

**ORBIT ELEKTRON DAN PROBABILITAS LEVEL ENERGI
SISTEM *CHAOTIC* ATOM HIDROGEN**

SAEPUL QODAR



**DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004**

G/PLS
2004
035



RINGKASAN

SAEPUL QODAR. Orbit Elektron dan Probabilitas Level Energi Sistem *Chaotic* Atom Hidrogen. Dibimbing oleh AGUS KARTONO dan M. NUR INDRO.

Penelitian sistem *chaotic* pada tingkat atom dilakukan untuk pengembangan teori *chaos* dalam sistem kuantum, dimana sistem tersebut memperlihatkan perilaku *chaotic* dalam pengertian klasik. Keadaan *chaotic* ini biasanya dicapai dalam daerah semiklasik yang ditandai dengan bilangan kuantum n yang besar, sehingga sistem kuantum akan mendekati sistem klasik (prinsip korespondensi Bohr). Seperti halnya pada keadaan *Rydberg* (dalam keadaan sangat tereksitasi $n > 20$) atom hidrogen dalam medan magnet. Ketika medan magnet diterapkan pada atom hidrogen tersebut, maka elektron akan berada dibawah pengaruh antara potensial Coulomb (antara elektron dengan inti atom) dan medan magnet, sehingga pada keadaan tertentu elektron dapat berada dalam keadaan reguler atau *chaotic*. Untuk melihat pengaruh potensial Coulomb dan medan magnet terhadap elektron, digunakan parameter *scaled energy* (hubungan antara nilai eigen atom hidrogen dan parameter medan magnet yang diterapkan). Dengan menggunakan *scaled energy* tertentu dan persamaan diferensial Hamiltonian dalam koordinat semiparabolik, didapatkan solusi orbit elektron dalam koordinat semiparabolik. Dengan menggunakan sifat invarian operasi simetri rotasi Hamiltonian atom hidrogen dalam medan magnet, didapatkan fungsi distribusi Wigner. Fungsi distribusi Wigner ini digunakan untuk memperkirakan probabilitas level energi yang berdekatan sistem *chaotic* atom hidrogen.

Hal. 60 dari 100 halaman | Tanggal: 10/05/2023
1. Untuk lebih jelasnya, silakan kunjungi website kami di www.ipb.ac.id
2. Untuk informasi lebih lanjut, silakan hubungi kami di info@ipb.ac.id
3. Untuk informasi lebih lanjut, silakan hubungi kami di www.ipb.ac.id

**ORBIT ELEKTRON DAN PROBABILITAS LEVEL ENERGI
SISTEM *CHAOTIC* ATOM HIDROGEN**

SAEPUL QODAR

Skripsi
Sebagai salah satu syarat untuk memperoleh gelar
Sarjana Sains
pada
Program Studi Fisika

**DEPARTEMEN FISIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
INSTITUT PERTANIAN BOGOR
BOGOR
2004**



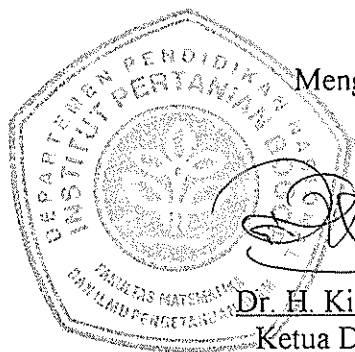
Judul skripsi : Orbit Elektron dan Probabilitas Level Energi Sistem *Chaotic* Atom
 Hidrogen
 Nama : Saepul Qodar
 NRP : G07400018
 Program Studi : Fisika

Menyetujui,

Agus Kartono, M.Si
Pembimbing I

Drs. M. Nur Indro, M.Sc
Pembimbing II

Mengetahui,



Dr. H. Kiagus Dahlan
Ketua Departemen

Tanggal Lulus Ujian Skripsi :

Hal Cipta (Hak Cipta) Universitas
 1. Dilindungi sebagai hak cipta oleh pembuatnya dan tidak dapat ditransferkan atau dipinjamkan kepada orang lain.
 2. Penggunaan tanpa izin pembuatnya adalah pelanggaran hak cipta yang dapat dikenakan sanksi hukum.
 3. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 4. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 5. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 6. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 7. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 8. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 9. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.
 10. Penggunaan tanpa izin pembuatnya yang melanggar hak cipta akan dikenakan sanksi hukum.



RIWAYAT HIDUP

Penulis dilahirkan di Garut pada tanggal 2 Februari 1982 sebagai anak tunggal, anak dari pasangan Odin (Almarhum) dan Uyu.

Penulis menamatkan pendidikan dasar dan pendidikan menengah pertama di Kecamatan Bungbulang, Garut. Pada tahun 2000 Penulis menyelesaikan pendidikan Sekolah Menengah Umum di SMUN 16 Bandung, dan pada tahun yang sama melanjutkan pendidikan ke Institut Pertanian Bogor melalui jalur Undangan Seleksi Masuk IPB (USMI). Di IPB penulis diterima di Departemen Fisika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.

Selama mengikuti perkuliahan, penulis pernah menjadi asisten praktikum Fisika Dasar pada tahun 2002/2003, asisten dosen untuk Responsi Fisika Dasar I, Fisika Dasar II, Fisika Umum, korektor Tugas Fisika Modern dan korektor Tugas Fisika Kuantum pada tahun 2003/2004. Penulis juga pernah menjadi Tim Soal Kompetisi Fisika tingkat SMU untuk teori dan eksperimen pada tahun 2002/2003 dan 2003/2004. Selain itu penulis juga aktif dalam organisasi Himpunan Profesi Departemen Fisika, pada tahun 2001/2002 dan tahun 2002/2003 menjadi Anggota Komisi II BPM (Badan Perwakilan Mahasiswa) Himpunan Mahasiswa Fisika IPB.

Halaman ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University. Untuk informasi lebih lanjut, silakan kunjungi situs web IPB University di www.ipb.ac.id.
1. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
2. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
3. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
4. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
5. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
6. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
7. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
8. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
9. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.
10. Dokumen ini adalah bagian dari dokumen yang dibuat oleh sistem otomatisasi IPB University.

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanya untuk Allah SWT semata, karena berkat rahmat dan petunjuk-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Shalawat dan salam semoga senantiasa tercurah kepada Nabi Muhammad SAW beserta keluarga, sahabat dan segenap umat-Nya sampai akhir zaman. Penelitian ini mengambil topik *chaos* kuantum dalam atom yang merupakan perkembangan dari *chaos* klasik dalam dunia ilmu pengetahuan dan mulai dilirik fisikawan sekitar tahun 70-an. Pemahaman teori *chaos* secara mendalam merupakan salah satu kunci untuk lebih memahami fenomena-fenomena alam dalam sistem yang riil dimana sistem tersebut penuh dengan kompleksitas. Dari studi literatur, yang penulis pelajari maka penulis mengambil topik “Orbit Elektron dan Probabilitas Level Energi Sistem *Chaotic* Atom Hidrogen”.

Penyusunan skripsi ini dapat diselesaikan atas bantuan dan bimbingan yang sangat berharga dari berbagai pihak. Oleh karena itu penulis menyampaikan ucapan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Bapak Agus Kartono selaku Pembimbing I penelitian ini.
2. Bapak M. Nur. Indro selaku Pembimbing II penelitian ini.
3. Segenap dosen Departemen Fisika IPB yang telah membuka pemikiran penulis mengenai ilmu fisika.
4. Seluruh keluarga atas dorongan, bantuan, dan cintanya yang tulus.
5. Rekan-rekan mahasiswa Fisika khususnya angkatan 37 atas segala bantuan dan segenap perhatiannya.
6. Semua pihak yang turut berperan dalam penyusunan skripsi ini.

Penulis menyadari bahwa penyusunan skripsi ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu penulis mengharapkan masukan baik kritik, saran maupun koreksi yang membangun. Semoga skripsi dan penelitian ini bermanfaat bagi kita semua.

Bogor, September 2004

Saepul Qodar

DAFTAR ISI

| | Halaman |
|---|---------|
| KATA PENGANTAR | i |
| DAFTAR ISI | ii |
| DAFTAR GAMBAR | iii |
| DAFTAR LAMPIRAN | iv |
| PENDAHULUAN | |
| Latar Belakang | 1 |
| Tujuan Penelitian..... | 1 |
| TINJAUAN PUSTAKA | |
| A. Gambaran Umum | 1 |
| B. Perumusan | |
| 1. Hamiltonian Interaksi | 2 |
| 2. Teori Gangguan untuk Atom Hidrogen dalam Medan Magnet..... | 3 |
| 3. Orbit Elektron..... | 5 |
| 4. Probabilitas Dua Level Energi yang Berdekatan..... | 5 |
| METODE PENELITIAN | 6 |
| HASIL DAN PEMBAHASAN | |
| A. Orbit Elektron..... | 7 |
| B. Probabilitas Dua Level Energi yang Berdekatan | 12 |
| KESIMPULAN DAN SARAN | 12 |
| DAFTAR PUSTAKA | 12 |
| LAMPIRAN | 14 |

DAFTAR GAMBAR

Halaman

| | | |
|------------|---|----|
| Gambar 1a. | Skema berkas atom, arah medan magnet dan laser. Arah medan magnet dalam Arah sumbu z paralel terhadap berkas atom H | 2 |
| Gambar 1b. | sumbu koordinat x, y, z | 2 |
| Gambar 2. | Diagram penyelesaian persamaan dengan menggunakan <i>mathematica 4.0</i> | 6 |
| Gambar 3. | Grafik antara energi E , bilangan kuantum n dan kuat medan magnet g | 6 |
| Gambar 4. | Grafik antara <i>scaled energy</i> \tilde{E} , bilangan kuantum n dan g | 7 |
| Gambar 5a. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 3 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5b. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 5 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5c. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 10 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5d. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 15 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5e. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 20 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5f. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 25 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 5g. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 30 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 7 |
| Gambar 6a. | Ruang fase untuk gambar 5a | 8 |
| Gambar 6b. | Ruang fase untuk gambar 5b | 8 |
| Gambar 6c. | Ruang fase untuk gambar 5c | 8 |
| Gambar 6d. | Ruang fase untuk gambar 5d | 8 |
| Gambar 6e. | Ruang fase untuk gambar 5e | 8 |
| Gambar 6f. | Ruang fase untuk gambar 5f | 8 |
| Gambar 6g. | Ruang fase untuk gambar 5g | 8 |
| Gambar 7a. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 3 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7b. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 5 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7c. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 10 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7d. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 15 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7e. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 20 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7f. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 25 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 7g. | Keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 30 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 9 |
| Gambar 8a. | Ruang fase untuk gambar 7a | 9 |
| Gambar 8b. | Ruang fase untuk gambar 7b | 9 |
| Gambar 8c. | Ruang fase untuk gambar 7c | 9 |
| Gambar 8d. | Ruang fase untuk gambar 7d | 10 |
| Gambar 8e. | Ruang fase untuk gambar 7e | 10 |
| Gambar 8f. | Ruang fase untuk gambar 7f | 10 |
| Gambar 8g. | Ruang fase untuk gambar 7g | 10 |
| Gambar 9a. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 3 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 10 |
| Gambar 9b. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 5 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 10 |
| Gambar 9c. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 10 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 10 |
| Gambar 9d. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 15 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 10 |
| Gambar 9e. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 20 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 10 |

Hal Cipta (Copyright) Undang-undang
 1. Dilindungi sebagai hak cipta dan tidak boleh diperjualbelikan atau dipinjamkan kepada pihak lain
 2. Pengutipan harus mencantumkan sumber dan nama penulis, penerbit, dan tahun terbit
 3. Pengutipan tidak boleh merugikan kepentingan yang wajar IPB University
 4. Dilarang memperjualbelikan dan memperbanyak cetakan atau salinan karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB University

| | | |
|-------------|---|----|
| Gambar 9f. | Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 25 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 11 |
| Gambar 9g. | keadaan <i>chaotic</i> dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 30 n\sqrt{n} 10^{-9}$ s | 11 |
| Gambar 10a. | Ruang fase untuk gambar 9a | 11 |
| Gambar 10b. | Ruang fase untuk gambar 9b | 11 |
| Gambar 10c. | Ruang fase untuk gambar 9c | 11 |
| Gambar 10d. | Ruang fase untuk gambar 9d | 11 |
| Gambar 10e. | Ruang fase untuk gambar 9e | 11 |
| Gambar 10f. | Ruang fase untuk gambar 9f | 11 |
| Gambar 10g. | Ruang fase untuk gambar 9g | 11 |
| Gambar 11. | Probabilitas dua level energi yang berdekatan | 12 |

DAFTAR LAMPIRAN

| | | |
|-------------|--|----|
| Lampiran 1. | Transformasi Momentum | 15 |
| Lampiran 2. | Penurunan Persamaan Operator | 16 |
| Lampiran 3. | Penurunan Nilai Eigen Osilator Harmonik | 17 |
| Lampiran 4. | Ekspansi Gangguan Potensial Efektif dan Nilai Eigen | 19 |
| Lampiran 5. | Penurunan Hamiltonian terhadap Waktu | 20 |
| Lampiran 6. | Operasi Simetri Rotasi terhadap Sumbu z | 22 |
| Lampiran 7. | Penyelesaian Persamaan dengan menggunakan <i>Mathematica 4.0</i> | 23 |
| Lampiran 8. | Plot Nilai Eigen dan <i>Scaled Energy</i> | 34 |
| Lampiran 9. | Plot Probabilitas Level Energi | 35 |

PENDAHULUAN

Latar Belakang

Sejak penelitian pada dinamika nonlinear klasik dan aplikasinya dalam kehidupan sehari-hari berkembang dengan baik, banyak manfaat yang dapat diambil dalam penelitian tersebut. Sebagai contoh *chaos* dalam cuaca diselidiki oleh Edward Lorenz (penemu teori chaos pertama kali pada tahun 1963) yang menyederhanakan sistem cuaca yang kompleks ke bentuk persamaan yang sederhana dan masih berkelakuan *chaotic*. Dalam dinamika nonlinear klasik, teori telah didukung oleh banyak eksperimen, sedangkan teori *chaos* kuantum masih merupakan topik yang menarik untuk dikembangkan [Stockmann (1999)].

Jika atom sangat tereksitasi bisa dibuat untuk memperlihatkan perilaku *chaotic* dalam pengertian klasik, maka peristiwa tersebut dapat digunakan sebagai petunjuk sifat alami *chaos* kuantum, sehingga dapat menerangkan persamaan di dalam sistem *chaotic* klasik dan sistem *chaotic* kuantum. Keadaan mekanika kuantum atom hidrogen tanpa adanya medan eksternal (yang berpengaruh hanyalah potensial *Coulomb*) mempunyai kemiripan yang sama dengan model Bohr. Model Bohr dapat meramalkan keadaan elektron yang berpeluang terbesar dalam menempati salah satu keadaan yang mungkin terjadi dalam setiap energi [Beiser A. (1987)]. Ketika medan magnet diterapkan pada atom hidrogen tersebut, maka elektron akan dipengaruhi oleh medan magnet, sehingga pada keadaan tertentu elektron dapat berada dalam keadaan regular atau *chaotic*.

Atom hidrogen dalam medan magnet kuat merupakan salah satu model *chaos* kuantum. Pada level-level energi tertentu, besarnya medan magnet yang diberikan dapat mempengaruhi gerakan elektron untuk menjadi *chaotic*. Dalam keadaan nyata, teori ini banyak ditemukan dalam ilmu astrofisika, terutama dalam mengamati objek bintang eksotis (*exotic stellar objects*). Sebagai contoh medan magnet dalam *white dwarfs* besarnya 10^2 sampai 10^5 T, sedangkan dalam bintang neutron besarnya 10^7 sampai 10^9 T. Pada kondisi ini atom-atom hidrogen adalah *chaotic* pada keadaan dasar (*ground state*) [Stockmann (1999)]. Jadi untuk mendapatkan keadaan

chaotic pada keadaan dasar, diperlukan medan magnet yang besar karena interaksi antara elektron dengan inti lebih kuat dibandingkan interaksi antara elektron dengan medan magnet.

Dinamika klasik orbit elektron yang merupakan aplikasi dari teori orbit periodik dan probabilitas dua level energi terdekat telah dikembangkan untuk menggambarkan dinamika atom hidrogen yang tereksitasi dalam medan eksternal statis [Matzkin A, P. A. Dando, T. S. Monteiro (2002)]. Teori *Random matrices* telah dikembangkan oleh Wigner, Dyson, Mehta dan yang lainnya untuk mendapatkan distribusi level energi terdekat [Stockmann (1999)]. Berdasarkan sifat simetri dari Hamiltonian sistem, maka Hamiltonian dapat direpresentasikan kedalam bentuk matriks yang pada akhirnya didapatkan suatu fungsi distribusi level energi yang berdekatan.

Oleh karena itu untuk memahami fenomena sistem *chaotic* perlu dipelajari orbit elektron dan probabilitas dua level energi terdekat atom hidrogen dalam medan magnet. Pada penelitian ini digunakan Hamiltonian dalam koordinat silinder (tanpa memperhitungkan interaksi Zeeman dengan spin elektron) dan semiparabolik untuk memprediksikan gerakan elektron atom hidrogen, serta fungsi distribusi Wigner untuk memprediksikan probabilitas dua level energi yang berdekatan dari sistem *chaotic* atom hidrogen.

Tujuan Penelitian

- Mendapatkan orbit elektron sistem *chaotic* atom hidrogen (dalam koordinat semiparabolik).
- Mendapatkan probabilitas dua level energi yang berdekatan dari sistem *chaotic* atom hidrogen.

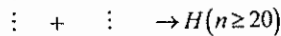
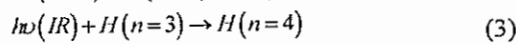
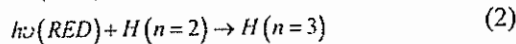
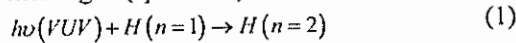
TINJAUAN PUSTAKA

A. Gambaran Umum

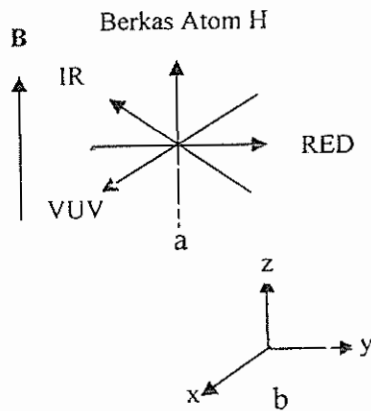
Dalam eksperimen [Wiebusch G, R. Ubert, B. Sheehy, E. Flothmann, K. H. Weige (1992)], medan magnet yang diterapkan pada atom (dalam keadaan dasar) pengaruhnya kecil jika dibandingkan dengan interaksi antara elektron dengan inti. Supaya perbandingan antara interaksi *Coulomb* (elektron dengan inti)

dan interaksi antara elektron dengan medan magnet tidak terlalu besar maka atom perlu dieksitasikan. Dengan eksitasi, jarak elektron dari inti bertambah sehingga interaksi antara elektron dengan inti berkurang. Supaya interaksi antara elektron dengan inti kecil maka elektron harus dieksitasikan ke bilangan kuantum n yang besar.

Atom dalam keadaan sangat tereksitasi ($n > 20$) dinamakan atom *Rydberg*, dengan n adalah bilangan kuantum utama. Eksitasi atom hidrogen ke keadaan *Rydberg* dilakukan dengan sinar laser dalam tiga langkah dari keadaan dasar $1s$ melalui dua keadaan menengah ($2p$ dan $3s$):



Eksitasi ke keadaan *Rydberg* dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 1. a. Skema berkas atom, arah medan magnet dan laser. Arah medan magnet dalam arah sumbu z paralel terhadap berkas atom H. b. Sumbu koordinat x, y, z .

Sinar VUV (*Visible Ultra Violet*) dengan panjang gelombang 121.5 nm digunakan untuk langkah eksitasi pertama dari $n = 1$ ke $n = 2$. Eksitasi selanjutnya untuk mencapai keadaan menengah digunakan cahaya merah dengan panjang gelombang 656 nm dari $n = 2$ ke $n = 3$ dan untuk langkah yang terakhir digunakan IR (*Impura Red*) dengan panjang gelombang tertentu ($\lambda > 839 \text{ nm}$) sampai keadaan $n > 20$. Panjang gelombang foton yang diperlukan, sesuai dengan persamaan

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n_A^2} - \frac{1}{n_B^2} \right) \quad (4)$$

dengan R adalah konstanta *Rydberg* yang besarnya $R = 1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$, n_A = keadaan awal dan n_B = keadaan akhir.

Berkas atom diarahkan tegak lurus dengan berkas laser, yang memiliki pertemuan titik potong volume interaksi 1 mm^3 , sedangkan arah medan magnet yang diterapkan paralel terhadap berkas atom yaitu dalam arah sumbu z positif.

Pada level energi yang rendah, elektron tetap mengelilingi inti, sekitar daerah dekat inti ($r < r_0$ dengan $r_0 \sim 50$ radius Bohr) dimana medan eksternal dapat diabaikan, di sini tidak ada *chaos*. Pada tingkat-tingkat yang tinggi (bilangan kuantum $n > 20$), interaksi antara elektron dengan inti lebih kecil dibandingkan dengan medan magnet yang diterapkan sehingga medan magnet berpengaruh besar dan elektron tersebut bergerak di sekitar garis-garis medan magnet, di sini tidak ada *chaos*. Diantara dua keadaan ini, dimana gerakan elektron dipengaruhi oleh kombinasi antara interaksi *Coulomb* dengan medan magnet, ditandai oleh hubungan *scaled energy* tertentu, maka elektron tersebut bisa berada pada keadaan *chaotic*. Keadaan *chaotic* biasanya dicapai dalam daerah semiklasik yang ditandai dengan bilangan kuantum n yang besar, sehingga sistem kuantum akan mendekati sistem klasik (prinsip korespondensi Bohr) yang akan memberi petunjuk sifat alami dari sistem *chaos* kuantum. Untuk analisa selanjutnya dilakukan secara kualitatif dengan menentukan *scaled energy*.

B. Perumusan

1. Hamiltonian Interaksi

Menurut perumusan klasik, Hamiltonian untuk atom Hidrogen bebas (tanpa medan luar) diberikan oleh persamaan

$$H = \frac{1}{2\mu} p^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (5)$$

dengan μ = massa elektron tereduksi, p = momentum, e = muatan elektron, r = jari-jari atom hidrogen dan Z = jumlah proton. Untuk atom hidrogen $Z = 1$.

Interaksi elektromagnetik antara elektron yang bermuatan $-e$ dan medan magnet diungkapkan oleh modifikasi Hamiltonian semula menurut

$$\vec{P} \rightarrow \vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A}. \quad (6)$$

[Becker R (1964), Tjia M. O (1999)] (lihat lampiran 1). Dengan ini, Hamiltonian dalam persamaan (5) menjadi

$$H = \frac{1}{2\mu} \left(\vec{P} + \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2 - \frac{Ze^2}{r}, \quad (7)$$

ungkapan operator kuantum bagi Hamiltonian yang bersangkutan diperoleh dengan substitusi

$$\vec{P} \rightarrow -i\hbar \vec{\nabla} \text{ sebagaimana biasanya, sehingga}$$

$$H = \frac{1}{2\mu} \left\{ -\hbar^2 \nabla^2 - \left(\frac{i\hbar e}{c} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) - \left(\frac{i\hbar e}{c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \right) + \frac{e^2}{c^2} A^2 \right\} - \frac{Ze^2}{r} \quad (8)$$

dengan menggunakan persamaan operator

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \quad (9)$$

(lihat lampiran 2)

dan syarat Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ maka Hamiltoniannya

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{i\hbar e}{\mu c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} + \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 - \frac{Ze^2}{r} \quad (10)$$

untuk medan magnet konstan B potensial vektornya adalah

$$\begin{aligned} \vec{A} &= -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B} \\ &= -\frac{1}{2} (yB_z - zB_y, zB_x - xB_z, \\ &\quad xB_y - yB_x) \end{aligned} \quad (11)$$

sedangkan medan magnetnya adalah

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \left(\frac{1}{2} B_x + \frac{1}{2} B_x, \frac{1}{2} B_y + \frac{1}{2} B_y, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} B_z + \frac{1}{2} B_z \right) = \vec{B} \end{aligned} \quad (12)$$

suku kedua dalam persamaan (10) menjadi

$$\begin{aligned} \frac{i\hbar e}{\mu c} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} &= \frac{-i\hbar e}{2\mu c} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nabla} = \frac{i\hbar e}{2\mu c} \vec{B} \cdot (\vec{r} \times \vec{\nabla}) \\ &= \frac{-e}{2\mu c} \vec{B} \cdot \left(\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right) = \frac{-e}{2\mu c} \vec{B} \cdot \vec{L} \end{aligned} \quad (13)$$

dan \vec{L} didefinisikan sebagai $\vec{L} = \vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

dengan \vec{B} dalam arah sumbu z maka

$$\frac{-e}{2\mu c} \vec{B} \cdot \vec{L} = \frac{-eB}{2\mu c} L_z \quad (14)$$

dan suku ketiga dalam persamaan (10) adalah

$$\begin{aligned} \frac{e^2}{2\mu c^2} A^2 &= \frac{e^2}{8\mu c^2} (\vec{r} \times \vec{B})^2 \\ &= \frac{e^2}{8\mu c^2} \left[r^2 B^2 - (\vec{r} \cdot \vec{B})^2 \right] \\ &= \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (15)$$

dengan memasukan persamaan (15) dan (14) kepersamaan (10) maka Hamiltoniannya menjadi

$$\begin{aligned} H &= -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \frac{eB}{2\mu c} L_z \\ &\quad + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) - \frac{Ze^2}{r}. \end{aligned} \quad (16)$$

[Gasiorowics Stephen (1995)]

2. Teori Gangguan untuk Atom Hidrogen dalam Medan Magnet

Dari teori gangguan semiklasik [Sergeev Alexei V, David Z. Goodson (1998)], operator Hamiltonian dalam persamaan (16) dapat dimodifikasi ke dalam bentuk $H = T + V$, dengan

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \\ &\quad + \frac{(2|m| + D - 2)(2|m| + D - 4)}{8\rho^2} \end{aligned} \quad (17)$$

dan

$$V = -(\rho^2 + z^2)^{-1/2} + \frac{1}{8} \gamma^2 \rho^2 \quad (18)$$

dimana D adalah dimensi ruang koordinat, dengan mengambil

$$\delta = [|m| + a + (D-3)/2]^{-1} \quad (19)$$

dimana a adalah suatu konstanta sembarang supaya δ terdefinisi ketika $m = 0$. Selanjutnya δ digunakan sebagai parameter ekspansi teori gangguan. Dengan *Dimensional scaling*

$$\rho = \delta^{-2} \tilde{\rho}, z = \delta^{-2} \tilde{z}, E = \delta^2 \tilde{E}, \gamma = \delta^3 \tilde{\gamma} \quad (20)$$

sehingga persamaan nilai eigennya



$$\left[-\frac{1}{2}\delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \tilde{\rho}^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{z}^2} \right) + \frac{1-2a\delta + \left(a^2 - \frac{1}{4} \right) \delta^2}{2\tilde{\rho}^2} - \left(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2 \right)^{-1/2} + \frac{1}{8} \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}^2 - \tilde{E} \right] \psi = 0 \quad (21)$$

Dengan mengambil $D = 3$ (tiga dimensi) maka

$$\delta = \frac{1}{|m| + a} \quad (22)$$

dalam batas δ kecil maka didapatkan potensial efektif

$$V_{eff}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = \frac{1}{2} \tilde{\rho}^{-2} - \left(\tilde{\rho}^2 + \tilde{z}^2 \right)^{-1/2} + \frac{1}{8} \tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}^2 \quad (23)$$

dalam batas $\delta \rightarrow 0$ semua nilai eigen menjadi $\tilde{E}_0 = V_{eff}(\tilde{\rho}_{min}, \tilde{z}_{min})$ dimana $(\tilde{\rho}_{min}, \tilde{z}_{min})$ adalah minimum dari potensial efektif. Minimum ini sesuai dengan $\tilde{z}_{min} = 0$ dengan $\tilde{\rho}_{min}$ adalah akar positif dari $\tilde{\gamma}^2 \tilde{\rho}_{min}^4 = 4(1 - \tilde{\rho}_{min})$.

Untuk mendapatkan perumusan yang mencakup seluruh kekuatan medan, maka diperkenalkan suatu *scaling* jarak dengan substitusi

$$\xi = \tilde{\rho} / \tilde{\rho}_{min}, \quad \eta = \tilde{z} / \tilde{\rho}_{min} \quad (24)$$

ke persamaan nilai eigen yang menggunakan potensial efektif sehingga menghasilkan

$$\left[-\frac{1}{2}\delta^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) + \frac{1}{2\xi^2} - \frac{(1-g)}{(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} g \xi^2 \right] \psi = \rho_{min}^2 \tilde{E} \psi \quad (25)$$

dengan potensial efektif

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{2\xi^2} - \frac{1-g}{(\xi^2 + \eta^2)^{1/2}} + \frac{1}{2} g \xi^2 \quad (26)$$

dimana

$$g = 1 - \tilde{\rho}_{min} = \frac{\tilde{\gamma}^2 \rho_{min}^4}{4} \quad (27)$$

Variasi g dari 0 sampai 1 sesuai dengan variasi $\tilde{\gamma}$ dari nol ke takterhingga, menurut hubungan

$$\tilde{\gamma} = 2g^{1/2} (1-g)^{-2} \quad (28)$$

Orde yang lebih tinggi dalam teori perturbasi diperoleh dengan memperkenalkan

koordinat perpindahan q_1 dan q_2 , yang didefinisikan dengan $\xi = 1 + \delta^{1/2} q_1$,

$\eta = \delta^{1/2} q_2$ dan kemudian penguraian W

dalam pangkat $\delta^{1/2}$ sampai orde $(\delta^{1/2})^2$ didapatkan

$$W(\delta^{1/2}) = \frac{3g-1}{2} + \delta((3g+1)q_1^2 + (1-g)q_2^2) \quad (29)$$

dan $\omega_1^2 = 3g+1, \omega_2^2 = 1-g, \frac{3g-1}{2} = \tilde{\rho}_{min}^2 \tilde{E}_0$ serta mengganti potensial efektif persamaan (26) dengan persamaan (29) maka didapatkan persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \left(\frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2 \right) \right] \psi = \varepsilon \psi \quad (30)$$

dengan

$$\varepsilon = \frac{\tilde{\rho}_{min}^2 (\tilde{E} - \tilde{E}_0)}{\delta} \quad (31)$$

dengan pemisahan variabel untuk persamaan (30) didapatkan dua persamaan Schrödinger osilator harmonik yaitu

1).

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(q_1)}{dq_1^2} + \frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 \psi(q_1) = \varepsilon_1 \psi(q_1) \quad (32)$$

yang mempunyai nilai eigen

$$\varepsilon_1 = \left(n_1 + \frac{1}{2} \right) \omega_1 \quad (33)$$

(lihat lampiran 3).

2).

$$-\frac{1}{2} \frac{d^2 \psi(q_2)}{dq_2^2} + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2 \psi(q_2) = \varepsilon_2 \psi(q_2) \quad (34)$$

yang mempunyai nilai eigen

$$\varepsilon_2 = \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) \omega_2 \quad (35)$$

(lihat lampiran 3)

jadi nilai eigennya

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \quad (36)$$

dari koefisien ekspansi potensial yang lebih tinggi (lihat lampiran 4) maka nilai eigennya

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - a \quad (37)$$

dari persamaan (36), (35), (33), (31), dan (37) didapatkan nilai eigen E

$$E = \left[\left(n_1 + \frac{1}{2} \right) (3g + 1)^{\frac{1}{2}} + \left(n_2 + \frac{1}{2} \right) (1 - g)^{\frac{1}{2}} - a \right] (|m| + a)^{-3} (1 - g)^{-2} + (3g - 1)(|m| + a)^{-2} 0.5 (1 - g)^{-2} \quad (38)$$

secara umum

$$a = n_1 + n_2 + 1 \quad (39)$$

dengan n_1 dan n_2 adalah bilangan kuantum harmonik.

3. Orbit Elektron

Persamaan dasar perhitungan orbit elektron dalam penelitian ini yaitu dengan menggunakan Hamiltonian nonrelativistik untuk atom hidrogen dalam medan magnet dengan kuat medan magnet B diarahkan sepanjang sumbu z . Dalam persamaan (16),

$$\frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) \text{ merupakan potensial}$$

osilator harmonik dalam koordinat silinder

$$x = \rho \cos \phi, \quad y = \rho \sin \phi, \quad z = z \quad (40)$$

dalam satuan atom Hamiltoniannya adalah

$$H = \frac{1}{2} \bar{p}^2 - \frac{1}{r} + \frac{1}{2} \gamma L_z + \frac{1}{8} \gamma^2 (\rho^2) \quad (41)$$

dengan

$$\gamma = \frac{\hbar^3 B}{\mu^2 c e^3} \quad (42)$$

dalam perhitungan diambil $m = 0$ sehingga $L_z = m\hbar = 0$ dan $r^2 = \rho^2 + z^2$.

Lintasan klasik diperoleh dari persamaan gerakan yang tidak bergantung pada energi dan kuat medan magnet tetapi hanya tergantung pada satu parameter [Main J, Günter W (1997)] dengan

$$\tilde{r} = \gamma^{\frac{2}{3}} r, \quad \tilde{p} = \gamma^{-\frac{1}{3}} \bar{p}, \quad \tilde{E} = E \gamma^{-\frac{2}{3}} \quad (43)$$

sehingga Hamiltoniannya menjadi

$$\tilde{H} = \frac{1}{2} \tilde{p}^2 - \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{1}{8} \tilde{p}^2 = \tilde{E} \quad (44)$$

untuk menghindari singularitas Coulomb dari persamaan (44) [Main J, Günter W (1997)] dengan transformasi koordinat ke koordinat semiparabolik

$$\mu = \sqrt{\tilde{r} + \tilde{z}}, \quad \nu = \sqrt{\tilde{r} - \tilde{z}} \quad (45)$$

[Matzkin A, P. A. Dando, T. S. Monteiro (2002)].

Dengan substitusi persamaan (45) ke persamaan (44), maka didapatkan hasil

$$\frac{1}{2} (p_\mu^2 + p_\nu^2) - \tilde{E} (\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{8} \mu^2 \nu^2 (\mu^2 + \nu^2) = 2 \quad (46)$$

dari sini didapatkan Hamiltonian gerakan dalam turunan terhadap waktu

$$\mu'' = 2 \tilde{E} \mu - \left(\frac{\nu^2 \mu^3}{2} + \frac{\nu^4 \mu}{4} \right) \quad (47)$$

$$\nu'' = 2 \tilde{E} \nu - \left(\frac{\mu^2 \nu^3}{2} + \frac{\mu^4 \nu}{4} \right) \quad (48)$$

(lihat lampiran 5)

4. Probabilitas Dua Level Energi yang Berdekatan

Hamiltonian persamaan (16) adalah invarian dengan operasi simetri rotasi terhadap sumbu z , sehingga H dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks yang merupakan *Gaussian ensembles* matriks 2×2 (lihat lampiran 6) dengan fungsi distribusi energi terkorelasi $P(E_1, E_2)$. [Stockmann (1999)]

$$p(H_{11}, H_{22}) \sim P(E_1, E_2) \sim |E_1 - E_2| \exp \left(-A \sum_n E_n^2 \right) \quad (49)$$

distribusi jarak tetangga terdekat didapatkan dengan

$$p(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dE_1 \int_{-\infty}^{\infty} dE_2 P(E_1, E_2) \delta(s - |E_1 - E_2|) = C \int_{-\infty}^{\infty} dE_1 \int_{-\infty}^{\infty} dE_2 |E_1 - E_2| \exp \left(-A \sum_n E_n^2 \right) \times \delta(s - |E_1 - E_2|) \quad (50)$$

konstanta A dan C diperoleh dengan kondisi normalisasi dari persamaan (50)

1. total probabilitas dinormalisasi menjadi 1

$$\int_0^{\infty} p(s) ds = 1 \quad (51)$$

2. jarak level rata-rata

$$\int_0^{\infty} s p(s) ds = 1 \quad (52)$$

sehingga menghasilkan probabilitas dua level energi yang berdekatan sesuai dengan

distribusi Wigner GOE (*Gaussian Orthogonal Ensemble*) yaitu

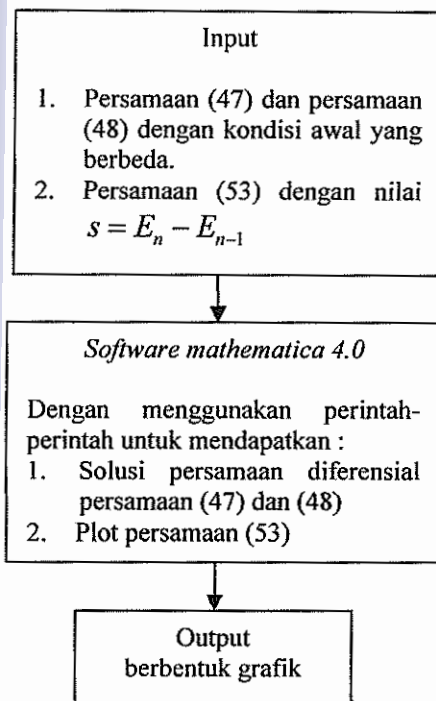
$$P(s) = \frac{\pi}{2} s \exp\left(-\frac{\pi}{4} s^2\right) \quad (53)$$

dimana s adalah

$$s = E_n - E_{n-1}. \quad (54)$$

METODE PENELITIAN

Penyelesaian persamaan (47) dan (48) serta plot persamaan (53) dengan menggunakan *Software mathematica 4.0* (Lihat lampiran 7 dan 9). Dengan menggunakan perintah-perintah yang telah ada dalam *mathematica 4.0* dan sintak-sintaknya maka penyelesaian persamaan diferensial dapat langsung berbentuk grafik.

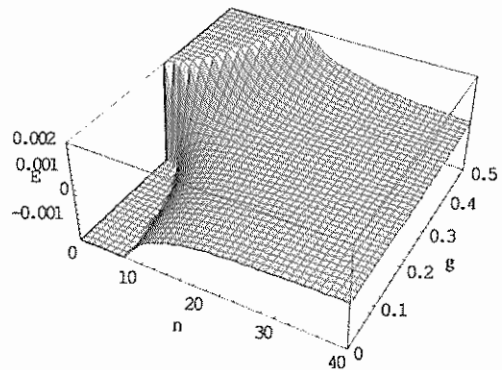


Gambar 2. Diagram penyelesaian persamaan dengan menggunakan *mathematica 4.0*

Pada solusi persamaan diferensial digunakan metode *Runge Kutta* yang sudah ada dalam *mathematica 4.0*. hanya dengan menggunakan perintah yang telah ditentukan, maka solusi lebih cepat dan mudah didapatkan. Untuk plot persamaan (53), juga digunakan "perintah" dan memberikan batasan parameter s yang digunakan.

HASIL DAN PEMBAHASAN

Dari persamaan (38) dengan mengambil harga $n_1 = n_2 = n$ (untuk memudahkan) dan $|m| = 0$ (efek Zeeman diabaikan) dapat digambarkan grafik antara energi E , bilangan kuantum n dan parameter medan magnet g sebagai berikut (lihat lampiran 8)

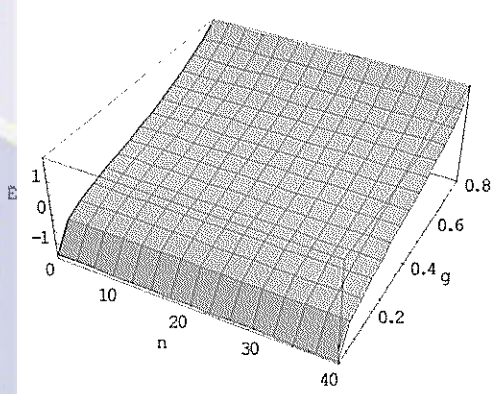


Gambar 3. Grafik antara energi E , bilangan kuantum n dan kuat medan magnet g .

Ketika atom hidrogen dieksitasikan ke keadaan *Rydberg* ($n > 20$) dengan memberikan kuat medan magnet g tertentu, nilai eigen yang didapatkan seperti terlihat pada gambar 3. Pada kuat medan magnet $g = 0$ (tidak ada medan magnet) maka didapatkan nilai eigen atom hidrogen pada keadaan reguler. Secara eksak keadaan ini dapat di peroleh dengan memasukan nilai $g = 0$ dan nilai $|m| = 0$ ke persamaan (38).

Harga n pada gambar 3 sebenarnya berharga diskrit yaitu dari 1, 2, 3, ..., 40. sedangkan pada sumbu energi ada daerah energi positif dan ada daerah energi negatif. Pada daerah energi negatif artinya elektron masih terikat pada atom hidrogen tersebut (potensial Coulomb yang dominan), sedangkan pada daerah energi positif berarti elektron sudah lepas dan medan magnet yang berpengaruh besar. Secara kualitatif keadaan terikat ini digambarkan dengan plot ruang fase (gambar 6a sampai 6g halaman 8, gambar 8a sampai 8g halaman 9 sampai 10 dan gambar 10a sampai 10g halaman 11).

Dari hubungan *scaled energy* $\tilde{E} = E\gamma^{-2/3}$ dapat digambarkan juga grafik sebagai berikut (lihat lampiran 8)

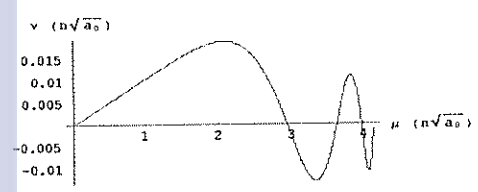


Gambar 4. Grafik antara *scaled* energi \tilde{E} , bilangan kuantum n dan g

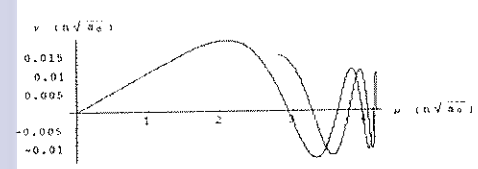
Dengan menentukan keadaan *Rydberg* atom hidrogen dan memberikan medan magnet maka nilai energi E dan *scaled energy* \tilde{E} dapat ditentukan dengan menggunakan gambar 3 dan gambar 4. Keadaan *chaotic* dicapai dengan merubah nilai g atau nilai E dengan menjaga \tilde{E} tetap pada daerah *chaotic*.

A. Orbit Elektron

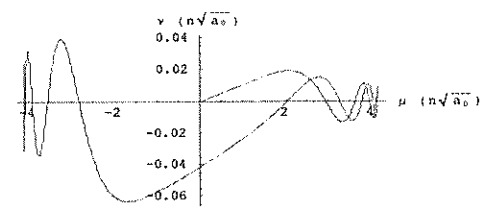
Dalam analisa orbit elektron, digunakan koordinat semiparabolik dimana gerakan elektron atom hidrogen digambarkan dalam koordinat tersebut. Dengan mengeksitasi atom hidrogen ke keadaan *Rydberg* dan memberikan medan magnet maka dicapai keadaan *chaotic* atom hidrogen pada *scaled energy* $\tilde{E} = -0.11544216$ dengan kondisi awal $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1.99988533$, $v(0) = 0$, dan $v'(0) = 0.02141652$. Perkembangan keadaan *chaotic* tersebut dapat digambarkan sebagai berikut



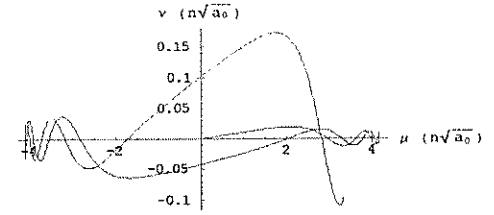
Gambar 5a. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 3 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



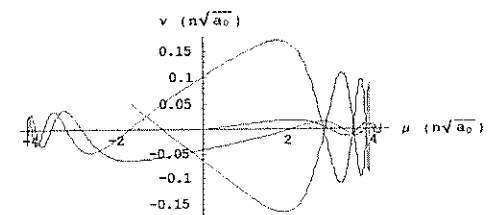
Gambar 5b. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 5 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



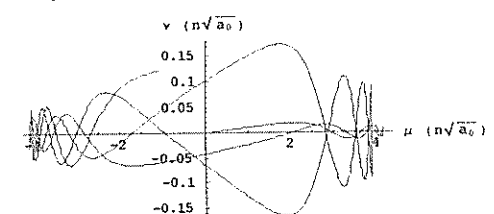
Gambar 5c. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 10 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



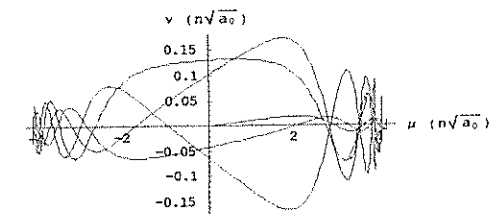
Gambar 5d. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 15 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



Gambar 5e. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 20 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



Gambar 5f. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 25 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.



Gambar 5g. Dengan waktu dari $t = 0$ s ke waktu $t = 30 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s. a_0 adalah jari-jari Bohr untuk $n = 1$.

Dengan memperhatikan dari gambar 5a sampai 5g, maka evolusinya mengacu pada perkembangan deterministik dengan hasilnya adalah *chaotic*. Sistem tersebut dari waktu ke waktu berkembang dalam suatu cara tertentu

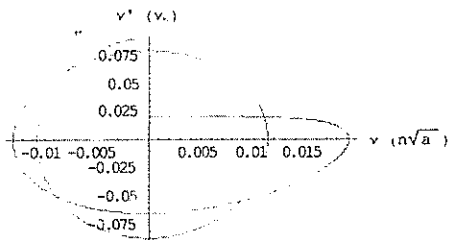
yaitu keadaan berikutnya tergantung pada keadaan yang sebelumnya. Dinamikanya diikuti oleh ketidaklinearan yang berarti bahwa keadaan berikutnya bergantung dalam suatu cara yang rumit dari keadaan awalnya. Gambar 5a sampai 5g merupakan solusi dari persamaan (47) dan (48) yang merupakan persamaan diferensial nonlinear (hubungan superposisi sudah tidak berlaku kembali) dan *nonautonomous* (bergantung waktu), sehingga menghasilkan solusi yang susah untuk diprediksikan yang pada akhirnya menghasilkan dinamika *chaotic*.

Pada gambar 5a sampai 5g orbitnya tidak pernah kembali lagi pada keadaan semula, tetapi tetap berada disekitar daerah tertentu. Sehingga sistem dapat diprediksikan dalam *range* tertentu. Misalnya gerakannya dalam sumbu μ berada disekitar -4.5 sampai 4.5 dan sumbu v berada disekitar -0.175 sampai 0.175. gerakannya tidak akan pernah melebihi batas tersebut. Karena tidak pernah melebihi batas tersebut walaupun elektron dipengaruhi oleh medan magnet, maka sistem tersebut merupakan sistem terikat, dimana elektron masih berada di bawah pengaruh interaksi Coulomb antara elektron dengan inti.

Untuk mendapatkan *scaled energy* $\tilde{E} = -0.11544216$ dilakukan dengan memvariasikan medan magnet, dengan keadaan *Rydberg* yang tetap atau mengeksitasi atom hidrogen ke keadaan *Rydberg* dengan bilangan kuantum n yang berubah dalam medan magnet yang tetap.

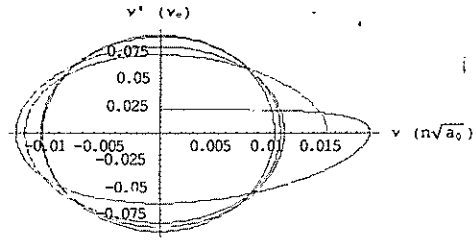
Sesuai dengan hubungan $\tilde{E} = E\gamma^{-2/3}$.

Untuk menunjukkan secara kualitatif bahwa sistem tersebut merupakan sistem terikat, maka gambar 5a sampai 5g dapat di plot dalam ruang fase sebagai berikut

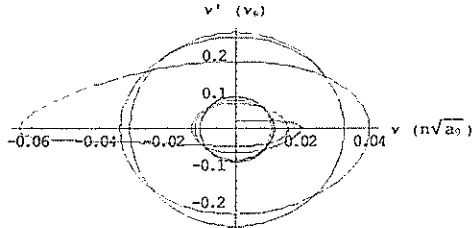


Gambar 6a. Ruang fase untuk gambar 5a.

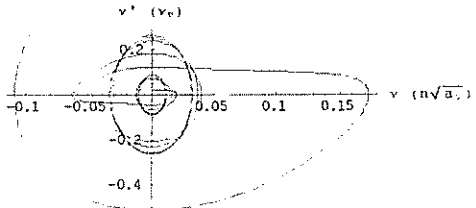
Dengan $v_e = 5981.088 m^{0.5} n^{-0.5} s^{-1}$. Dimana m adalah satuan panjang (meter), n adalah bilangan kuantum dan s adalah satuan waktu (detik).



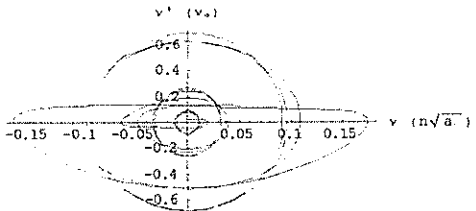
Gambar 6b. Ruang fase untuk gambar 5b.



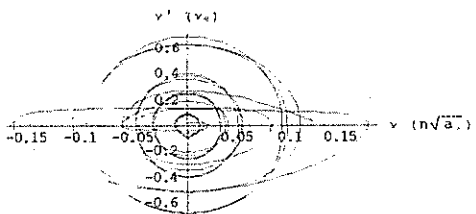
Gambar 6c. Ruang fase untuk gambar 5c.



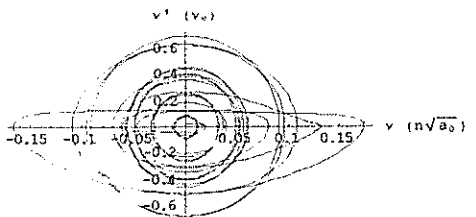
Gambar 6d. Ruang fase untuk gambar 5d.



Gambar 6e. Ruang fase untuk gambar 5e.



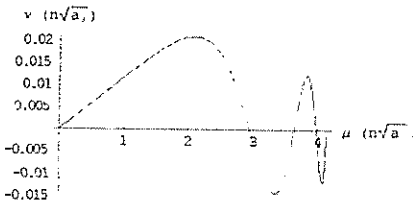
Gambar 6f. Ruang fase untuk gambar 5f.



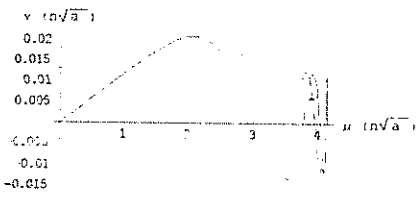
Gambar 6g. Ruang fase untuk gambar 5g.

Dari gambar 6a sampai 6g dapat terlihat bahwa dari waktu-ke waktu dihasilkan beberapa lintasan tertutup yang tidak teratur yang mengindikasikan bahwa sistem tersebut merupakan sistem terikat dan *chaotic*, dimana interaksi Coulomb lebih dominan dibandingkan dengan pengaruh dari medan magnet, tetapi pengaruh dari medan magnet masih ada.

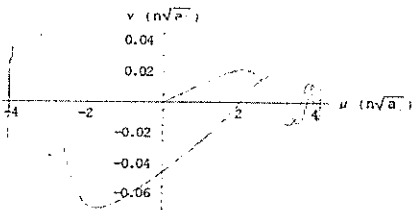
Dengan sedikit mengubah kondisi awal yaitu $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1.99986193$, $v(0) = 0$ dan $v'(0) = 0.02350032$, maka didapatkan keadaan *chaotic* sebagai berikut (range waktu sama seperti pada sebelumnya).



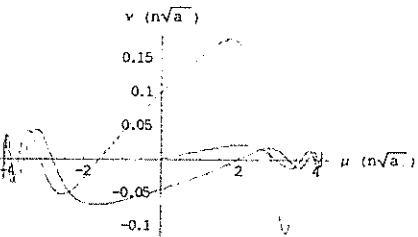
Gambar 7a. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 3n\sqrt{n}10^{-9}$ s.



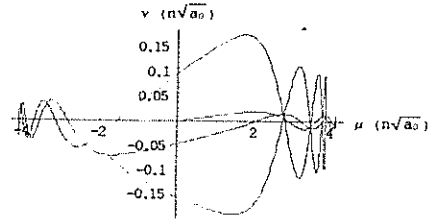
Gambar 7b. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 5n\sqrt{n}10^{-9}$ s.



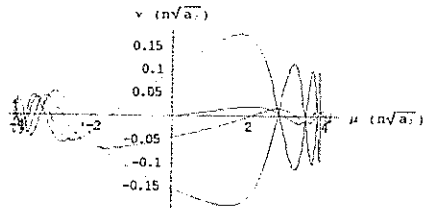
Gambar 7c. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 10n\sqrt{n}10^{-9}$ s.



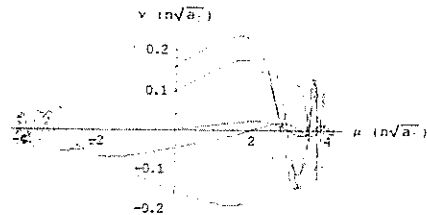
Gambar 7d. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 15n\sqrt{n}10^{-9}$ s.



Gambar 7e. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 20n\sqrt{n}10^{-9}$ s.

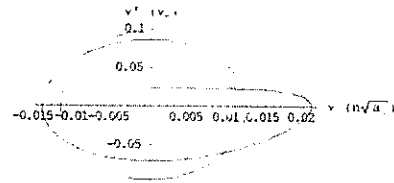


Gambar 7f. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 25n\sqrt{n}10^{-9}$ s.

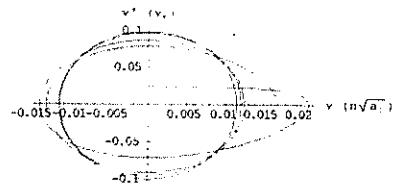


Gambar 7g. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke waktu $t = 30n\sqrt{n}10^{-9}$ s.

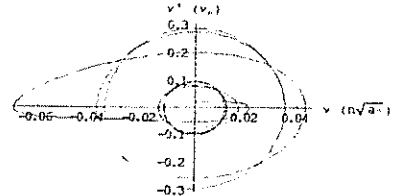
Sedangkan ruang fasenya



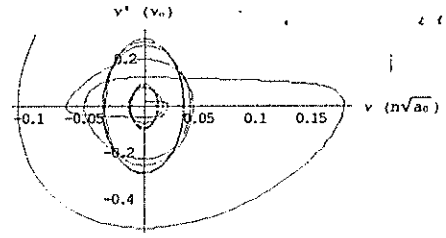
Gambar 8a. Ruang fase untuk gambar 7a.



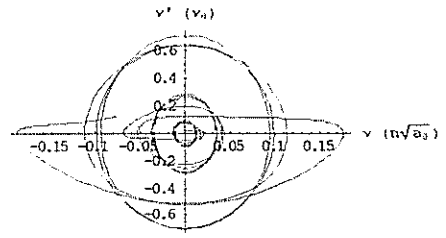
Gambar 8b. Ruang fase untuk gambar 7b.



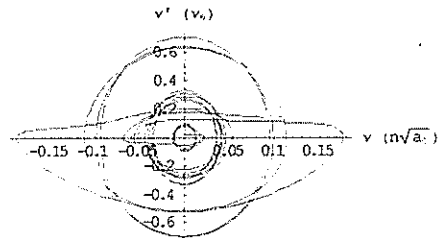
Gambar 8c. Ruang fase untuk gambar 7c.



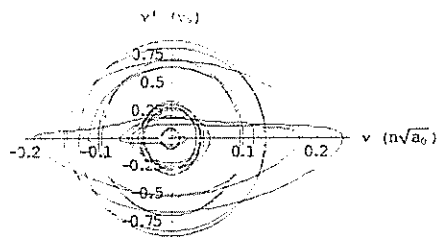
Gambar 8d. Ruang fase untuk gambar 7d.



Gambar 8e. Ruang fase untuk gambar 7e.



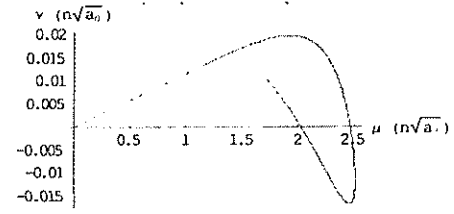
Gambar 8f. Ruang fase untuk gambar 7f.



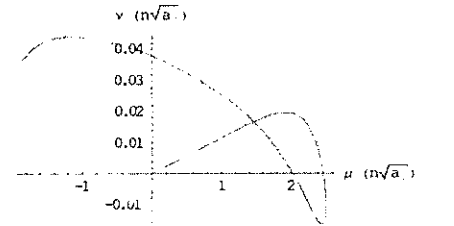
Gambar 8g. Ruang fase untuk gambar 7g.

Setelah sedikit merubah kondisi awal, maka visualisasi yang dihasilkan sangat berbeda. Dapat dilihat pada gambar 5g yang sangat berbeda dengan gambar 7g. Dalam perkembangannya juga sangat berbeda. Dengan demikian sistem tersebut sangat sensitif terhadap kondisi awal. Ruang fase pada gambar 8g tetap menunjukkan bahwa sistemnya terikat dan *chaotic*.

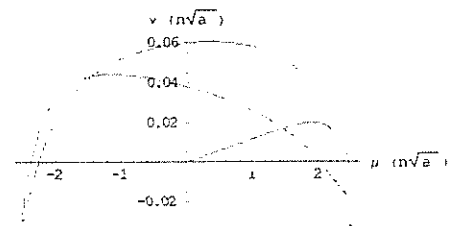
Dengan menggunakan parameter *scaled energy* yang lain yaitu $\tilde{E} = -0.31735345$, $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1.99986193$, $v(0) = 0$ dan $v'(0) = 0.02350032$, maka didapatkan juga perkembangannya dari waktu-ke waktu sebagai berikut:



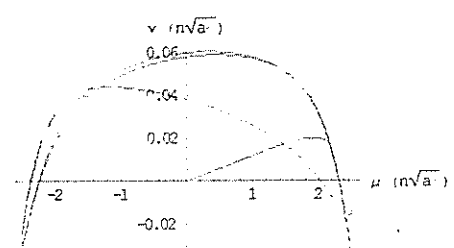
Gambar 9a. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 3n\sqrt{n} 10^{-9}$ s.



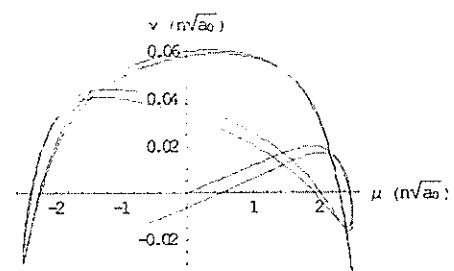
Gambar 9b. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 5n\sqrt{n} 10^{-9}$ s.



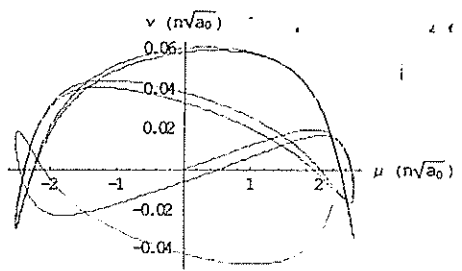
Gambar 9c. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 15n\sqrt{n} 10^{-9}$ s.



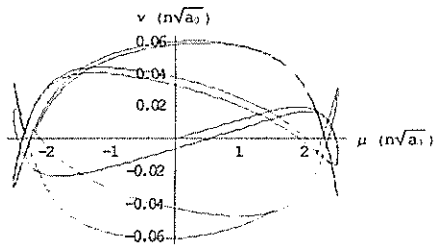
Gambar 9d. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 15n\sqrt{n} 10^{-9}$ s.



Gambar 9e. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 20n\sqrt{n} 10^{-9}$ s.

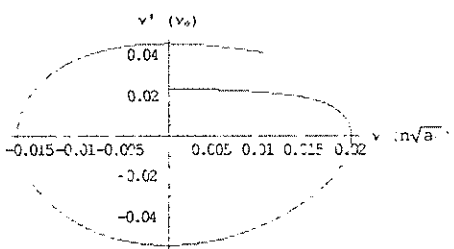


Gambar 9f. Dengan waktu dari $t = 0$ s sampai $t = 25 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.

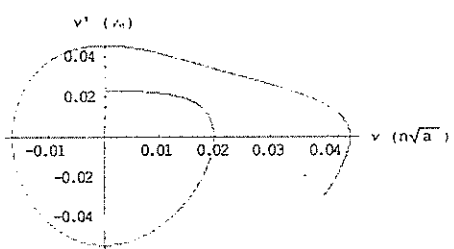


Gambar 9g. Keadaan *chaotic* dari waktu $t = 0$ s ke $t = 30 n \sqrt{n} 10^{-9}$ s.

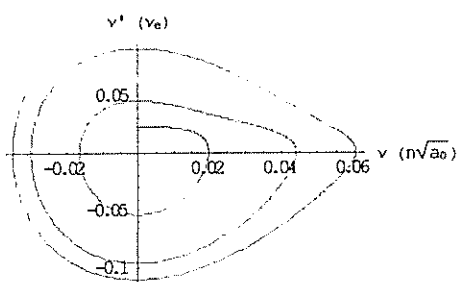
Dan ruang fasenya



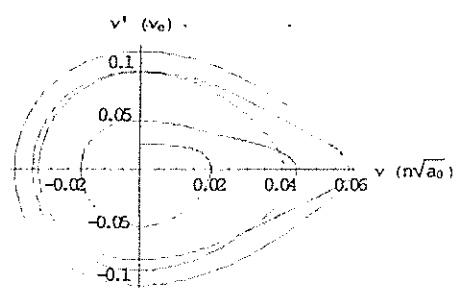
Gambar 10a. Ruang fase untuk gambar 9a.



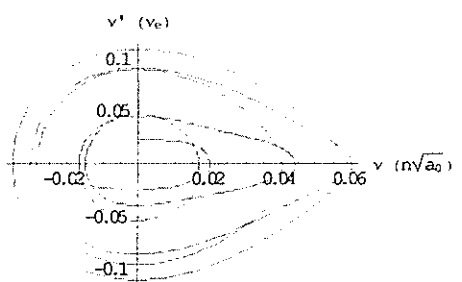
Gambar 10b. Ruang fase untuk gambar 9b.



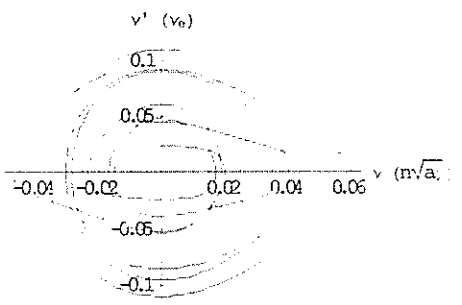
Gambar 10c. Ruang fase untuk gambar 9c.



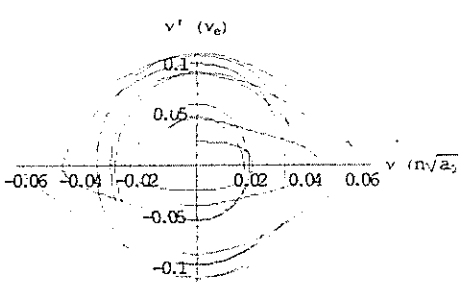
Gambar 10d. Ruang fase untuk gambar 9d.



Gambar 10e. Ruang fase untuk gambar 9e.



Gambar 10f. Ruang fase untuk gambar 9f.

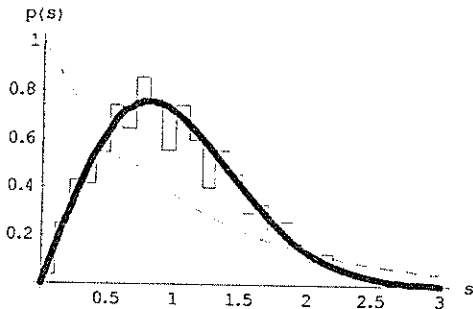


Gambar 10g. Ruang fase untuk gambar 9g.

Gambar 9g dan gambar 10g juga menunjukkan keadaan *chaotic* dari sistem (atom hidrogen dalam medan magnet). Dengan merubah parameter \tilde{E} , gambar yang dihasilkan sangat berbeda. Jadi keadaan *chaotic* tidak hanya tergantung pada kondisi awal saja, tetapi tergantung juga pada nilai parameter *scaled energy* yang digunakan.

B. Probabilitas Dua Level Energi yang Berdekatan

Probabilitas dua level energi yang berdekatan didapatkan dari hubungan (53). Dari persamaan (53) dapat digambarkan hubungan antara probabilitas level energi $p(s)$ dan jarak antara level energi s ($E_n - E_{n-1}$) sebagai berikut (lihat lampiran 9).



Gambar 11. Probabilitas dua level energi yang berdekatan.

Prediksi probabilitas dua level energi yang berdekatan dari sistem atom hidrogen dalam keadaan reguler dan keadaan *chaotic* dihasilkan dengan menggunakan distribusi statistik yaitu distribusi Poisson dan distribusi Wigner.

Pada gambar 11, garis patah-patah menunjukkan probabilitas level energi atom hidrogen keadaan reguler (tanpa medan magnet). Pada keadaan reguler ini, dua level yang lebih dekat mempunyai peluang yang besar jika dibandingkan dengan dua level yang lebih jauh. Peluang mendapatkan dua level energi yang berdekatan menurun secara eksponensial dengan bertambahnya jarak level energi yang ditandai dengan bertambahnya nilai s . Keadaan reguler ini sesuai dengan distribusi Poisson. Garis yang dicetak tebal pada gambar 11 menunjukkan probabilitas dua level energi yang berdekatan atom hidrogen pada keadaan *chaotic*. Probabilitas pada keadaan *chaotic* berbeda dengan keadaan reguler, dimana pada keadaan *chaotic* probabilitasnya naik sampai pada nilai s sekitar 0.75 dan pada nilai s yang berikutnya probabilitasnya turun hingga mendekati keadaan reguler. Keadaan *chaotic* ini didekati dengan distribusi Wigner, yang sesuai juga dengan hasil eksperimen (garis yang berbentuk poligon).

KESIMPULAN DAN SARAN

Keadaan *chaotic* atom hidrogen dapat dianalisa dengan melihat orbit elektron dalam koordinat semiparabolik dan ruang fasenya. Solusi yang dihasilkan mempunyai orbit tidak teratur. Keadaan ini dicapai pada *scaled energy* $\tilde{E} = -0.11544216$, dengan kondisi awal $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1.99988533$, $v(0) = 0$, dan $v'(0) = 0.02141652$. Demikian juga pada keadaan ini didapatkan ruang fase. Dalam ruang fase, lintasannya tertutup dan tidak teratur yang mengindikasikan bahwa sistem tersebut merupakan sistem terikat dan *chaotic*. Dengan sedikit mengubah kondisi awal yaitu $\mu(0) = 0$, $\mu'(0) = 1.99986193$, $v(0) = 0$ dan $v'(0) = 0.02350032$, didapatkan visualisasi keadaan *chaotic* yang sangat berbeda. Jadi keadaan *chaotic* sangat sensitif terhadap kondisi awal. Ruang fasenya juga tetap menunjukkan keadaan terikat dan *chaotic*. Dengan merubah parameter \tilde{E} , gambar yang dihasilkan sangat berbeda. Jadi keadaan *chaotic* tidak hanya tergantung pada kondisi awal saja, tetapi tergantung juga pada nilai parameter *scaled energy* yang digunakan.

Berdasarkan pada sifat invarian operasi simetri rotasi didapatkan probabilitas level energi yang berdekatan sistem *chaotic* atom hidrogen sesuai dengan distribusi Wigner. Pada distribusi ini probabilitasnya naik sampai harga s sekitar 0.75 dan untuk nilai s yang selanjutnya, probabilitasnya turun.

Penelitian selanjutnya diharapkan perhitungan distribusi/peluang keadaan elektron sistem *chaotic* atom hidrogen (untuk berbagai keadaan) secara kuantum, sehingga hasilnya bisa dibandingkan dengan perhitungan secara klasik.

DAFTAR PUSTAKA

- Anton H. 1987. Aljabar Linear Elementer. Anton Textbooks, Penerjemah; Jakarta: Erlangga-Pantur Silaban, I. Nyoman Susila. Terjemahan dari: Elementary Linear Algebra.
- Ardana N. K. Kutha. 2002. Panduan Penggunaan Mathematica. Bogor: Departemen Matematika FMIPA IPB.
- Backhaus U, H. Joachim Schlichting. 1987. Regular and Chaotic Oscillations of a



- Rotating Pendulum. Chaos in Education II. Vespem (Hungary), pp. 312-317.
- Bai-lin Hao. 1988. Directions in Chaos. Farrer Road, Singapore 9128: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
- Becker R. 1964. Electromagnetic Fields and Interactions. New York: Dover Publications.
- Beiser A. 1987. Konsep Fisika Modern. McGraw-Hill, Penerjemah; Jakarta: Erlangga-The Houw Liong. Terjemahan dari: Concepts of Modern Physics.
- Boas Mary L. 1983. Mathematical Methods in The Physical Sciences. Canada: John Wiley & Sons.
- Chu Shih-I, Xiao-Min Tong. 1998. Time-dependent approach to high-resolution spectroscopy: application to the photoabsorption spectrum of classically chaotic hydrogen atoms in magnetic fields. Chemical Physics Letters 294:31-36.
- Delande Dominique, Jakub Zakrzewsky. 2003. A Realistic Example of Chaotic Tunneling: the Hydrogen atom in parallel static electric and magnetic fields. Uniwersytet Jagiellonski, Ulica Reymonta 4, PL-30-059 Krakow, Poland.
- Dyke H. Van. PARUNAK. From Chaos to Commerce: Practical Issues and Research Opportunities in the Nonlinear Dynamics of Decentralized Manufacturing Systems. ERIM Center for Electronic Commerce.
- Gasirowics Stephen. 1995. Quantum Physics. Second Edition. New York: John Wiley & Son.
- Griffiths David J. 1989. Introduction to Electrodynamics. Englewood Cliffs, N.J , U.S.A: Prentice-Hall.
- Jaffe Charles, D. Farrelly, and T. Uzer. 1999. Transition State Theory Without Time-Reversal Symmetry: Chaotic Ionization of the Hydrogen Atom. 2000 The American Physical Society.
- Jianguo Rao, and K T Taylor. 2001. The Closed Orbits and the Photo-Excitation scaled spectrum of the Hydrogen Atom in Crossed Fields. J. Phys. B: At. Mol. Phys.
- Karremans K, W. Vassen, and W. Hogervorst. 1998. Observation of the Transition to Chaos in the Level Statistics of Diamagnetic Helium. The American Physical Society.
- Khrilovich I.B. and G. Yu. Ruban. 2003. Hydrogen Atom in Strong Magnetic Field Revisited. Arxiv: Quant-ph/0309014 v2.
- Krüger Jan Max Walter. 1998. The Nonlinear Pendulum: PHSI 362 Project.
- Main J, Günter W. 1997. Hydrogen atom in a magnetic field: Ghost orbits, catastrophes, and uniform semiclassical approximations. Physical Review A Volume 55, Number 3.
- Matzkin A, P. A. Dando, T. S. Monteiro. 2002. Closed-orbit theory for molecules in fields. Physical Review A 66, 013410.
- Neumann C, Ubert, S. Freund, E. Flöthmann, B. Sheehy, and K. H. Welge. 1997. Symmetry Breaking in Crossed Magnetic and Electric Fields. The American Physical Society.
- Sergeev Alexei V, David Z. Goodson. 1998. Semiclassical Self-Consistent Field Perturbation Theory for the Hydrogen Atom in a Magnetic Field. International Journal of Quantum Chemistry, Vol. 69, 183-192.
- Stöckmann H.-J. 1999. Quantum Chaos an Introduction. United Kingdom: Cambridge University Press.
- Tjia M. O. 1999. Mekanika Kuantum. Bandung: ITB Pr.
- Wiebusch G, R. Ubert, B. Sheehy, E. Flöthmann, K. H. Welge. 1992. Spectra of Highly Excited Hydrogen Atoms in Electric and Magnetic Fields. Lambda Highlights No. 32.



Hal Cipta (Hak Cipta) Unsur-unsur:

1. Diambil sebagai subjek atau objek karya yang merupakan unsur dan merupakan sumber ;
2. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
3. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
4. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
5. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
6. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
7. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
8. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
9. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;
10. Berwujud atau tidak berwujud, dan dapat direproduksi, diperjualbelikan, dan dipublikasikan;

LAMPIRAN

Lampiran 1. Transformasi Momentum

Gaya yang bekerja pada elektron yang bergerak dengan kecepatan \bar{v} dalam medan elektromagnetik dengan kekuatan medan listrik \bar{E} dan kekuatan medan magnet \bar{B} diberikan oleh

$$\bar{F} = e\bar{E} + \frac{e}{c}\bar{v} \times \bar{B} \quad (1)$$

dimana e adalah muatan elektron dan \bar{B} dalam gauss. dari hukum Newton ke-2, persamaan (1) menjadi

$$\frac{d}{dt}m\bar{v} = e\bar{E} + \frac{e}{c}\bar{v} \times \bar{B} \quad (2)$$

Kehadiran medan radiasi E.M dinyatakan oleh potensial vektor \bar{A} dan potensial skalar ϕ yang ditentukan melalui medan-medan \bar{B} dan \bar{E} sebagai berikut:

$$\bar{B} = \nabla \times \bar{A} \quad (3)$$

$$\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} - \nabla\phi \quad (4)$$

dengan c = kecepatan rambat cahaya dalam ruang hampa. Untuk medan radiasi murni (yaitu medan E.M. yang tak mengandung komponen statik), hubungan (4) menjadi

$$\bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t} \quad (5)$$

dengan medan \bar{A} yang memenuhi persamaan gelombang bebas

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\bar{A} = 0 \quad (6)$$

dan syarat Coulomb (*Coulomb gauge*)

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0 \quad (7)$$

jika persamaan (4) dan (3) dimasukkan ke persamaan (2), maka komponen x dari persamaan ini adalah

$$\frac{d}{dt}\left(m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left\{-e\phi + \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z)\right\} \quad (8)$$

dengan

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{A}_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z} \quad (9)$$

persamaan (8) adalah bentuk Eulerian dari persamaan gerakan

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e\phi + \frac{e}{c}(\dot{x}A_x + \dot{y}A_y + \dot{z}A_z) \quad (10)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \quad (11)$$

maka komponen momentum pada sumbu x adalah

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \frac{e}{c}A_x \quad (12)$$

jika semua komponen diambil maka

$$\bar{p} = m\bar{v} + \frac{e}{c}\bar{A} \quad (13)$$

atau

$$\bar{P} \rightarrow \bar{P} + \frac{e}{c}\bar{A} \quad (14)$$

Lampiran 2. Penurunan Persamaan Operator

Jika operator $\bar{\nabla} \bullet \bar{A}$ dengan $\bar{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y + \hat{k}A_z = (A_x, A_y, A_z)$

dan $\bar{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ maka

$$\begin{aligned} \bar{\nabla} \bullet \bar{A}\psi &= \bar{\nabla} \bullet (A_x\psi, A_y\psi, A_z\psi) = \frac{\partial}{\partial x}(A_x\psi), \frac{\partial}{\partial y}(A_y\psi), \frac{\partial}{\partial z}(A_z\psi) \\ &= \psi \frac{\partial A_x}{\partial x} + A_x \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \frac{\partial A_y}{\partial y} + A_y \frac{\partial \psi}{\partial y}, \psi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \psi \frac{\partial A_x}{\partial x}, \psi \frac{\partial A_y}{\partial y}, \psi \frac{\partial A_z}{\partial z} + A_x \frac{\partial \psi}{\partial x}, A_y \frac{\partial \psi}{\partial y}, A_z \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &= \psi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial y}, \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \bar{A} \bullet \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ &= \psi \bar{\nabla} \bullet \bar{A} + \bar{A} \bullet \bar{\nabla} \psi \end{aligned}$$

sehingga diambil komponen operatormya saja

$$\bar{\nabla} \bullet \bar{A} = (\bar{\nabla} \bullet \bar{A}) + \bar{A} \bullet \bar{\nabla} \tag{15}$$



Lampiran 3. Penurunan Nilai Eigen Osilator Harmonik

Persamaan Schrödinger untuk osilator harmonik yang mempunyai bentuk potensial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ adalah

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left(E - \frac{1}{2}kx^2 \right) \psi = 0 \quad (16)$$

untuk memudahkan, persamaan (16) disederhanakan dengan memperkenalkan kuantitas tak berdimensi sebagai berikut

$$y = \left(\frac{1}{\hbar} \sqrt{km} \right)^{1/2} x = \sqrt{\frac{2\pi m \nu}{\hbar}} x \quad (17)$$

dan

$$\alpha = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2E}{h\nu} \quad (18)$$

dengan ν menyatakan frekuensi klasik osilasi. Dengan memasukan persamaan (18) dan (17) kepersamaan (16), maka persamaan Schrödinger dapat dituliskan menjadi

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + (\alpha - y^2)\psi = 0 \quad (19)$$

jika fungsi ψ menyatakan partikel sebenarnya yang terlokalisasi dalam ruang, maka fungsi ψ mempunyai bentuk asimtotik yang harganya harus mendekati nol ketika $y \rightarrow \pm \infty$. Persamaan (19) dapat dituliskan kembali menjadi

$$\frac{d^2\psi/dy^2}{(y^2 - \alpha)\psi} = 1 \quad (20)$$

ketika $y \rightarrow \infty, y^2 \gg \alpha$, sehingga

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{d^2\psi/dy^2}{y^2\psi} = 1 \quad (21)$$

fungsi ψ_∞ yang memenuhi persamaan (21) adalah

$$\psi_\infty = e^{-y^2/2} \quad (22)$$

karena

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{d^2\psi_\infty}{dy^2} = \lim_{y \rightarrow \infty} (y^2 - 1)e^{-y^2/2} = y^2 e^{-y^2/2} \quad (23)$$

fungsi gelombang osilator harmoniknya adalah

$$\psi = f(y)\psi_\infty = f(y)e^{-y^2/2} \quad (24)$$

dengan memasukan persamaan (24) kepersamaan (19) didapatkan

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2} - 2y \frac{df(y)}{dy} + (\alpha - 1)f(y) = 0 \quad (25)$$

prosedur baku untuk memecahkan persamaan (25) ialah dengan menganggap bahwa $f(y)$ dapat diuraikan dalam deret pangkat y , yaitu

$$f(y) = A_0 + A_1y + A_2y^2 + A_3y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n y^n \quad (26)$$

dengan mendiferensiasikan persamaan (26) didapatkan

$$\frac{df(y)}{dy} = A_1 + 2A_2y + 3A_3y^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} nA_n y^{n-1} \quad (27)$$

persamaan (27) dikalikan dengan y menghasilkan

$$y \frac{df(y)}{dy} = A_1y + 2A_2y^2 + 3A_3y^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} nA_n y^n \quad (28)$$

turunan kedua dari $f(y)$ terhadap y adalah

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2} = 1.2A_2 + 2.3A_3y + 3.4A_4y^2 + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)A_n y^{n-2} \quad (29)$$

yang sama dengan

$$\frac{d^2f(y)}{dy^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)A_{n+2}y^n \quad (30)$$

dengan memasukan persamaan (30), (28) dan (26) kepersamaan (25), didapatkan

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)A_{n+2} - (2n+1-\alpha)A_n]y^n = 0 \quad (31)$$

supaya persamaan ini berlaku untuk setiap y , kuantitas dalam tanda kurung harus nol untuk setiap harga n , sehingga

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = (2n+1-\alpha)A_n \quad (32)$$

$$A_{n+2} = \frac{2n+1-\alpha}{(n+2)(n+1)} A_n$$

jika deret $f(y)$ berakhir pada harga n tertentu, maka koefisien A_n menjadi nol untuk harga n yang lebih tinggi sehingga dari persamaan (32) α harus mempunyai bentuk

$$\alpha = 2n+1 \quad (33)$$

dari persamaan (18) dan (33) maka didapatkan tingkat energi osilator harmonik

$$\alpha_n = \frac{2E_n}{h\nu} = 2n+1 \quad (34)$$

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h\nu$$

Lampiran 4. Ekspansi Gangguan Potensial Efektif dan Nilai Eigen

Dari teori gangguan semiklasik, ekspansi yang lebih besar untuk potensial efektif dan nilai eigen mempunyai bentuk

$$W = \tilde{\rho}_{\min}^2 \tilde{E}_0 + \delta \left[\frac{1}{2} \omega_1^2 q_1^2 + \frac{1}{2} \omega_2^2 q_2^2 - a + v(q_1, q_2) \right] \quad (35)$$

$$v(q_1, q_2) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^{k/2} v_k(q_1, q_2) \quad (36)$$

dengan v_k adalah polinomial derajat $k + 2$

$$\varepsilon \equiv \frac{\tilde{\rho}_{\min}^2 (\tilde{E} - \tilde{E}_0)}{\delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{k/2} \varepsilon_k \quad (37)$$

dari persamaan (35) dengan mengambil empat suku pertama dan persamaan (37) maka nilai eigennya

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - a \quad (38)$$

Lampiran 5. Penurunan Hamiltonian terhadap Waktu

Dari Hamiltonian (46)

$$H = \frac{1}{2}(p_\mu^2 + p_\nu^2) - \tilde{E}(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{8}\mu^2\nu^2(\mu^2 + \nu^2) = 2 \tag{39}$$

dengan

$$p_\mu = \mu', \quad p_\nu = \nu' \tag{40}$$

maka persamaan (39) menjadi

$$H = \frac{1}{2}(\mu'^2 + \nu'^2) - \tilde{E}(\mu^2 + \nu^2) + \frac{1}{8}\mu^2\nu^2(\mu^2 + \nu^2) = 2 \tag{41}$$

dan menurunkan persamaan (41) terhadap waktu

$$\frac{dH}{dt} = H' = \frac{\partial H}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} = \frac{d2}{dt} = 0 \tag{42}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \mu'^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} - \tilde{E} \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8} \nu^2 \frac{\partial \mu^4}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8} \mu^4 \frac{\partial \nu^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu'^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} - \tilde{E} \frac{\partial \nu^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{8} \mu^2 \frac{\partial \nu^4}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{8} \nu^4 \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

persamaan (43) di pecah menjadi dua persamaan diferensial

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \mu'^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} - \tilde{E} \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8} \nu^2 \frac{\partial \mu^4}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8} \nu^4 \frac{\partial \mu^2}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} = 0 \tag{44}$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \nu'^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} - \tilde{E} \frac{\partial \nu^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{8} \mu^2 \frac{\partial \nu^4}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} + \frac{1}{8} \mu^4 \frac{\partial \nu^2}{\partial \nu} \frac{d\nu}{dt} = 0 \tag{45}$$

dengan menyederhanakan persamaan (44) maka

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{d\mu}{dt} \right)^2 \right\} \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{d\mu}{dt} \right) \left(\frac{d\mu}{dt} \right) \right\} \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} \right) \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(2 \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} \right) \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{d\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt} \right) \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{d\mu}{dt} \frac{d}{dt} \right) \mu' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \frac{d\mu}{dt} + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu \frac{d\mu}{dt} = 0$$

$$\frac{d\mu}{dt} \frac{d\mu'}{dt} - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}\nu^2 4\mu^3 \mu' + \frac{1}{8}\nu^4 2\mu\mu' = 0$$

$$\dot{\mu}' \frac{d\mu'}{dt} - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}v^2 4\mu^3 \dot{\mu}' + \frac{1}{8}v^4 2\mu\mu' = 0$$

$$\mu'\mu'' - 2\tilde{E}\mu\mu' + \frac{1}{8}v^2 4\mu^3 \mu' + \frac{1}{8}v^4 2\mu\mu' = 0$$

$$\mu'' - 2\tilde{E}\mu + \frac{1}{8}v^2 4\mu^3 + \frac{1}{8}v^4 2\mu = 0$$

$$\mu'' - 2\tilde{E}\mu + \frac{v^2\mu^3}{2} + \frac{v^4\mu}{4} = 0$$

$$\mu'' = 2\tilde{E}\mu - \left(\frac{v^2\mu^3}{2} + \frac{v^4\mu}{4} \right) \quad (46)$$

dengan menyederhanakan persamaan (45) maka

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right\} v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{dv}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) \right\} v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{1}{2} \left(2 \frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \frac{\partial}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right) v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\left(\frac{dv}{dt} \frac{d}{dt} \right) v' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 \frac{dv}{dt} + \frac{1}{8}\mu^4 2v \frac{dv}{dt} = 0$$

$$\frac{dv}{dt} \frac{dv'}{dt} - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 v' + \frac{1}{8}\mu^4 2vv' = 0$$

$$v' \frac{dv'}{dt} - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 v' + \frac{1}{8}\mu^4 2vv' = 0$$

$$v'v'' - 2\tilde{E}vv' + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 v' + \frac{1}{8}\mu^4 2vv' = 0$$

$$v'' - 2\tilde{E}v + \frac{1}{8}\mu^2 4v^3 + \frac{1}{8}\mu^4 2v = 0$$

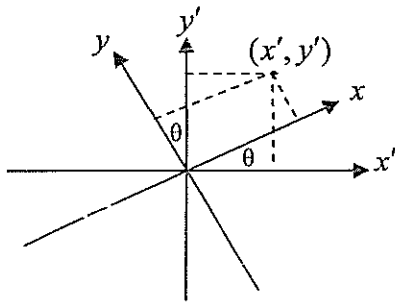
$$v'' - 2\tilde{E}v + \frac{\mu^2 v^3}{2} + \frac{\mu^4 v}{4} = 0$$

$$v'' = 2\tilde{E}v - \left(\frac{\mu^2 v^3}{2} + \frac{\mu^4 v}{4} \right) \quad (47)$$



Lmpiran 6. Operasi Simetri Rotasi terhadap Sumbu z

Hamiltonian persamaan (16) adalah invarian dengan operasi simetri rotasi terhadap sumbu z



Rotasi terhadap Sumbu z

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta, y' = x \sin \theta + y \cos \theta, z' = z, r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \tag{48}$$

setelah dirotasikan terhadap sumbu z maka

$$H(x', y', z') = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla'^2 + \frac{eB}{2\mu c} L_z' + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} \left((x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 \right) - \frac{Ze^2}{\left((x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 + z^2 \right)^{1/2}} \tag{49}$$

dengan menggunakan $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ didapatkan

$$H(x', y', z') = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla'^2 - \frac{eB}{2\mu c} L_z' + \frac{e^2 B^2}{8\mu c^2} (x^2 + y^2) - \frac{Ze^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} = H(x, y, z) \tag{50}$$

jadi

$$H(x, y, z) = H(x', y', z') \tag{51}$$

adalah invarian dengan operasi simetri rotasi terhadap sumbu z sehingga H dapat direpresentasikan dalam bentuk elemen matriks 2×2 .[Stöckmann(1999)]

$$H = \begin{pmatrix} H^{(1)} & 0 \\ 0 & H^{(2)} \end{pmatrix} \tag{52}$$

yang merupakan *Gaussian ensembles* matriks 2×2

Lampiran 7. Penyelesaian Persamaan dengan menggunakan Mathematica 4.0

Solusi Persamaan Diferensial (47) dan (48) dengan menggunakan mathematica 4.0

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5a.

```
solution =  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
     $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652,$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 3}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t], v[t]$ } /. solution],  
  {t, 0, 3}, AxesLabel -> {" $\mu (n\sqrt{a_0})$ ", " $v (n\sqrt{a_0})$ "},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5b.

```
solution =  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
     $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652,$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 5}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t], v[t]$ } /. solution],  
  {t, 0, 5}, AxesLabel -> {" $\mu (n\sqrt{a_0})$ ", " $v (n\sqrt{a_0})$ "},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5c.

```
solution =  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
     $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652,$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 10}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t], v[t]$ } /. solution],  
  {t, 0, 10}, AxesLabel -> {" $\mu (n\sqrt{a_0})$ ", " $v (n\sqrt{a_0})$ "},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5d.

```
solution =  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
     $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652,$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 15}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t], v[t]$ } /. solution],  
  {t, 0, 15}, AxesLabel -> {" $\mu (n\sqrt{a_0})$ ", " $v (n\sqrt{a_0})$ "},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5e.
solution =

```
NDSolve[
  {μ'[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2 / 2 -
    μ[t] v[t]^4 / 4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99988533,
  v'[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
    v[t] μ[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},
  {μ, v}, {t, 0, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
  {t, 0, 20}, AxesLabel -> {"μ (n√a₀)", "v (n√a₀)"},
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5f.
solution =

```
NDSolve[
  {μ'[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2 / 2 -
    μ[t] v[t]^4 / 4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99988533,
  v'[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
    v[t] μ[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},
  {μ, v}, {t, 0, 25}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
  {t, 0, 25}, AxesLabel -> {"μ (n√a₀)", "v (n√a₀)"},
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 5g.
solution =

```
NDSolve[
  {μ'[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2 / 2 -
    μ[t] v[t]^4 / 4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99988533,
  v'[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
    v[t] μ[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},
  {μ, v}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
  {t, 0, 30}, AxesLabel -> {"μ (n√a₀)", "v (n√a₀)"},
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6a.
solution =

```
NDSolve[
  {μ'[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2 / 2 -
    μ[t] v[t]^4 / 4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99988533,
  v'[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
    v[t] μ[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},
  {μ, v}, {t, 0, 3}]
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],
  {t, 0, 3}, AxesLabel -> {"v (n√a₀)", "v' (vₑ)"},
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Hal-Cipta: Penelitian, Pengembangan, dan Inovasi
 1. Dilindungi sebagai hak cipta oleh Departemen Hukum dan Peradilan
 2. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 3. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 4. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 5. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 6. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 7. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 8. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 9. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan
 10. Diperoleh dengan izin dari Departemen Hukum dan Peradilan

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6b.

```
solution=  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] == -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] == -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
       $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 5}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
  {t, 0, 5}, AxesLabel -> {"v (n√a₀)", "v' (vₑ)"},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6c.

```
solution=  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] == -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] == -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
       $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 10}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
  {t, 0, 10}, AxesLabel -> {"v (n√a₀)", "v' (vₑ)"},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6d.

```
solution=  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] == -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] == 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] == -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
       $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 15}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
  {t, 0, 15}, AxesLabel -> {"v (n√a₀)", "v' (vₑ)"},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6e.

```
solution=  
NDSolve[  
  { $\mu''[t] == -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
     $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
     $v''[t] == -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
       $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
  { $\mu, v$ }, {t, 0, 20}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
  {t, 0, 20}, AxesLabel -> {"v (n√a₀)", "v' (vₑ)"},  
  PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output seperti pada gambar 6f.

```
solution =  
NDSolve[  
{ $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
   $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
   $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
   $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 25}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
{t, 0, 25}, AxesLabel -> {"v (n√a0)", "v' (ve)"},  
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk mendapatkan output gambar 6g.

```
solution =  
NDSolve[  
{ $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
   $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99988533,$   
   $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
   $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02141652},$   
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 30}]  
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],  
{t, 0, 30}, AxesLabel -> {"v (n√a0)", "v' (ve)"},  
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7a.

```
solution =  
NDSolve[  
{ $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
   $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99986193,$   
   $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
   $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},$   
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 3}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t]$ ,  $v[t]$ } /. solution],  
{t, 0, 3}, AxesLabel -> {" $\mu$  (n√a0)", "v (n√a0)"},  
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7b.

```
solution =  
NDSolve[  
{ $\mu''[t] = -0.23088432 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$   
   $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99986193,$   
   $v''[t] = -0.23088432 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$   
   $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},$   
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 5}]  
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t]$ ,  $v[t]$ } /. solution],  
{t, 0, 5}, AxesLabel -> {" $\mu$  (n√a0)", "v (n√a0)"},  
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7c.

```
solution =
NDSolve[
{μ''[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
ν''[t] = -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] = 0, ν'[0] = 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 10}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], ν[t]} /. solution],
{t, 0, 10}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "ν (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7d.

```
solution =
NDSolve[
{μ''[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
ν''[t] = -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] = 0, ν'[0] = 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 15}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], ν[t]} /. solution],
{t, 0, 15}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "ν (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7e.

```
solution =
NDSolve[
{μ''[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
ν''[t] = -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] = 0, ν'[0] = 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], ν[t]} /. solution],
{t, 0, 20}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "ν (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 7f.

```
solution =
NDSolve[
{μ''[t] = -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
ν''[t] = -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] = 0, ν'[0] = 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 25}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], ν[t]} /. solution],
{t, 0, 25}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "ν (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```


Input untuk menghasilkan output gambar 7g.

```
solution=
NDSolve[
{μ''[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν''[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], ν[t]} /. solution],
{t, 0, 30}, AxesLabel -> {"μ (n√a₀)", "ν (n√a₀)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8a.

```
solution=
NDSolve[
{μ''[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν''[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 3}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 3}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8b.

```
solution=
NDSolve[
{μ''[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν''[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 5}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 5}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8c

```
solution=
NDSolve[
{μ''[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν''[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 10}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 10}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Halo Guru, Profektor! (tanyain aja) :
 1. Dilihat dari gambar tersebut, apa saja variabel yang ada pada persamaan tersebut dan variabel mana yang
 2. Berapakah hasil dari turunan kedua dari persamaan tersebut? apakah hasil turunan tersebut memiliki arti yang
 3. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 4. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 5. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 6. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 7. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 8. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 9. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?
 10. Bagaimana cara menyelesaikan persamaan tersebut? apakah ada cara lain untuk menyelesaikannya?

Input untuk menghasilkan output gambar 8d.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 15}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 15}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8e.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 20}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8f.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 25}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 25}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 8g.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.23088432 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2/2 -
μ[t] ν[t]^4/4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.23088432 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2/2 -
ν[t] μ[t]^4/4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 30}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9a.

```
solution =
NDSolve[
{μ'[t] = -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2/2 -
μ[t] v[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
v'[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2/2 -
v[t] μ[t]^4/4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},
{μ, v}, {t, 0, 3}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
{t, 0, 3}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "v (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9b.

```
solution =
NDSolve[
{μ'[t] = -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2/2 -
μ[t] v[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
v'[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2/2 -
v[t] μ[t]^4/4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},
{μ, v}, {t, 0, 5}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
{t, 0, 5}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "v (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9c.

```
solution =
NDSolve[
{μ'[t] = -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2/2 -
μ[t] v[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
v'[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2/2 -
v[t] μ[t]^4/4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},
{μ, v}, {t, 0, 10}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
{t, 0, 10}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "v (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9d.

```
solution =
NDSolve[
{μ'[t] = -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 v[t]^2/2 -
μ[t] v[t]^4/4, μ[0] = 0, μ'[0] = 1.99986193,
v'[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 μ[t]^2/2 -
v[t] μ[t]^4/4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},
{μ, v}, {t, 0, 15}]
ParametricPlot[Evaluate[{μ[t], v[t]} /. solution],
{t, 0, 15}, AxesLabel -> {"μ (n√a0)", "v (n√a0)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Halo Gae, Pleasure! Unsur-unsurng
 1. Dilihat ang gndu sebagai data silindri sebagai per representasi dan simpul dan nomor
 4. Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian kualitatif, penelitian kuantitatif, penelitian campuran, penelitian kuantitatif kualitatif, penelitian kualitatif kuantitatif
 5. Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian kuantitatif, penelitian kualitatif, penelitian campuran, penelitian kuantitatif kualitatif, penelitian kualitatif kuantitatif
 6. Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian kuantitatif, penelitian kualitatif, penelitian campuran, penelitian kuantitatif kualitatif, penelitian kualitatif kuantitatif
 7. Penelitian yang akan dilakukan adalah penelitian kuantitatif, penelitian kualitatif, penelitian campuran, penelitian kuantitatif kualitatif, penelitian kualitatif kuantitatif

Input untuk menghasilkan output gambar 9e.

```
solution =
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4$ ,  $\mu[0] = 0$ ,  $\mu'[0] = 1.99986193$ ,
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4$ ,  $v[0] = 0$ ,  $v'[0] = 0.02350032$ },
{ $\mu$ ,  $v$ }, {t, 0, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t]$ ,  $v[t]$ } /. solution],
{t, 0, 20}, AxesLabel -> {" $\mu$  ( $n\sqrt{a_0}$ )", " $v$  ( $n\sqrt{a_0}$ )"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9f.

```
solution =
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4$ ,  $\mu[0] = 0$ ,  $\mu'[0] = 1.99986193$ ,
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4$ ,  $v[0] = 0$ ,  $v'[0] = 0.02350032$ },
{ $\mu$ ,  $v$ }, {t, 0, 25}]
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t]$ ,  $v[t]$ } /. solution],
{t, 0, 25}, AxesLabel -> {" $\mu$  ( $n\sqrt{a_0}$ )", " $v$  ( $n\sqrt{a_0}$ )"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 9g.

```
solution =
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4$ ,  $\mu[0] = 0$ ,  $\mu'[0] = 1.99986193$ ,
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4$ ,  $v[0] = 0$ ,  $v'[0] = 0.02350032$ },
{ $\mu$ ,  $v$ }, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{ $\mu[t]$ ,  $v[t]$ } /. solution],
{t, 0, 30}, AxesLabel -> {" $\mu$  ( $n\sqrt{a_0}$ )", " $v$  ( $n\sqrt{a_0}$ )"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 10a.

```
solution =
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4$ ,  $\mu[0] = 0$ ,  $\mu'[0] = 1.99986193$ ,
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4$ ,  $v[0] = 0$ ,  $v'[0] = 0.02350032$ },
{ $\mu$ ,  $v$ }, {t, 0, 3}]
ParametricPlot[Evaluate[{ $v[t]$ ,  $v'[t]$ } /. solution],
{t, 0, 3}, AxesLabel -> {" $v$  ( $n\sqrt{a_0}$ )", " $v'$  ( $v_e$ )"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Halo Cipta! Penerbit: Universitas Indonesia
 1. Dilindungi Undang-Undang Hak Cipta
 2. Pengutipan harus menyebutkan sumbernya
 3. Pengutipan tidak boleh merugikan kepentingan yang wajar IPB University
 4. Dilarang memperjualbelikan dan memperbanyak cetakan
 5. Dilarang menggunakan dan memperbanyak cetakan
 6. Dilarang menggunakan dan memperbanyak cetakan

Input untuk menghasilkan output gambar 10b.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2 / 2 -
μ[t] ν[t]^4 / 4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.63470690 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
ν[t] μ[t]^4 / 4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 5}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 5}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 10c.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2 / 2 -
μ[t] ν[t]^4 / 4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.63470690 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
ν[t] μ[t]^4 / 4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 10}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 10}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 10d.

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2 / 2 -
μ[t] ν[t]^4 / 4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.63470690 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
ν[t] μ[t]^4 / 4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 15}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 15}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 10e

```
solution=
NDSolve[
{μ'[t] == -0.63470690 μ[t] - μ[t]^3 ν[t]^2 / 2 -
μ[t] ν[t]^4 / 4, μ[0] == 0, μ'[0] == 1.99986193,
ν'[t] == -0.63470690 ν[t] - ν[t]^3 μ[t]^2 / 2 -
ν[t] μ[t]^4 / 4, ν[0] == 0, ν'[0] == 0.02350032},
{μ, ν}, {t, 0, 20}]
ParametricPlot[Evaluate[{ν[t], ν'[t]} /. solution],
{t, 0, 20}, AxesLabel -> {"ν (n√a₀)", "ν' (vₑ)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```


Input untuk menghasilkan output gambar 10f.

```
solution=
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99986193,$ 
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},$ 
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 25}]
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],
{t, 0, 25}, AxesLabel -> {"v (n $\sqrt{a_0}$ )", "v' (v_e)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Input untuk menghasilkan output gambar 10g.

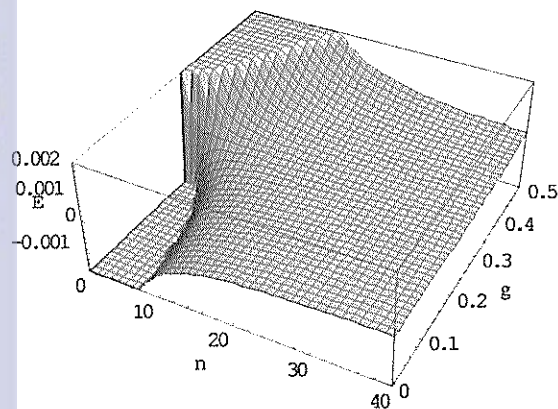
```
solution=
NDSolve[
{ $\mu''[t] = -0.63470690 \mu[t] - \mu[t]^3 v[t]^2 / 2 -$ 
 $\mu[t] v[t]^4 / 4, \mu[0] = 0, \mu'[0] = 1.99986193,$ 
 $v''[t] = -0.63470690 v[t] - v[t]^3 \mu[t]^2 / 2 -$ 
 $v[t] \mu[t]^4 / 4, v[0] = 0, v'[0] = 0.02350032},$ 
{ $\mu, v$ }, {t, 0, 30}]
ParametricPlot[Evaluate[{v[t], v'[t]} /. solution],
{t, 0, 30}, AxesLabel -> {"v (n $\sqrt{a_0}$ )", "v' (v_e)"},
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All];
```

Has Cera, Pionirnya, Unsur-unsurnya
 1. Diambil sebagai bagian dari sejarah bangsa ini sebagai simbol kemajuan dan peradaban bangsa
 2. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian, penelitian, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 3. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 4. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 5. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 6. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 7. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 8. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 9. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih
 10. Penelitian yang akan menghasilkan penelitian yang lebih, penelitian yang lebih, penelitian yang lebih

Lampiran 8. Plot Nilai Eigen dan Scaled Energy

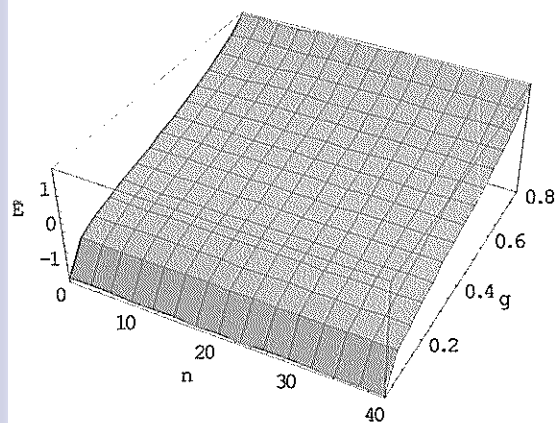
Plot nilai eigen dengan menggunakan *mathematica 4.0*

```
Plot3D[
  ((n+0.5) (3g+1)^0.5 + (n+0.5) (1-g)^0.5 - 2n-1) (2n+1)^-3
  / (1-g)^2
  + ((3g-1) (2n+1)^-2) / (2 (1-g)^2), {n, 0, 40}, {g, 0, 0.5},
  PlotPoints -> 40, AxesLabel -> {"n", "g", "E"}];
```



Plot *scaled energy* dengan menggunakan *mathematica 4.0*

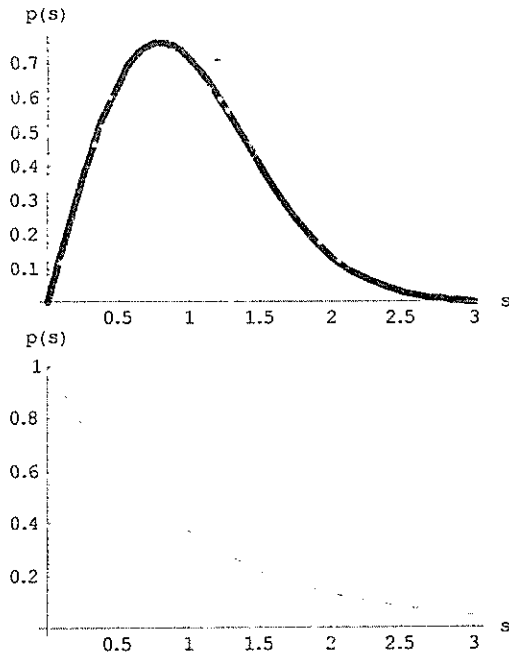
```
Plot3D[
  ( 1 / (1-g)^2 * ((n+0.5) (3g+1)^0.5 + (n+0.5) (1-g)^0.5 - 2n-1)
  * (2n+1)^-3 + ((2n+1)^-2 (3g-1)) / (2 (1-g)^2) ) * ( 2g^0.5 (1-g)^-2 / (2n+1)^3 )^-2/3,
  {n, 0, 40}, {g, 0.01, 0.8}, AxesLabel -> {"n", "g", "E"}];
```

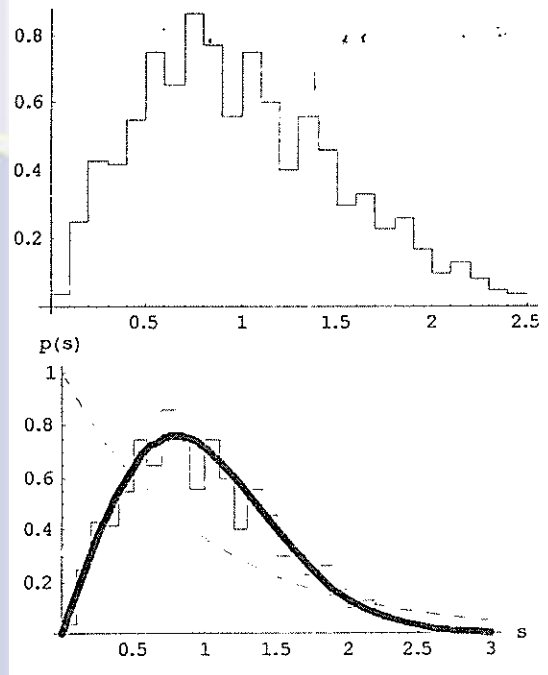


Lampiran 9. Plot Probabilitas Level Energi

Input dan Output gambar 11

```
plot1 = Plot[s  $\pi$  Exp[- $\pi s^2 / 4$ ] / 2, {s, 0, 3},  
  PlotStyle -> {Thickness[0.02]}, AxesLabel -> {"s", "p(s)"}]  
plot2 = Plot[Exp[-s], {s, 0, 3},  
  PlotStyle -> {Dashing[{0.03}]}, AxesLabel -> {"s", "p(s)"}]  
plot3 =  
  ListPlot[{{0, 0.04}, {0.1, 0.04}, {0.1, 0.25},  
    {0.2, 0.25}, {0.2, 0.43}, {0.3, 0.43}, {0.3, 0.42},  
    {0.4, 0.42}, {0.4, 0.55}, {0.5, 0.55}, {0.5, 0.75},  
    {0.6, 0.75}, {0.6, 0.65}, {0.7, 0.65}, {0.7, 0.86},  
    {0.8, 0.86}, {0.8, 0.77}, {0.9, 0.77}, {0.9, 0.56},  
    {1, 0.56}, {1, 0.75}, {1.1, 0.75}, {1.1, 0.6},  
    {1.2, 0.6}, {1.2, 0.4}, {1.3, 0.4}, {1.3, 0.55},  
    {1.4, 0.56}, {1.4, 0.46}, {1.5, 0.46}, {1.5, 0.3},  
    {1.6, 0.3}, {1.6, 0.33}, {1.7, 0.33}, {1.7, 0.23},  
    {1.8, 0.23}, {1.8, 0.26}, {1.9, 0.26}, {1.9, 0.17},  
    {2, 0.17}, {2, 0.1}, {2.1, 0.1}, {2.1, 0.13},  
    {2.2, 0.13}, {2.2, 0.08}, {2.3, 0.08}, {2.3, 0.05},  
    {2.4, 0.05}, {2.4, 0.04}, {2.5, 0.04}},  
  PlotJoined -> True]  
Show[plot1, plot2, plot3];
```





Nilai Cipta (Innovation) Universitas

1. Dilakukan berbagai kegiatan atau aktivitas yang bertujuan meningkatkan dan meningkatkan sumber
4. Penguasaan tingkat atau kemampuan sendiri atau orang lain, termasuk karya ilmiah, teknologi dan/atau seni yang merupakan hasil penelitian
5. Pengabdian masyarakat yang dilakukan yang meliputi IPB University
2. Dilakukan pengembangan dan pemanfaatan teknologi atau informasi yang dilakukan dengan tujuan meningkatkan IPB University