^*$, $i \neq j$, *maka pada kesetimbangan* $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$ *dan* $\pi_i(P^*,\lambda_i^*) \geq \pi_j(P^*,\lambda_j^*)$.

Bukti. Lihat lampiran 6. □

Produsen mungkin saja memiliki harga yang lebih rendah dan waktu pengiriman yang lebih lama atau memiliki harga yang lebih tinggi dan waktu pengiriman yang lebih cepat. Produsen dengan kemampuan proses yang lebih baik cenderung untuk berkompetisi dalam hal waktu pengiriman yang berakibat langsung pada harga sesuai dengan waktu pengirimannya tersebut, sedangkan produsen yang memiliki keuntungan dalam biaya produksi yang lebih baik cenderung untuk berkompetisi dengan menetapkan harga yang lebih rendah. Sebagai contoh, produsen i adalah *fast producer* (μ_i lebih besar) dan keragaman waktu prosesnya sangat kecil (σ_i sangat kecil) dibandingkan produsen lainnya. Maka, waktu pengirimannya sangat cepat dan harga yang ditetapkannya lebih tinggi dibandingkan lainnya. Tidak demikian halnya pada produsen yang tidak memiliki keuntungan seperti di atas, di mana produsen seperti ini akan memiliki waktu pengiriman yang lebih lama dan harga yang lebih kecil. Hal tersebut di atas dapat ditunjukkan sebagai berikut.

Akibat 4.3. *Misalkan produsen i dan j,* $i \neq j$, *memiliki distribusi waktu proses dengan rataan dan ragam yang sama, yakni* $\mu_i = \mu_j$ *dan* $\sigma_i = \sigma_j$. *Jika* $\vec{\beta}_i \geq \vec{\beta}_j$, *maka pada saat kesetimbangan produsen i akan memiliki harga yang lebih rendah dan waktu pengiriman yang lebih lama daripada produsen j, yaitu berturut-turut* $p_i^* \leq p_j^*$ *dan* $W(\lambda_i^*,\vec{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j^*,\vec{\alpha}_j)$.

Bukti. Lihat lampiran 7. □

Jika suatu produsen memiliki biaya produksi fisik marjinal lebih rendah, akibat 4.2 menunjukkan produsen tersebut akan menguasai pasar yang lebih besar, $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$. Produsen dengan harga yang lebih rendah berakibat kualitas pelayanannya semakin rendah (akibat 4.3). Dalam hal ini, kualitas pelayanan dapat diartikan sebagai waktu pengiriman.

Berikut akan ditunjukkan suatu kasus tentang harga dan waktu pengiriman suatu produsen pada saat biaya produksi fisik marjinalnya adalah konstan.

Akibat 4.4. *Misalkan dua produsen i dan j,* $i \neq j$, *memiliki biaya produksi fisik marjinal konstan, yakni* $C_i'(\bullet) = \kappa_i$ *dan* $C_j'(\bullet) = \kappa_j$. *Lebih lanjut, produsen i merupakan faster, lower variability producer dibandingkan dengan produsen j.*

1. *Jika produsen i memiliki biaya produksi marjinal yang lebih rendah, yakni* $\kappa_i \leq \kappa_j$, *maka pada kesetimbangan persaingan, produsen i akan memiliki pangsa pasar, contribution margin yang lebih besar dan tingkat utilitas yang lebih tinggi, yakni:* $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$, $p_i^* - \kappa_i \geq p_j^* - \kappa_j$, *dan* $\rho_i^* \geq \rho_j^*$, *dengan* $\rho_l^* = \lambda_l^* / \mu_l$ *untuk* $l \in N$.
2. *Jika produsen i memiliki biaya produksi marjinal yang lebih besar , yakni* $\kappa_i \geq \kappa_j$, *maka pada kesetimbangan persaingan, produsen i akan memiliki harga yang lebih tinggi serta waktu pengiriman yang lebih cepat, yakni:* $p_i^* \geq p_j^*$ *dan* $W(\lambda_i^*,\vec{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*,\vec{\alpha}_j)$.

Bukti. Lihat lampiran 8. □

Hasil pertama menunjukkan bahwa jika biaya produksi fisik linear, maka *faster*, *lower variability*, dan *lower cost producer* tidak hanya memiliki pangsa pasar dan *contribution margin* yang lebih baik akan tetapi produsen tersebut akan memiliki utilitas kapasitas yang lebih besar. Perhatikan bahwa $\rho_i^* \geq \rho_j^*$ ekivalen dengan

$\frac{\lambda_i^*}{\mu_i} \geq \frac{\lambda_j^*}{\mu_j}$. Hal ini berarti produsen dengan kapasitas yang lebih besar akan menguasai pasar lebih besar pula. Sebagai contoh, jika kapasitas produsen i adalah tiga kali lebih besar kapasitas produsen j, ($\mu_i = 3\mu_j$). Maka produsen i akan memiliki pangsa pasar lebih dari tiga kalinya pangsa pasar produsen j, ($\lambda_i^* \geq 3\lambda_j^*$).

Hasil yang kedua menunjukkan *faster*, *lower variability*, dan *higher cost producer* cenderung berkompetisi dalam hal pengiriman dengan menawarkan waktu pengiriman yang lebih singkat, tetapi produsen tersebut akan menetapkan harga yang lebih tinggi. Dari bagian 1 dan 2 dari akibat 4.4 di atas, jika produsen i dan j memiliki biaya produksi marjinal yang sama, maka *faster*, dan *lower variability producer* memiliki pasar yang lebih besar, *contribution margin* yang lebih baik, harga yang lebih tinggi, waktu pengiriman yang lebih singkat, dan utilitas kapasitas yang lebih baik.

V. KESIMPULAN

Dalam pembahasan di atas telah ditunjukkan pada saat biaya produksi fisik marjinal produsen adalah konstan, maka *faster*, *lower variability*, dan *higher cost producer* akan memperoleh harga yang lebih baik dan waktu pengiriman yang lebih singkat, sedangkan produsen yang memiliki keuntungan dalam hal biaya produksi namun tidak memiliki kemampuan proses yang lebih baik dibandingkan pesaing-pesaingnya cenderung bersaing dengan menetapkan harga yang lebih rendah dan waktu pengiriman yang lebih lama.

VI. DAFTAR PUSTAKA

De Vany, A.S. dan **T.R. Saving**. 1983. The Economic of Quality. *Journal of Political Economy*. **91**: 979-1000.

Elyazar, I.R.F. 1998. *Simulasi Sebaran Waktu Antar Kedatangan pada Model Antrean Tunggal* (skripsi). Jurusan Statistika, FMIPA-IPB. Bogor.

Farid, F.N. 2001. *Optimasi Kontrol Arus dan Skedul dalam Antrean Satu Server dengan Dua Tipe Pekerjaan* (skripsi). Jurusan Matematika, FMIPA-IPB. Bogor.

Federgruen, A. dan **H. Groenevelt**. 1988. Characterization and Optimization of Achievable Performance in General Queueing Systems. *Operations Researchs*. **36**: 733-741.

Hogg, R.V. dan **A.T. Craig**. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*. Ed. ke-5 Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

Jaiswal, N.K. 1968. *Priority Queues*. Academic Press, New York & London.

Kleinrock, L. 1976. *Queueing Systems*. Vol ke-2. John Wiley and Sons, New York.

Lederer, P.J. dan L. Li. 1997. Pricing, Production, Scheduling, and Delivery-Time Competition. *Operations Researchs*. **46**(3): 407-420.

Nikaido, N. 1975. *Introduction to Sets and Mappings in Modern Economics*. North Holland, Amsterdam & Oxford.

Osaki, S. 1992. *Applied Stochastic System Modelling*. Springer-Verlag, Berlin.

Taha, H.A. 1992. *Operations Research: An Introductions*. MacMillan, New York

Taylor, H.M. dan **S. Karlin**. 1984. *An Introduction to Stochastic Modelling*. Academic Press Inc., Orlando, Florida.

Winston, W.L. 1994. *Operations Research: Applications and Algorithms*. Ed. ke-3. Wadsworth, California.

LAMPIRAN

Lampiran 1. Pembuktian Lema 3.2:

Lema 3.2. *Misalkan konsumen mempunyai syarat proses yang identik, waktu proses produsen i menyebar eksponensial dengan rataan waktu proses $1/\mu_i$ dan static preemptive priority berlaku. Maka* $\sum_{z \in M} c(z) L_i(z, \vec{\lambda}_i)$ *adalah naik dan strictly convex pada* $\lambda_i(z)$.

Bukti:

Dengan kebijakan *static preemptive priority* diterapkan, berarti dapat dibuat aturan prioritas dari tipe konsumen sebagai berikut:

$$c(1)/v(1) \geq c(2)/v(2) \geq \cdots \geq c(m)/v(m) . \qquad ...(1)$$

Karena konsumen mempunyai syarat proses yang sama, maka $v(z)$ sama $\forall z \in M$, jadi diperoleh:

$$c(1) \geq c(2) \geq \cdots \geq c(m) . \qquad ...(2)$$

Tanpa mengurangi sifat keumumannya diasumsikan $v(z)=1, \ \forall z \in M$.

Karena

$$W_i(z, \vec{\lambda}_i) = \frac{1/\mu_i}{B_{z-1} B_z} \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad ...(3)$$

di mana $B_0 = 1$

$$B_z = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{z} \lambda_i(k)}{\mu_i}, \qquad z = 1, 2, \cdots, m \qquad ...(4)$$

maka

$$\begin{aligned} L_i(z, \vec{\lambda}_i) &= \lambda_i(z) W_i(z, \vec{\lambda}_i) \\ &= \frac{\lambda_i(z)}{\mu_i} \frac{1}{B_{z-1} B_z} \\ &= \rho_i(z) \cdot \frac{1}{B_{z-1} B_z} , \end{aligned} \qquad ...(5)$$

di mana $\rho_i(z) = \dfrac{\lambda_i(z)}{\mu_i}$ . ...(6)

Dari (4) dan (6) diperoleh:

$$\begin{aligned} B_z &= 1 - \frac{\sum_{k=1}^{z} \lambda_i(k)}{\mu_i} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{z} \lambda_i(k) / \mu_i \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{z} \rho_i(k) \\ &= 1 - a_i(z) . \end{aligned} \qquad ...(7)$$

di mana $a_i(z) = \sum_{k=1}^{z} \rho_i(k)$ . ...(8)

Dari (5) dan (8) diperoleh:

$$\begin{aligned} L_i(z, \vec{\lambda}_i) &= \frac{\rho_i(z)}{B_{z-1} B_z} \\ &= \frac{\rho_i(z)}{(1 - a_i(z-1)) \cdot (1 - a_i(z))} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1-a_i(z))} - \frac{1}{(1-a_i(z-1))} \quad . \qquad \dots (9)$$

Dari persamaan (9):

$$\sum_{z=1}^{m} c(z) L_i(z,\vec{\lambda}_i) = \sum_{z=1}^{m} c(z)\left[\frac{1}{(1-a_i(z))} - \frac{1}{(1-a_i(z-1))}\right]$$

$$= \frac{c(1)}{1-a_i(1)} - \frac{c(1)}{1-a_i(0)} + \frac{c(2)}{1-a_i(2)} - \frac{c(2)}{1-a_i(1)} + \cdots$$

$$+ \frac{c(m-1)}{1-a_i(m-1)} - \frac{c(m-1)}{1-a_i(m-2)} + \frac{c(m)}{1-a_i(m)} - \frac{c(m)}{1-a_i(m-1)}$$

$$= \frac{c(0)-c(1)}{1-a_i(0)} + \frac{c(1)-c(2)}{1-a_i(1)} + \frac{c(2)-c(3)}{1-a_i(2)} + \cdots + \frac{c(m-1)-c(m)}{1-a_i(m-1)} + \frac{c(m)-c(m+1)}{1-a_i(m)}$$

$$= \sum_{z=0}^{m} (c(z)-c(z+1)) \cdot \frac{1}{(1-a_i(z))} \ , \qquad \dots (10)$$

dengan $c(0)=0$ dan $c(m+1)=0$.
Dari persamaan (2):

$$c(z) - c(z+1) \geq 0 \ , \ \forall z \in M \ . \qquad \dots (11)$$

Karena (10) dan (11) berlaku, maka untuk menunjukkan bahwa fungsi $\sum_{z=1}^{m} c(z) L_i(z,\vec{\lambda}_i)$ adalah fungsi naik dan *strictly convex* terhadap variabel $\lambda_i(z)$, cukup ditunjukkan bahwa fungsi $\frac{1}{(1-a_i(z))}$ sebagai fungsi dari variabel $\lambda_i(z)$ naik dan *strictly convex*, yaitu turunan pertama dan kedua fungsi tersebut terhadap $\lambda_i(z)$ bernilai >0.

Misalkan

$$r(\lambda_i(z)) = \frac{1}{(1-a_i(z))}$$

$$= \frac{1}{1-\sum_{k=1}^{z} \rho_i(k)}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\sum_{k=1}^{z} \lambda_i(k)/\mu_i\right)}$$

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda_i(z)} = \frac{1/\mu_i}{\left(1-\sum_{k=1}^{z} \lambda_i(k)/\mu_i\right)^2}$$

$$= \frac{1/\mu_i}{\left(1-\sum_{k=1}^{z} \rho_i(k)\right)^2} > 0.$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \lambda_i^2(z)} = \frac{\frac{2}{\mu_i}\left(1-\sum_{k=1}^{z}\lambda_i(k)/\mu_i\right)\cdot\frac{1}{\mu_i}}{\left(1-\sum_{k=1}^{z}\lambda_i(k)/\mu_i\right)^4}$$

$$= \frac{\frac{2}{\mu_i^2}\left(1-\sum_{k=1}^{z}\lambda_i(k)/\mu_i\right)}{\left(1-\sum_{k=1}^{z}\rho_i(k)\right)^4}$$

$$= \frac{\frac{2}{\mu_i^2}}{\left(1-\sum_{k=1}^{z}\rho_i(k)\right)^3} > 0.$$

di mana $0 < \sum_{k=1}^{z}\rho_i(k) < 1$.□

Lampiran 2. Pembuktian Lema 3.3:

Lema 3.3. *Misalkan konsumen memiliki prioritas sama. Jika waktu proses produsen i,* $\forall i \in N$ *tidak menyebar eksponensial dengan rataan waktu proses* $1/\mu_i$ *dan ragam* σ_i^2. *Maka fungsi* $cL_i(\lambda_i)$ *adalah naik dan strictly convex terhadap* λ_i.

Bukti:

Karena konsumen memiliki prioritas sama, yaitu biaya tunda untuk masing-masing tipe konsumen adalah sama, $c(z) = c, \forall z \in M$; dan service requirements untuk masing-masing tipe konsumen adalah sama dan diasumsikan sebagai $v(z) = 1, \forall z \in M$, maka kebijakan yang dapat diterapkan oleh produsen *i*, $\forall i \in N$ adalah FIFO.

Misalkan T_i merupakan peubah acak dari waktu proses produsen *i*, $\forall i \in N$ dan T_i tidak menyebar eksponensial. Karena

$$E(T_i) = 1/\mu_i \quad , \ i = 1,2,\cdots,n \qquad \ldots (1)$$

$$\mathrm{var}(T_i) = \sigma_i^2 , \ i = 1,2,\cdots,n \qquad \ldots (2)$$

dengan kebijakan FIFO dan dari formula *Pollaczec-Khinchine* diperoleh:

$$L_i(\lambda_i) = \lambda_i E(T_i) + \frac{\lambda_i^2 (E^2(T_i) + \mathrm{var}(T_i))}{2(1 - \lambda_i E(T_i))}, \qquad \ldots (3)$$

di mana λ_i merupakan intensitas kedatangan konsumen yang datang pada produsen *i*, $\forall i \in N$.

Dari (1), (2), dan (3):

$$\begin{aligned} L_i(\lambda_i) &= \lambda_i E(T_i) + \frac{\lambda_i^2 (E^2(T_i) + \mathrm{var}(T_i))}{2(1 - \lambda_i E(T_i))} \\ &= \lambda_i \cdot 1/\mu_i + \frac{\lambda_i^2 (1/\mu_i^2 + \sigma_i^2)}{2(1 - \lambda_i \cdot 1/\mu_i)} \\ &= \lambda_i \cdot 1/\mu_i + \frac{\lambda_i^2 \cdot 1/\mu_i^2 \cdot (1 + \mu_i^2 \sigma_i^2)}{2(1 - \lambda_i \cdot 1/\mu_i)} \\ &= \rho_i + \frac{\rho_i^2 \theta_i}{(1 - \rho_i)} \quad , \qquad \ldots (4) \end{aligned}$$

di mana $\rho_i = \dfrac{\lambda_i}{\mu_i}$ dan $0 < \rho_i < 1$ ... (5)

$$\theta_i = \frac{1 + \mu_i^2 \sigma_i^2}{2} . \qquad \ldots (6)$$

Dari persamaan (4):

$$cL_i(\lambda_i) = c\left[\rho_i + \frac{\rho_i^2 \theta_i}{(1 - \rho_i)}\right] \qquad \ldots (7)$$

Karena (5)-(7) berlaku, untuk menunjukkan bahwa fungsi $cL_i(\lambda_i)$ naik dan *strictly convex* terhadap λ_i, cukup dengan menunjukkan bahwa $L_i(\lambda_i)$ naik dan *strictly convex*, yaitu turunan pertama dan kedua fungsi tersebut terhadap λ_i bernilai >0.

$$L_i(\lambda_i) = \lambda_i \cdot 1/\mu_i + \frac{\lambda_i^2(1/\mu_i^2 + \sigma_i^2)}{2(1-\lambda_i \cdot 1/\mu_i)}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_i} + \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} \cdot \frac{\mu_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}$$

$$= \frac{\lambda_i}{\mu_i} \cdot \left[1 + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}\right]$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\mu_i}\left[1 + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}\right] + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i(\mu_i - \lambda_i) - \lambda_i\theta_i \cdot (-1)}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\left[1 + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}\right] + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i\mu_i - \lambda_i\theta_i + \lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\left[1 + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}\right] + \frac{\lambda_i}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i\mu_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\left[1 + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)}\right] + \frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 L_i}{\partial \lambda_i^2} = \frac{1}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i(\mu_i - \lambda_i) - \lambda_i\theta_i \cdot (-1)}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right] + \frac{\theta_i(\mu_i - \lambda_i)^2 - \lambda_i\theta_i(-2(\mu_i - \lambda_i))}{(\mu_i - \lambda_i)^4}$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i\mu_i - \lambda_i\theta_i + \lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right] + \frac{\theta_i(\mu_i - \lambda_i)^2 + 2\lambda_i\theta_i(\mu_i - \lambda_i)}{(\mu_i - \lambda_i)^4}$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\left[\frac{\theta_i\mu_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2}\right] + \frac{\theta_i(\mu_i - \lambda_i)[(\mu_i - \lambda_i) + 2\lambda_i]}{(\mu_i - \lambda_i)^4}$$

$$= \frac{\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} + \frac{\theta_i[(\mu_i - \lambda_i) + 2\lambda_i]}{(\mu_i - \lambda_i)^3} > 0$$

.□

Lampiran 3. Pembuktian Lema 3.4:

Lema 3.4. *Misalkan* $\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)$ *naik dan strictly convex terhadap* $\lambda_i(z)$. $(\vec{P}^*,(\vec{\lambda}_i^*)_{i\in N})$ *merupakan kesetimbangan persaingan dari permasalahan :*

$$\max_{\lambda_i\in\Re_+^m} \sum_{z\in M} P(z)\lambda_i(z)-[\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)]$$

terhadap $\lambda_i(z)\geq 0$

jika dan hanya jika terdapat $\gamma_i^*(z)\geq 0$ *sedemikian sehingga kondisi berikut terpenuhi:*

$$P^*(z)-v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)+\gamma_i^*(z)=0 \qquad \dots (1)$$

$$\gamma_i^*(z)\lambda_i^*(z)=0 \qquad \dots (2)$$

$$\gamma_i^*(z)\geq 0 \qquad \dots (3)$$

$$\lambda_i^*(z)\geq 0 \qquad \dots (4)$$

$$\sum_{i\in N}\lambda_i^*(z)=d(z,P^*(z)) \qquad \dots (5)$$

Bukti:

Permasalahan produsen i dalam memaksimumkan keuntungan pada saat harga atap $\vec{P}$ dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\max_{\lambda_i\in\Re_+^m} \sum_{z\in M} P(z)\lambda_i(z)-[\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)] \qquad \dots (6)$$

terhadap $\lambda_i(z)\geq 0$.

Misalkan fungsi obyektif pada (6) adalah

$$K(\vec{\lambda}_i)=\sum_{z\in M} P(z)\lambda_i(z)-[\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)] \qquad \dots (7)$$

karena $\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)$ adalah fungsi konveks, maka

$$\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}=P(z)-[\sum_{x=1}^{m} c(x)\frac{\partial L_i(x,\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}+\frac{\partial C_i(\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}] \qquad \dots (8)$$

$$\frac{\partial^2 K}{\partial\lambda_i^2(z)}=-[\sum_{x=1}^{m} c(x)\frac{\partial^2 L_i(x,\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i^2(z)}+\frac{\partial^2 C_i(\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i^2(z)}]\leq 0\ . \qquad \dots (9)$$

Jadi fungsi K adalah fungsi konkaf terhadap $\vec{\lambda}_i$.

Pertama, akan ditunjukkan pada saat kesetimbangan kondisi (1)-(5) berlaku.

Pada saat kesetimbangan , berlaku kondisi dimana permintaan akan sama dengan penawaran, yaitu:

$$\sum_{i\in N}\lambda_i^*(z)=d(z,P^*(z))\ . \qquad \dots (10)$$

Pada saat kesetimbangan, intensitas produksi $\vec{\lambda}_i^*$ merupakan solusi optimal dari permasalahan (6)yang berarti fungsi objektif pada pernyataan (6) adalah maksimum pada saat $\vec{\lambda}_i^*$, yaitu :

$$K(\vec{\lambda}_i)\leq K(\vec{\lambda}_i^*)\ . \qquad \dots (11)$$

Dari (11), persamaan (7) akan maksimum pada saat $\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*$. Maka berdasarkan lema 2.3 diperoleh:

$$\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}\leq 0 \qquad \dots (12)$$

$$\lambda_i^*(z)\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}=0\ . \qquad \dots (13)$$

Dari (8), (12) dan (13) diperoleh:

$$P^*(z) - v_i(z,\bar{\lambda}_i^*) \leq 0 \qquad \ldots (14)$$

$$\lambda_i^*(z)[P^*(z) - v_i(z,\bar{\lambda}_i^*)] = 0\,, \qquad \ldots (15)$$

dimana $v_i(z,\bar{\lambda}_i^*) = \sum_{x=1}^{m} c(x)\dfrac{\partial L_i(x,\bar{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i(z)} + \dfrac{\partial C_i(\bar{\lambda}_i)}{\partial \lambda_i(z)}$. ... (16)

Dengan menambahkan peubah *slack* tak-negatif, $\gamma_i^*(z) \geq 0$, $\forall i \in N$ dan $\forall z \in M$ pada pertidaksamaan (14) diperoleh:

$$P^*(z) - v_i(z,\bar{\lambda}_i^*) + \gamma_i^*(z) = 0\,. \qquad \ldots (17)$$

Dari (15) dan (17) diperoleh:

$$\lambda_i^*(z)\gamma_i^*(z) = 0 \qquad \ldots (18)$$

Dengan demikian jika $(\bar{P}^*, (\bar{\lambda}_i^*)_{i\in N})$ merupakan kesetimbangan persaingan dari permasalahan (6) maka kondisi berikut terpenuhi:

$$P^*(z) - v_i(z,\bar{\lambda}_i^*) + \gamma_i^*(z) = 0 \qquad \ldots (19)$$

$$\lambda_i^*(z)\gamma_i^*(z) = 0 \qquad \ldots (20)$$

$$\lambda_i^*(z) \geq 0 \qquad \ldots (21)$$

$$\gamma_i^*(z) \geq 0 \qquad \ldots (22)$$

$$\sum_{i\in N} \lambda_i^*(z) = d(z, P^*(z)) \qquad \ldots (23)$$

Selanjutnya akan dibuktikan untuk arah sebaliknya, yaitu jika (19)-(23) berlaku maka kondisi (11) berlaku. Dari (9) telah ditunjukkan bahwa fungsi obyektif dari permasalahan (6) adalah konkaf[1]. Karena K konkaf yang berarti

$$K((1-t)\bar{\lambda}_i^* + t\bar{\lambda}_i) \geq (1-t)K(\bar{\lambda}_i^*) + tK(\bar{\lambda}_i)\ ,\ 0 \leq t \leq 1 \qquad \ldots (24)$$

maka

$$K(\bar{\lambda}_i^* - t\bar{\lambda}_i^* + t\bar{\lambda}_i) \geq K(\bar{\lambda}_i^*) - tK(\bar{\lambda}_i^*) + tK(\bar{\lambda}_i)$$

$$\Leftrightarrow K(\bar{\lambda}_i^* + t(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i^*)) \geq K(\bar{\lambda}_i^*) + t(K(\bar{\lambda}_i) - K(\bar{\lambda}_i^*))$$

$$\Leftrightarrow K(\bar{\lambda}_i^* + t(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i^*)) - K(\bar{\lambda}_i^*) \geq t(K(\bar{\lambda}_i) - K(\bar{\lambda}_i^*))$$

$$\Leftrightarrow (1/t)[K(\bar{\lambda}_i^* + t(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i^*)) - K(\bar{\lambda}_i^*)] \geq (K(\bar{\lambda}_i) - K(\bar{\lambda}_i^*))$$

$$\Leftrightarrow (-1/t)[K(\bar{\lambda}_i^* + t(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i^*)) - K(\bar{\lambda}_i^*)] \leq (K(\bar{\lambda}_i^*) - K(\bar{\lambda}_i))$$

$$\Leftrightarrow \lim_{t\to 0}(-1/t)[K(\bar{\lambda}_i^* + t(\bar{\lambda}_i - \bar{\lambda}_i^*)) - K(\bar{\lambda}_i^*)] \leq \lim_{t\to 0}(K(\bar{\lambda}_i^*) - K(\bar{\lambda}_i))$$

$$\Leftrightarrow \sum_{z\in M} (\lambda_i^*(z) - \lambda_i(z)) \left[\frac{\partial K}{\partial \lambda_i(z)}\right]_{\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i^*} \leq K(\bar{\lambda}_i^*) - K(\bar{\lambda}_i) \qquad \ldots (25)$$

Karena (19)-(20) berlaku, maka:

---

[1] **Definisi.** Misalkan $X \in K \subseteq \Re^n$ dimana K adalah himpunan konveks. Fungsi f dikatakan konveks jika untuk sebarang X_1 dan X_2 pada K,

$$f(X) \leq (1-t)f(X_1) + tf(X_2)\,,\ 0 \leq t \leq 1$$

untuk setiap $X = (1-t)X_1 + tX_2$

- Suatu fungsi f dikatakan konkaf jika $-f$ konveks

$$\sum_{z\in M}(\lambda_i^*(z)-\lambda_i(z))\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}\le K(\vec{\lambda}_i^*)-K(\vec{\lambda}_i)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{z\in M}(\lambda_i^*(z)\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}-\lambda_i(z)\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*})\le K(\vec{\lambda}_i^*)-K(\vec{\lambda}_i)$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{z\in M}\lambda_i(z)\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}\le K(\vec{\lambda}_i^*)-K(\vec{\lambda}_i) \qquad \text{... (26)}$$

Karena $\lambda_i(z)\ge 0$ dan $\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}\le 0$, maka ruas kiri dari pertidaksamaan (26) bernilai tak-negatif, sehingga:

$$\Leftrightarrow 0\le K(\vec{\lambda}_i^*)-K(\vec{\lambda}_i)$$

$$\Leftrightarrow K(\vec{\lambda}_i)\le K(\vec{\lambda}_i^*) \qquad \text{... (27)}$$

.□

Lampiran 4. Pembuktian Proposisi 3.5:

Proposisi 3.5 *Jika* $\left(\vec{P}^*,(\vec{\lambda}_i^*)_{i\in N}\right)$ *merupakan kesetimbangan persaingan, produksi yang meminimumkan total biaya produksi produsen dan penundaan konsumen dipengaruhi oleh pemenuhan permintaan. Lebih lanjut, harga atap untuk konsumen tipe z sama dengan biaya atap marjinal (marginal full costs) produsen yang melayani konsumen tersebut dan tidak lebih tinggi dari biaya atap marjinal produsen yang tidak melayani konsumen tersebut.*

Bukti:

Permasalahan minimisasi total biaya produksi produsen dan penundaan konsumen yang dipengaruhi oleh pemenuhan permintaan pada saat harga atap $\vec{P}^*$, dapat dinyatakan sebagai:

$$\min_{\vec{\lambda}\in\Re_+^{nm}} \sum_{i\in N}\{\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)\}$$

$$\text{terhadap } \sum_{i\in N}\lambda_i(z)=d(z,P^*(z)). \qquad \ldots(1)$$

Pada saat kesetimbangan persaingan, intensitas produksi $\vec{\lambda}^*$ merupakan solusi optimal dari permasalahan (1), jadi $\vec{\lambda}^*$ memenuhi kondisi Kuhn-Tucker untuk programa konveks (1).

Pertama, akan diturunkan kondisi Kuhn-Tucker untuk permasalahan (1). Fungsi Lagrange untuk permasalahan (1) adalah:

$$K(\vec{\lambda},\vec{\xi})=\sum_{i\in N}\{\sum_{z\in M} c(z)L_i(z,\vec{\lambda}_i)+C_i(\vec{\lambda}_i)\}-\sum_{z\in M}\xi(z)[d(z,P^*(z))-\sum_{i\in N}\lambda_i(z)] \qquad \ldots(2)$$

dengan $\xi(z)\geq 0$ adalah pengali Lagrange. Turunan pertama persamaan (2) terhadap $\lambda_i(z)$ adalah:

$$\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}=\sum_{x=1}^{m}c(x)\frac{\partial L_i(x,\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}+\frac{\partial C_i(\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}-\xi(z). \qquad \ldots(3)$$

Dari lema 2.3 diperoleh:

$$\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}\geq 0,\quad i=1,2,\ldots,n \qquad \ldots(4)$$

$$\lambda_i^*(z)\left[\frac{\partial K}{\partial\lambda_i(z)}\right]_{\vec{\lambda}_i=\vec{\lambda}_i^*}=0\ . \qquad \ldots(5)$$

Dari (3), (4) dan (5) diperoleh:

$$v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)-\xi^*(z)\geq 0 \qquad \ldots(6)$$

$$\lambda_i^*(z)[v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)-\xi^*(z)]=0 \qquad \ldots(7)$$

$$\lambda_i^*(z)\geq 0 \qquad \ldots(8)$$

dengan $v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)=\sum_{x=1}^{m}c(x)\frac{\partial L_i(x,\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}+\frac{\partial C_i(\vec{\lambda}_i)}{\partial\lambda_i(z)}$.

Dengan mengurangi pertidaksamaan (6) dengan peubah *excess* tak-negatif, $\delta_i^*(z)\geq 0$ diperoleh:

$$v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)-\xi^*(z)-\delta_i^*(z)=0. \qquad \ldots(9)$$

Dari (7) dan (9) diperoleh:

$$\lambda_i^*(z)\delta_i^*(z)=0\ . \qquad \ldots(10)$$

Dengan demikian diperoleh kondisi Kuhn-Tucker untuk permasalahan (1), dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$v_i(z,\vec{\lambda}_i^*)-\xi^*(z)-\delta_i^*(z)=0 \qquad \ldots(11)$$

$$\lambda_i^*(z)\delta_i^*(z) = 0 \qquad \text{... (12)}$$

$$\delta_i^*(z) \geq 0 \qquad \text{... (13)}$$

$$\lambda_i^*(z) \geq 0 \qquad \text{... (14)}$$

Selanjutnya akan ditunjukkan harga atap untuk konsumen tipe z sama dengan biaya atap marjinal (*marginal full costs*) produsen yang melayani konsumen tersebut dan tidak lebih tinggi dari biaya atap marjinal produsen yang tidak melayani konsumen tersebut.

Karena $\left(\bar{P}^*, (\bar{\lambda}_i^*)_{i\in N}\right)$ merupakan kesetimbangan persaingan, maka dari lema 3.4 dan (11), dengan memisalkan $\xi^*(z) = P^*(z)$ untuk semua z dan $\delta_i^*(z) = \gamma_i^*(z)$ untuk semua z dan i, maka:

1. Jika produsen i, $i \in N$ melayani konsumen tipe z, $z \in M$ yang berarti $\lambda_i^*(z) > 0$ maka diperoleh:

$$P^*(z) = v_i(z, \bar{\lambda}_i^*) . \qquad \text{... (15)}$$

2. Jika produsen i, $i \in N$ tidak melayani konsumen tipe z, $z \in M$ yang berarti $\lambda_i^*(z) = 0$ maka diperoleh:

$$P^*(z) \leq v_i(z, \bar{\lambda}_i^*) . \qquad \text{... (16)}$$

.□

Lampiran 5. Pembuktian Proposisi 4.1:

Proposisi 4.1. *Di bawah kondisi a-c, terdapat kesetimbangan persaingan yang unik. Pada kesetimbangan , terdapat himpunan dari produsen aktif* N^*, *yakni* $\lambda_i^* > 0$ *jika* $i \in N^*$ *dan* $\lambda_i^* = 0$ *selainnya. Untuk setiap* $i \in N^*$;

$$P^* = d^{-1}\left(\sum_{j \in N} \lambda_j^*\right) = cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*) \quad . \qquad \ldots (1)$$

Bukti:

Misalkan konsumen homogen, waktu proses tidak menyebar eksponensial dan proses kedatangan diasumsikan sebagai proses *Poisson*. Permasalahan maksimisasi keuntungan pada produsen i pada saat harga atap P adalah sebagai berikut:

$$\max_{\lambda_i} P\lambda_i - [cL(\lambda_i) + C(\lambda_i)] \,. \qquad \ldots (2)$$

Misalkan $s(P) = \sum_{i \in N} s_i(P)$ merupakan intensitas produksi agregat pada saat harga atap P. *Pertama*, akan ditunjukkan $s(P)$ merupakan fungsi tak turun terhadap P, yang berarti jika hargaa semakin tinggi maka perusahaan cenderung untuk menawarkan produknya lebih banyak.

Pada saat kesetimbangan, syarat perlu diperolehnya solusi optimal (P^*, λ_i^*) untuk permasalahan (2) adalah turunan pertama pernyataan (2) terhadap λ_i sama dengan nol, yaitu:

$$P^* - [cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*)] = 0 \qquad \ldots (3)$$

$$\Leftrightarrow \; P^* = cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*) \,. \qquad \ldots (4)$$

Dari asumsi diketahui $cL(\lambda_i) + C(\lambda_i)$ naik dan *strictly convex* terhadap λ_i, maka turunan pertama persamaan (4) terhadap λ_i adalah:

$$\frac{dP(\lambda_i^*)}{d\lambda_i^*} = cL''(\lambda_i^*) + C''(\lambda_i^*) > 0 \,, \qquad \ldots (5)$$

yang berarti P merupakan fungsi tak turun terhadap λ_i. Dengan demikian, berdasarkan *hukum penawaran*, jika harga semakin tinggi maka produsen cenderung untuk menawarkan produknya lebih banyak lagi, sehingga $s(P)$ merupakan fungsi tak turun terhadap P.

Kedua, akan ditunjukkan harga atap pada saat kesetimbangan adalah unik. Pada saat kesetimbangan, permintaan akan sama dengan penawaran yaitu:

$$d(\bullet) = s(\bullet) \,. \qquad \ldots (6)$$

Misalkan P_1^* dan P_2^* merupakan dua harga atap yang berbeda dan $P_1^* > P_2^*$. Dari *hukum permintaan*, $d(\bullet)$ merupakan fungsi turun terhadap P, maka

$$s(P_1^*) = d(P_1^*) < s(P_2^*) = d(P_2^*) \,, \qquad \ldots (7)$$

akan tetapi pernyataan (7) kontradiksi dengan kondisi bahwa $s(P)$ merupakan fungsi tak turun terhadap P. Dengan demikian, haruslah $P_1^* = P_2^*$.

Selanjutnya akan ditunjukkan pada saat kesetimbangan kondisi (1) berlaku. Pada saat kesetimbangan berlaku :

$$\sum_{i \in N} \lambda_i^* = d(P^*) \,. \qquad \ldots (8)$$

Sehingga dari proposisi 3.5 dan invers dari (8) terlihat terdapat himpunan produsen yang aktif, N^* dimana $\lambda_i^* > 0$, $i \in N^*$, sehingga:

$$P^* = d^{-1}\left(\sum_{j \in N} \lambda_j^*\right) = cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*) \qquad \ldots (9). \;\square$$

Lampiran 6. Pembuktian Akibat 4.2:

Akibat 4.2. *Jika* $\bar{\alpha}_i \le \bar{\alpha}_j$ *dan* $\bar{\beta}_i \ge \bar{\beta}_j$ *untuk* $i,j \in N^*, i \ne j$, *maka pada kesetimbangan* $\lambda_i^* \ge \lambda_j^*$ *dan* $\pi_i(P^*,\lambda_i^*) \ge \pi_j(P^*,\lambda_j^*)$.

Bukti:

Pada kesetimbangan, dari proposisi 4.1, untuk $i,j \in N^*, i \ne j$ berlaku kondisi berikut:

$$P^* = cL'(\lambda_i^*) + C'(\lambda_i^*) = cL'(\lambda_j^*) + C'(\lambda_j^*) \quad \text{... (1)}$$

Misalkan $\bar{\alpha}_i \le \bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_i \ge \bar{\beta}_j$, dan $\lambda_i^* < \lambda_j^*$. Karena $L'(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i)$ merupakan fungsi naik terhadap λ_i^* dan $\bar{\alpha}_i$, yang berarti :

$$cL'(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) < cL'(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j). \quad \text{...(2)}$$

Karena $C'(\lambda_i^*,\bar{\beta}_i)$ merupakan fungsi turun terhadap $\bar{\beta}_i$ dan naik terhadap λ_i^*, yang berarti:

$$C'(\lambda_i^*,\bar{\beta}_i) < C'(\lambda_j^*,\bar{\beta}_j). \quad \text{...(3)}$$

Dengan menambahkan (3) pada (2) diperoleh:

$$cL'(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) + C'(\lambda_i^*,\bar{\beta}_i) < cL'(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j) + C'(\lambda_j^*,\bar{\beta}_j), \quad \text{...(4)}$$

kontradiksi dengan pernyataan (1), sehingga terbukti $\lambda_i^* \ge \lambda_j^*$.

Didefinisikan keuntungan produsen i, $i \in N^*$ pada saat kesetimbangan sebagai:

$$\pi_i(P^*,\lambda_i^*) = P^*\lambda_i^* - cL(\lambda_i^*) - C(\lambda_i^*). \quad \text{... (5)}$$

Kemudian akan diperlihatkan bahwa keuntungan produsen i akan lebih besar dari produsen j, yaitu:

$$\pi_i(P^*,\lambda_i^*) \ge \pi_j(P^*,\lambda_j^*), \qquad i,j \in N^*, i \ne j. \quad \text{... (6)}$$

Misalkan $\bar{\alpha}_i \le \bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_i \ge \bar{\beta}_j$, $\lambda_i^* > 0$, dan $\lambda \le \lambda_i^*$ maka dari (4) dan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} & cL'(\lambda,\bar{\alpha}_i) + C'(\lambda,\bar{\beta}_i) \le cL'(\lambda_i,\bar{\alpha}_i) + C'(\lambda_i,\bar{\beta}_i) = P^* \\ \Leftrightarrow\ & P^* - cL'(\lambda,\bar{\alpha}_i) - C'(\lambda,\bar{\beta}_i) \ge 0 \end{aligned} \quad \text{...(7)}$$

untuk sebarang $\lambda \ge 0$. Demikian pula halnya jika $\bar{\alpha}_i \le \bar{\alpha}_j$, $\bar{\beta}_i \ge \bar{\beta}_j$ dan $\lambda \ge 0$ berlaku:

$$cL'(\lambda,\bar{\alpha}_i) + C'(\lambda,\bar{\beta}_i) \le cL'(\lambda,\bar{\alpha}_j) + C'(\lambda,\bar{\beta}_j). \quad \text{...(8)}$$

Sehingga dari (5), (7) dan (8), keuntungan produsen i dan j adalah:

$$\begin{aligned} \pi_i(P^*,\lambda_i^*) &= \int_0^{\lambda_i^*} \{P^* - cL'(\lambda,\bar{\alpha}_i) - C'(\lambda,\bar{\beta}_i)\} d\lambda \\ &\ge \int_0^{\lambda_j^*} \{P^* - cL'(\lambda,\bar{\alpha}_i) - C'(\lambda,\bar{\beta}_i)\} d\lambda \\ &\ge \int_0^{\lambda_j^*} \{P^* - cL'(\lambda,\bar{\alpha}_j) - C'(\lambda,\bar{\beta}_j)\} d\lambda \\ &= \pi_j(P^*,\lambda_j^*) \end{aligned}$$

... (9)[2].□

---

[2] **Teorema (Pendiferensialan Suatu Integral Tentu).**

Andaikan f kontinu pada selang tertutup [a,b] dan andaikan x sebuah variabel titik dalam [a,b]. Maka

$$D_x\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x).$$

Lampiran 7. Pembuktian Akibat 4.3:

Akibat 4.3. *Misalkan produsen i dan j,* $i \neq j$, *memiliki distribusi waktu proses dengan rataan dan ragam yang sama, yakni* $\mu_i = \mu_j$ *dan* $\sigma_i = \sigma_j$. *Jika* $\bar{\beta}_i \geq \bar{\beta}_j$, *maka pada saat kesetimbangan produsen i akan memiliki harga yang lebih rendah dan waktu pengiriman yang lebih lama daripada produsen j, yaitu berturut-turut* $p_i^* \leq p_j^*$ *dan* $W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j)$.

Bukti:

Berdasarkan akibat 4.1, jika $\bar{\alpha}_i = \bar{\alpha}_j$ dan $\bar{\beta}_i \geq \bar{\beta}_j$ maka $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$. *Pertama*, akan ditunjukkan $W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j)$. Untuk menunjukkannya, cukup dengan menunjukkan bahwa $W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i)$ merupakan fungsi naik terhadap λ_i^*, yaitu turunan pertama $W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i)$ terhadap λ_i^* bernilai ≥0.

$$W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i^*\theta_i}{\mu_i(\mu_i - \lambda_i^*)}$$

$$\frac{d}{d\lambda_i^*}W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) = \frac{\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i^*)^2} \geq 0, \qquad \ldots(1)$$

yang berarti merupakan fungsi naik pada λ_i^*. Dengan demikian, jika $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$ maka:

$$W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j). \qquad \ldots(2)$$

Kemudian, akan diperlihatkan bahwa harga pada produsen *i* akan lebih kecil daripada harga pada produsen *j*, yaitu $p_i^* \leq p_j^*$. Dari (2) diperoleh:

$$\begin{aligned}
& W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j) \\
\Leftrightarrow\quad & cW(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \geq cW(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j) \\
\Leftrightarrow\quad & -cW(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \leq -cW(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j) \\
\Leftrightarrow\quad & P^* - cW(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i) \leq P^* - cW(\lambda_j^*,\bar{\alpha}_j) \\
\Leftrightarrow\quad & p_i^* \leq p_j^*
\end{aligned}$$

. □

Lampiran 8. Pembuktian Akibat 4.4:

Akibat 4.4. *Misalkan dua produsen i dan j,* $i \neq j$, *memiliki biaya produksi marjinal konstan, yakni* $C_i'(\bullet) = \kappa_i$ *dan* $C_j'(\bullet) = \kappa_j$. *Untuk lebih lanjut, produsen i merupakan faster, lower variability producer dibandingkan dengan produsen j.*

1. *Jika produsen i memiliki biaya produksi marjinal yang lebih rendah, yakni* $\kappa_i \leq \kappa_j$, *maka pada kesetimbangan persaingan, produsen i akan memiliki pangsa pasar, contribution margin yang lebih besar dan tingkat utilitas yang lebih tinggi, yakni:* $\lambda_i^* \geq \lambda_j^*$, $p_i^* - \kappa_i \geq p_j^* - \kappa_j$, *dan* $\rho_i^* \geq \rho_j^*$, *dengan* $\rho_l^* = \lambda_l^* / \mu_l$ *untuk* $l \in N$.
2. *Jika produsen i memiliki biaya produksi marjinal yang lebih besar , yakni* $\kappa_i \geq \kappa_j$, *maka pada kesetimbangan persaingan, produsen i akan memiliki harga yang lebih tinggi serta waktu pengiriman yang lebih cepat, yakni:* $p_i^* \geq p_j^*$ *dan* $W(\lambda_i^*, \vec{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \vec{\alpha}_j)$.

Bukti:

Misalkan $\mu_i \geq \mu_j$, $\mu_i \sigma_i \leq \mu_j \sigma_j$ akan ditunjukkan dengan $W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j, \vec{\alpha}_j)$ maka:

$$\frac{\lambda_i \theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} \geq \frac{\lambda_j \theta_j}{(\mu_j - \lambda_j)^2}. \qquad \text{... (1)}$$

Hal ini terlihat sebagai berikut:

Pertama, akan ditunjukkan $W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i)$ merupakan fungsi naik terhadap λ_i.

$$W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i) = \frac{1}{\mu_i} + \frac{\lambda_i \theta_i}{\mu_i(\mu_i - \lambda_i)} \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{d}{d\lambda_i} W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i) = \frac{\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} \geq 0, \qquad \text{... (3)}$$

yang berarti $W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i)$ merupakan fungsi naik terhadap λ_i. Misalkan dinotasikan $W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i) = W_i$.

Kedua, akan ditunjukkan jika $W(\lambda_i, \vec{\alpha}_i) \geq W(\lambda_j, \vec{\alpha}_j)$ maka:

$$\frac{\lambda_i \theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} \geq \frac{\lambda_j \theta_j}{(\mu_j - \lambda_j)^2}. \qquad \text{... (4)}$$

Dari persamaan (2) diperoleh:

$$\frac{\lambda_i \theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)} = \mu_i W_i - 1 \qquad \text{... (5)}$$

dan

$$\lambda_i = \frac{\mu_i(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i + \mu_i W_i - 1}, \qquad \text{... (6)}$$

dengan $\theta_i \equiv (1 + \mu_i^2 \sigma_i^2)/2$.

Dari (6) diperoleh:

$$\mu_i - \lambda_i = \mu_i - \frac{\mu_i(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i + (\mu_i W_i - 1)}$$

$$= \frac{\mu_i(\theta_i + (\mu_i W_i - 1)) - \mu_i(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i + (\mu_i W_i - 1)}$$

$$= \frac{\mu_i\theta_i + \mu_i(\mu_i W_i - 1) - \mu_i(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i + (\mu_i W_i - 1)}$$

$$= \frac{\mu_i\theta_i}{\theta_i + (\mu_i W_i - 1)}. \qquad \ldots (7)$$

Dari (7) diperoleh:

$$\frac{1}{\mu_i - \lambda_i} = \frac{\theta_i + (\mu_i W_i - 1)}{\mu_i\theta_i}. \qquad \ldots (8)$$

Dari (5) dan (8) diperoleh:

$$\frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i - \lambda_i)^2} = \frac{\mu_i W_i - 1}{(\mu_i - \lambda_i)}$$

$$= \frac{(\mu_i W_i - 1)\ (\theta_i + \mu_i W_i - 1)}{\theta_i\mu_i}$$

$$= \frac{(\theta_i + \mu_i W_i - 1)}{\theta_i}\,\frac{(\mu_i W_i - 1)}{\mu_i}$$

$$= \left(1 + \frac{(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i}\right)\left(W_i - \frac{1}{\mu_i}\right). \qquad \ldots (9)$$

Selanjutnya dengan $\mu_i \geq \mu_j$, $\mu_i\sigma_i \leq \mu_j\sigma_j$ atau $\theta_i \leq \theta_j$, dan $W_i \geq W_j$ akan ditunjukkan

$$\left(1 + \frac{(\mu_i W_i - 1)}{\theta_i}\right)\left(W_i - \frac{1}{\mu_i}\right) \geq \left(1 + \frac{(\mu_j W_j - 1)}{\theta_j}\right)\left(W_j - \frac{1}{\mu_j}\right). \qquad \ldots (10)$$

Hal ini dapat terlihat sebagai berikut:

$$W_i \geq W_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \mu_i W_i \geq \mu_j W_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\mu_i W_i - 1}{\theta_i} \geq \frac{\mu_j W_j - 1}{\theta_j}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{\mu_i W_i - 1}{\theta_i} \geq 1 + \frac{\mu_j W_j - 1}{\theta_j}, \qquad \ldots (11)$$

dan

$$\mu_i \geq \mu_j$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\mu_i} \leq \frac{1}{\mu_j}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{\mu_i} \geq -\frac{1}{\mu_j}$$

$$\Leftrightarrow \quad W_i - \frac{1}{\mu_i} \geq W_j - \frac{1}{\mu_j}. \qquad \ldots (12)$$

Dengan demikian dari (11) dan (12) diperoleh:

$$\left(1+\frac{(\mu_i W_i-1)}{\theta_i}\right)\left(W_i-\frac{1}{\mu_i}\right)\geq\left(1+\frac{(\mu_j W_j-1)}{\theta_j}\right)\left(W_j-\frac{1}{\mu_j}\right), \qquad \text{... (13)}$$

terbukti bahwa $\frac{\lambda_i\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i)^2}\geq\frac{\lambda_j\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j)^2}$.

Misalkan $i.j\in N^*$, $i\neq j$, $\lambda_i^*>0$ dan $\lambda_j^*>0$ pada saat $C'(\lambda_l^*,\vec{\beta}_l)=\kappa_l$, untuk $l=i,j$. Pada saat kesetimbangan berlaku:

$$P^*=cL'(\lambda_l^*,\vec{\alpha}_l)+C'(\lambda_l^*,\vec{\beta}_l) \qquad \text{... (14)}$$

dengan

$$L'(\lambda_l^*,\vec{\alpha}_l)=W_l(\lambda_l^*,\vec{\alpha}_l)+\frac{\lambda_l^*\theta_l}{(\mu_l-\lambda_l^*)^2}. \qquad \text{... (15)}$$

Dari (14) dan (15) diperoleh:

$$\begin{aligned}P^*&=c\left[W(\lambda_i^*,\vec{\alpha}_i)+\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}\right]+\kappa_i\\&=c\left[W(\lambda_j^*,\vec{\alpha}_j)+\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}\right]+\kappa_j\end{aligned} \qquad \text{... (16)}$$

$$\Leftrightarrow c\left[W(\lambda_i^*,\vec{\alpha}_i)-W(\lambda_j^*,\vec{\alpha}_j)+\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}-\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}\right]+\kappa_i-\kappa_j=0. \qquad \text{... (17)}$$

Misalkan produsen i merupakan *faster, lower variability producer* dibandingkan dengan produsen j.

1) Kasus $\kappa_i\leq\kappa_j$, akan ditunjukkan $\lambda_i^*\geq\lambda_j^*$, $p_i^*-\kappa_i\geq p_j^*-\kappa_j$, dan $\rho_i^*\geq\rho_j^*$.

Pertama, akan ditunjukkan $\lambda_i^*\geq\lambda_j^*$. Berdasarkan akibat 4.2 terbukti bahwa $\lambda_i^*\geq\lambda_j^*$.

Kedua, akan ditunjukkan $p_i^*-\kappa_i\geq p_j^*-\kappa_j$. Misalkan kondisi (16) berlaku, kemudian dengan $cW(\lambda_l^*,\vec{\alpha}_l)=P^*-p_l^*$, $l=i,j$ maka:

$$P^*-p_i^*+c\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}+\kappa_i=P^*-p_j^*+c\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}+\kappa$$

$$\Leftrightarrow\left(p_i^*-\kappa_i\right)-\left(p_j^*-\kappa_j\right)=c\left(\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}-\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}\right). \qquad \text{... (18)}$$

Misalkan

$$\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}-\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}<0, \qquad \text{... (19)}$$

maka (19) berakibat $W(\lambda_i^*,\vec{\alpha}_i)-W(\lambda_j^*,\vec{\alpha}_j)<0$, dan sisi kiri pada kondisi (17) bernilai negatif, kontradiksi. Sehingga (18) haruslah tak negatif, yang berakibat $p_i^*-\kappa_i\geq p_j^*-\kappa_j$.

Ketiga, akan ditunjukkan $\rho_i^* \geq \rho_j^*$. Persamaan (17) dapat dinyatakan sebagai:

$$c\left[W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i)-W(\lambda_i^*,\bar{\alpha}_i)+\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}-\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}\right]+\kappa_i-\kappa_j=0$$

$$\Leftrightarrow c\left[\left(\frac{1}{\mu_i}+\frac{\lambda_i\theta_i}{\mu_i(\mu_i-\lambda_i)}\right)-\left(\frac{1}{\mu_j}+\frac{\lambda_j\theta_j}{\mu_j(\mu_j-\lambda_j)}\right)+\left(\frac{\lambda_i^*\theta_i}{(\mu_i-\lambda_i^*)^2}\right)-\left(\frac{\lambda_j^*\theta_j}{(\mu_j-\lambda_j^*)^2}\right)\right]+\kappa_i-\kappa_j=0$$

$$\Leftrightarrow c\left[\left(\frac{1}{\mu_i}+\frac{\rho_i^*\mu_i\theta_i}{\mu_i(\mu_i-\rho_i^*\mu_i)}\right)-\left(\frac{1}{\mu_j}+\frac{\rho_j^*\mu_j\theta_j}{\mu_j(\mu_j-\rho_j^*\mu_j)}\right)+\left(\frac{\rho_i^*\mu_i\theta_i}{(\mu_i-\rho_i^*\mu_i)^2}\right)-\left(\frac{\rho_j^*\mu_j\theta_j}{(\mu_j-\rho_j^*\mu_j)^2}\right)\right]+\kappa_i-\kappa_j=0$$

$$\Leftrightarrow c\left[\left(\frac{1}{\mu_i}+\frac{\rho_i^*\theta_i}{\mu_i(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*\theta_i}{\mu_i(1-\rho_i^*)^2}\right)-\left(\frac{1}{\mu_j}+\frac{\rho_j^*\theta_j}{\mu_j(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*\theta_j}{\mu_j(1-\rho_j^*)^2}\right)\right]=\kappa_j-\kappa_i$$

$$\Leftrightarrow c\left[\frac{1}{\mu_i}\left(1+\left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\theta_i\right)-\frac{1}{\mu_j}\left(1+\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\theta_j\right)\right]=\kappa_j-\kappa_i\geq 0. \quad \text{... (20)}$$

Pertidaksamaan (20), dan $\mu_i \geq \mu_j$, $\mu_i\sigma_i \leq \mu_j\sigma_j$ atau $\theta_i \leq \theta_j$ bersama-sama menyebabkan $\rho_i^* \geq \rho_j^*$. Hal tersebut dapat terlihat sebagai berikut:

$$c\left[\frac{1}{\mu_i}\left(1+\left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\theta_i\right)\right]\geq c\left[\frac{1}{\mu_j}\left(1+\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\theta_j\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\theta_i\right)\geq\frac{\mu_i}{\mu_j}\left(1+\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\theta_j\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\theta_i\right)\geq\left(1+\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\theta_j\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\theta_i\geq\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\theta_j$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)}+\frac{\rho_i^*}{(1-\rho_i^*)^2}\right)\geq\left(\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)}+\frac{\rho_j^*}{(1-\rho_j^*)^2}\right)\frac{\theta_j}{\theta_i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho_i^*(2-\rho_i^*)}{(1-\rho_i^*)^2}\geq\frac{\rho_j^*(2-\rho_j^*)}{(1-\rho_j^*)^2}; \qquad 0<\rho_k^*<1; \quad k=i,j$$

$$\Leftrightarrow \rho_i^* \geq \rho_j^*. \quad \text{... (21)}$$

2) Kasus $\kappa_i \geq \kappa_j$, akan ditunjukkan $p_i^* \geq p_j^*$ dan $W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j)$.

Pertama, akan ditunjukkan $W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j)$. Misalkan $W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) > W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j)$ dan $\kappa_i \geq \kappa_j$. Maka dari (1) berakibat:

$$\frac{\lambda_i^* \theta_i}{(\mu_i - \lambda_i^*)^2} - \frac{\lambda_j^* \theta_j}{(\mu_j - \lambda_j^*)^2} \geq 0, \qquad \text{... (22)}$$

yang berarti sisi kiri dari persamaan (17) bernilai positif, kontradiksi. Oleh karena itu, haruslah $W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j)$.

Kedua, akan ditunjukkan dengan $W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j)$ berakibat $p_i^* \geq p_j^*$. Hal ini terlihat sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & W(\lambda_i^*, \bar{\alpha}_i) \leq W(\lambda_j^*, \bar{\alpha}_j) \\ \Leftrightarrow & \frac{P^* - p_i^*}{c} \leq \frac{P^* - p_j^*}{c} \\ \Leftrightarrow & P^* - p_i^* \leq P^* - p_j^* \\ \Leftrightarrow & p_i^* \geq p_j^* \end{aligned}$$

. □