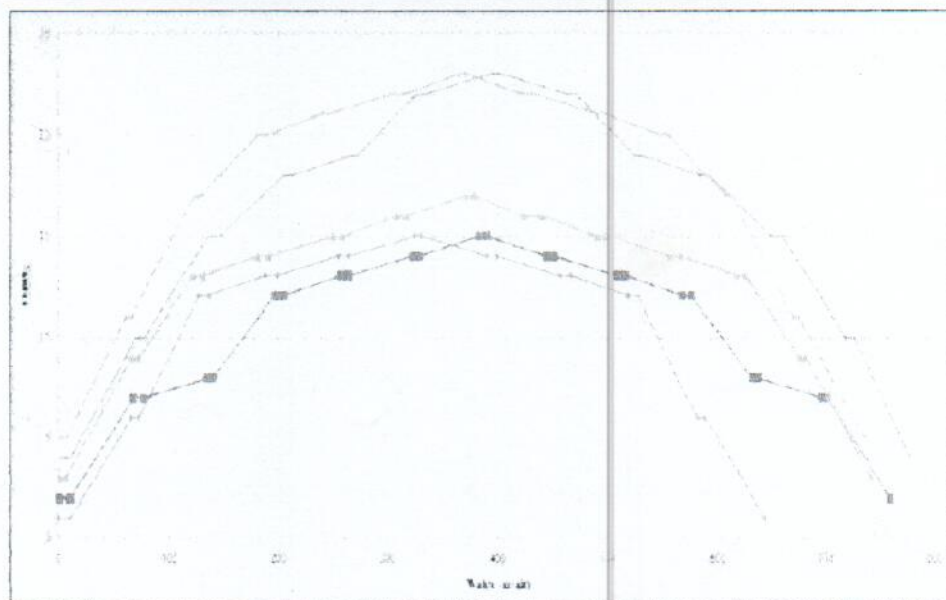


Volume 10, No. 2  
Desember 2011



Alamat Redaksi :  
Departemen Matematika  
FMIPA –Institut Pertanian Bogor  
Jln. Meranti, Kampus IPB  
Dramaga - Bogor

Phone/Fax:(0251) 8625276  
E-mail: math@ipb.ac.id



<i>Analisis Risiko Operasional Menggunakan Pendekatan Distribusi Kerugian dengan Metode Agregat</i> Arbi, Y., R. Budiarti, dan I.G.P. Purnaba	1
<i>Penyelesaian Masalah Daur Ulang Nutrisi dengan Menggunakan Metode Perturbasi Homotopi</i> Ain, N., Jaharuddin, dan A. Kusnanto	11
<i>Penjadwalan Kereta pada Jalur Ganda Secara Periodik dengan Biaya Minimum</i> Hidayatsyah, M.R., F. Hanum, dan P.T. Supriyo	19
<i>Penyelesaian Open Vehicle Routing Problem Menggunakan Metode Heuristik Sariklis-Powel</i> Indaka, A., Siswandi, dan F. Hanum	31
<i>Pemodelan Hidden Markov untuk Transaksi Pelanggan</i> Munawwar, D. A., B. Setiawaty, dan N.K.K. Ardhana	41

---

Journal of Mathematics and Its Applications

**JMA**

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

---

**PIMPINAN REDAKSI**

Dr. Jaharuddin, MS.

**EDITOR**

Dr. Ir. Sri Nurdianti, MSc.

Dr. Ir. Hadi Sumarno, MS.

Dr. Ir. I Wayan Mangku, MSc.

Dr. Ir. Endar H. Nugrahani, MS.

Dr. Paian Sianturi

**ALAMAT REDAKSI:**

Departemen Matematika

FMIPA – Institut Pertanian Bogor

Jln. Meranti, Kampus IPB Dramaga

Bogor

Phone./Fax: (0251) 8625276

Email:math@ipb.ac.id

**JMA** merupakan media yang memuat informasi hasil penelitian matematika baik murni maupun terapan, bagi para matematikawan atau para pengguna matematika. **JMA** diterbitkan dua kali (dua nomor) setiap tahun (periode Juli dan Desember).

Harga langganan per volume, termasuk biaya pos, Vol.9, No.1 dan 2:

Institusi/Perpustakaan Rp. 350.000,- (dalam IPB), Rp. 500.000,- (luar IPB)

Staf/Perorangan Rp. 200.000,- (dalam IPB), Rp.250.000,- (luar IPB)

Mahasiswa Rp. 75.000,-

Penulis makalah yang diterima dikenai biaya administrasi Rp.25.000,- per lembar

Semua pembayaran biaya dapat ditransfer melalui:

**Retno Budiarti**  
**BNI Cabang Bogor**  
**No. Rek. 000291007-5**

---

Journal of Mathematics and Its Applications

**JMA**

Jurnal Matematika dan Aplikasinya

---

DAFTAR ISI

<i>Analisis Risiko Operasional Menggunakan Pendekatan Distribusi Kerugian dengan Metode Agregat</i> Arbi, Y., R. Budiarti, dan I.G.P. Purnaba	1
<i>Penyelesaian Masalah Daur Ulang Nutrisi dengan Menggunakan Metode Perturbasi Homotopi</i> Ain, N., Jaharuddin, dan A. Kusnanto	11
<i>Penjadwalan Kereta pada Jalur Ganda Secara Periodik dengan Biaya Minimum</i> Hidayatsyah, M.R., F. Hanum, dan P.T. Supriyo	19
<i>Penyelesaian Open Vehicle Routing Problem Menggunakan Metode Heuristik Sariklis-Powel</i> Indaka, A., Siswandi, dan F. Hanum	31
<i>Pemodelan Hidden Markov untuk Transaksi Pelanggan</i> Munawwar, D.A., B. Setiawaty, dan N.K.K. Ardana	41

# PENJADWALAN KERETA PADA JALUR GANDA SECARA PERIODIK DENGAN BIAYA MINIMUM

HIDAYATSYAH, M.R.<sup>1)</sup>, F. HANUM<sup>2)</sup>, DAN P.T. SUPRIYO<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup>Mahasiswa Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

<sup>2)</sup>Departemen Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Institut Pertanian Bogor  
Jl Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680, Indonesia

**Abstrak** : Kereta merupakan alat transportasi massal yang banyak digunakan oleh masyarakat. Agar kebutuhan akan alat transportasi tersebut terpenuhi, dibutuhkan penjadwalan yang baik. Model penjadwalan kereta yang akan dibahas dalam karya ilmiah ini ialah MCSP (*minimum cost scheduling problem*) yaitu sebuah model penjadwalan kereta yang meminimumkan biaya operasional yang diformulasikan sebagai *integer programming*. MCSP memiliki dua bagian yaitu MCTP (*minimum cost train problem*) pada bagian pertama dan masalah penjadwalan pada bagian kedua. Pada bagian pertama, dilakukan pemilihan kereta yang tepat untuk rute tertentu dengan biaya minimum, sedangkan pada bagian kedua dilakukan penjadwalan berdasarkan kereta yang terpilih. Penjadwalan kereta dilakukan hanya untuk satu periode waktu dan secara periodik berlaku pula untuk periode waktu lainnya. Model ini diselesaikan menggunakan LINGO 11.0 dan hasil yang diperoleh berupa jadwal perjalanan kereta yang terpilih pada jalur tertentu dengan biaya operasional minimum.

**Kata kunci**: penjadwalan kereta, periodik, *integer linear programming*

## 1. PENDAHULUAN

Kereta merupakan salah satu alat transportasi darat yang diminati oleh banyak orang. Karena pemakai alat transportasi ini banyak sekali, maka dibutuhkan pengaturan yang baik dalam penjadwalan kereta. Penjadwalan yang baik ini dibutuhkan agar dapat

memindahkan setiap orang yang memakai kereta dari suatu tempat ke tempat tujuan dengan efektif dan biaya operasional yang optimal dengan sumber daya yang terbatas.

Model penjadwalan yang dibuat harus dapat disesuaikan dengan rute yang ada dan jenis kereta yang akan dipakai. Setiap jenis kereta tentunya memiliki karakteristik dan biaya operasional yang berbeda-beda. Rute yang ada tentunya juga memiliki karakteristik tersendiri seperti panjang rute dan jalur tunggal atau jalur ganda. Penjadwalan kereta pada karya ilmiah ini adalah penjadwalan yang berlaku secara periodik pada jalur ganda. Masalah penjadwalan kereta secara periodik diperkenalkan dalam (Serafini & Ukovich 1989) yang dikenal dengan *periodical event scheduling problem* (PESP). Masalah PESP merupakan masalah NP-hard (Serafini & Ukovich 1989) sehingga tidak mudah diselesaikan. Terdapat beberapa metode untuk menyelesaikan masalah penjadwalan periodik, antara lain dengan algoritme aproksimasi 9/8 yang menggunakan sifat barisan Fibonacci (Bar-Noy *et al.* 2002), algoritme heuristik SIRALINA (Deschinkel & Touati 2008), algoritme heuristik berbasis *linear programming* dan *local search* serta karakteristik kereta (Salido & Barber 2009), algoritme *greedy* beriterasi (Yuan *et al.* 2009) dan lain-lain.

Pada tulisan ini akan dibahas salah satu model penjadwalan kereta pada jalur ganda secara periodik dengan biaya yang minimum. Model yang dimaksud ialah MCSP (*minimum cost scheduling problem*) yang dimodifikasi dari model yang dibuat oleh Lindner dan Zimmermann (2005). Modifikasi dilakukan pada kendala dengan menambahkan variabel biner sebagai penanda suatu *edge* dilewati oleh rute dan arah tertentu. Penyelesaian model dibagi menjadi dua bagian yaitu penyelesaian MCTP (*minimum cost train problem*) dan penjadwalan kereta. Pada tahap pertama akan ditentukan jenis kereta yang tepat pada setiap rute kereta yang ada dengan biaya yang minimum dan memenuhi kendala yang ada, sedangkan pada tahap kedua dibuat penjadwalan kereta yang telah dipilih menggunakan konsep JSP (*job shop scheduling problem*).

## 2 PEMODELAN

**2.1 Deskripsi Masalah:** Rute kereta api yang membentuk *network* terdiri atas stasiun dan jalur yang menghubungkan stasiun-stasiun. Rute kereta tersebut memiliki dua jalur yang arah perjalanannya saling berlawanan atau disebut juga dengan jalur ganda. Setiap stasiun memiliki kapasitas calon penumpang yang berbeda-beda pada periode waktu tertentu. Sejumlah kereta akan dioperasikan dengan selisih waktu keberangkatan yang sama antarkereta pada stasiun awal untuk setiap rute pada *network* tersebut. Setiap kereta yang dioperasikan memulai perjalanan dari stasiun awal dan kembali ke stasiun awal lagi setelah melewati setiap stasiun secara berurutan.

Kereta yang akan digunakan pada *network* memiliki biaya operasional yang bergantung pada kereta yang ditugaskan pada rute tertentu. Kereta api yang dioperasikan dibagi menjadi berbagai tipe. Pembagian tipe kereta didasarkan pada biaya operasional, kapasitas gerbong, batas banyaknya gerbong, dan kecepatan kereta. Biaya operasional suatu kereta terdiri atas biaya tetap dan biaya taktetap. Biaya tetap adalah biaya untuk perawatan mesin kereta, sedangkan biaya taktetap adalah biaya untuk penggunaan bahan bakar yang bergantung pada jarak yang ditempuh. Biaya operasional setiap tipe kereta dapat berbeda.

Masalah yang dihadapi adalah menentukan tipe dan banyaknya kereta yang dioperasikan pada setiap rute dengan biaya operasional yang minimum dan

mempertimbangkan kapasitas setiap stasiun dan setiap rute agar calon penumpang dapat dibawa seluruhnya.

**2.2 Model MCSP (minimum cost scheduling problem):** Lindner dan Zimmermann (2005) mengemukakan sebuah model yang dapat menyelesaikan masalah penjadwalan kereta pada periode waktu tertentu atau secara periodik yaitu model MCSP. Pada model MCSP, rute didefinisikan sebagai kumpulan stasiun serta jalur yang menghubungkan stasiun-stasiun tersebut mulai dari stasiun awal sampai stasiun akhir dan sebaliknya. Jalur yang menghubungkan satu stasiun dengan stasiun lain disebut sebagai *edge*. Misalkan,

- $\mathcal{T}$  : himpunan tipe kereta yang dapat ditugaskan pada rute  $r$ ,
- $W_{\min}$  : jumlah minimum gerbong kereta,
- $W_{\max}$  : jumlah maksimum gerbong kereta,
- $\mathcal{R}$  : himpunan rute kereta,
- $c$  : banyaknya gerbong dalam satu rangkaian kereta,  
 $W_{\min} \leq c \leq W_{\max}$

Variabel Keputusan

$$\omega_{r,\ell,c} = \begin{cases} 1, & \text{jika kereta tipe } \ell \in \mathcal{T}_r \text{ dengan banyaknya gerbong } c \text{ dijalankan pada rute} \\ & r \in \mathcal{R}, \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

$a_{r,\mu}^v$  : waktu kedatangan satu kereta di rute  $r$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v$ ,

$d_{r,\mu}^v$  : waktu keberangkatan satu kereta di rute  $r$  dengan arah  $\mu$  dari stasiun  $v$ ,

dengan

$$\mu = \begin{cases} 1, & \text{jika arah kereta menjauhi stasiun awal} \\ 2, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Fungsi Objektif

$$\min \sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{T}_r} \sum_{c=W_{\min}}^{W_{\max}} [\hat{t}_{r,\ell} / P] \cdot (C_{\ell}^{\text{fix}} + c \cdot C_{\ell}^{\text{fixG}}) \cdot \omega_{r,\ell,c} + d_r \cdot (C_{\ell}^{\text{km}} + c \cdot C_{\ell}^{\text{kmG}}) \omega_{r,\ell,c} \quad (1)$$

dengan

$\hat{t}_{r,\ell}$  : waktu putaran dugaan (waktu kereta dari stasiun awal ke stasiun akhir dan kembali ke stasiun awal),

$P$  : selisih waktu keberangkatan antarkereta pada stasiun awal,

$C_{\ell}^{\text{fix}}$  : biaya tetap untuk 1 mesin kereta tipe  $\ell$ ,

$C_{\ell}^{\text{fixG}}$  : biaya tetap untuk 1gerbong tipe  $\ell$ ,

$C_{\ell}^{\text{km}}$  : biaya per km untuk 1 mesin kereta tipe  $\ell$ ,

$C_{\ell}^{\text{kmG}}$  : biaya per km untuk 1gerbong tipe  $\ell$ ,

$d_r$  : panjang rute  $r$ .

Fungsi objektif (1) pada model bertujuan meminimumkan biaya operasional kereta pada semua rute. Bagian pertama fungsi objektif merupakan penghitungan biaya tetap. Bagian pertama ini diperoleh dengan cara mengalikan banyaknya kereta yang dioperasikan dengan penjumlahan antara biaya tetap mesin kereta dan biaya tetap sejumlah gerbong pada kereta yang dipilih. Banyaknya kereta tipe  $\ell$  yang dioperasikan pada rute  $r$  dinotasikan oleh  $[i_{r,\ell}/P]$ . Waktu putaran dugaan didapatkan dengan cara menjumlahkan setiap waktu tunggu kereta dan waktu perjalanan kereta antarstasiun dari stasiun awal hingga kembali ke stasiun awal lagi. Bagian kedua fungsi objektif merupakan penghitungan biaya taktetap. Bagian kedua ini diperoleh dengan cara mengalikan panjang rute yang dilalui kereta yang dioperasikan dengan penjumlahan biaya taktetap mesin kereta tiap kilometer dengan biaya taktetap sejumlah gerbong pada kereta yang dipilih tiap kilometer.

Kendala-kendala

- Kapasitas kereta

Kapasitas satu tipe kereta adalah kapasitas satu gerbong dikalikan dengan banyaknya gerbong. Penjumlahan dari semua kapasitas tipe kereta yang beroperasi pada *edge* tertentu tidak kurang dari banyaknya penumpang pada *edge* tersebut.

$$\sum_{r \in \mathcal{R}} \sum_{\ell \in \mathcal{T}_r} \sum_{c=W_{\min}}^{W_{\max}} K_{\ell} \cdot c \cdot \omega_{r,\ell,c} \cdot x_{r,\ell,\mu} \geq N_{r,e,\mu} \quad (2)$$

dengan

$K_{\ell}$  : kapasitas 1 gerbong kereta tipe  $\ell$ ,

$N_{r,e,\mu}$  : banyaknya penumpang pada *edge*  $e$  di rute  $r$  dengan arah  $\mu$ ,

$$x_{r,\ell,\mu} = \begin{cases} 1, & \text{jika } \textit{edge} \ e \text{ dilewati oleh rute } r \text{ dengan arah } \mu \\ 0, & \text{selainnya} \end{cases}$$

Pada kendala ini dipastikan seluruh penumpang dapat diangkut dengan kereta yang dioperasikan.

- Tipe kereta yang dioperasikan.

Hanya ada satu tipe kereta yang dioperasikan pada rute tertentu.

$$\sum_{\ell \in \mathcal{T}_r} \sum_{c=W_{\min}}^{W_{\max}} \omega_{r,\ell,c} = 1 \quad (3)$$

untuk setiap  $r \in \mathcal{R}$ .

- Kendala waktu kedatangan dan waktu keberangkatan.

$$\sum_{\ell \in \mathcal{T}_r} \sum_{c=W_{\min}}^{W_{\max}} \underline{\Delta}_{\ell}^{v'} \cdot \omega_{r,\ell,c} \leq a_{r,\mu}^v - d_{r,\mu}^v \leq \sum_{\ell \in \mathcal{T}_r} \sum_{c=W_{\min}}^{W_{\max}} \bar{\Delta}_{\ell}^{v'} \cdot \omega_{r,\ell,c} \quad (4)$$

dengan

$\underline{\Delta}_{\ell}^{v'}$  : waktu tempuh minimum kereta tipe  $\ell$  dari stasiun  $v$  ke stasiun berikutnya  $v'$ , dengan  $(v, v') \in r$ ,

$\bar{\Delta}_{\ell}^{v'}$  : waktu tempuh maksimum kereta tipe  $\ell$  dari stasiun  $v$  ke stasiun berikutnya  $v'$ , dengan  $(v, v') \in r$ ,

$a_{r,\mu}^v$  merupakan bilangan real, untuk setiap  $r \in \mathcal{R}$ ,

$d_{r,\mu}^v$  merupakan bilangan real, untuk setiap  $r \in \mathcal{R}$ .

Kedala (4) memastikan selisih antara waktu keberangkatan kereta pada suatu stasiun dengan waktu kedatangan kereta pada suatu stasiun tepat setelahnya berada pada waktu perjalanan minimum dan maksimum kereta antarstasiun tersebut.

**2.3 Penjadwalan:** Penjadwalan kereta pada karya ilmiah ini mengikuti konsep dasar JSP (*job shop scheduling problem*). Penjadwalan kereta dibuat dengan 2 tahap. Tahap pertama adalah pembuatan jadwal tanpa penundaan waktu kedatangan dan waktu keberangkatan kemudian tahap kedua adalah pembuatan jadwal dengan penundaan waktu kedatangan dan waktu keberangkatan untuk menghindari tabrakan antarkereta. Misalkan,

$\hat{a}_{r,\mu}^v$  : waktu kedatangan kereta rute  $r$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v$  sebelum ada penundaan,

$\hat{d}_{r,\mu}^v$  : waktu keberangkatan kereta rute  $r$  dengan arah  $\mu$  dari stasiun  $v$  sebelum ada penundaan,

$\hat{a}_{r,\mu}^{v'}$  : waktu kedatangan kereta rute  $r$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v'$  sebelum ada penundaan,

$\hat{d}_{r,\mu}^{v'}$  : waktu keberangkatan kereta rute  $r$  dengan arah  $\mu$  dari stasiun  $v'$  sebelum ada penundaan,

$$\hat{a}_{r,\mu}^{v'} = \hat{a}_{r,\mu}^v + \Delta_\ell^{vv'}, \quad (5)$$

$$\hat{d}_{r,\mu}^{v'} = \hat{d}_{r,\mu}^v + \nabla_\ell^v, \quad (6)$$

dengan stasiun  $v'$  berada tepat setelah stasiun  $v$ ,

$\Delta_\ell^{vv'}$  : waktu tempuh kereta tipe  $\ell$  dari stasiun  $v$  ke stasiun berikutnya  $v'$ ,

$\nabla_\ell^v$  : waktu tunggu/berhenti kereta tipe  $\ell$  di stasiun  $v$ .

Persamaan (5) dan (6) digunakan untuk menghitung waktu kedatangan dan waktu keberangkatan kereta pada suatu stasiun pada penjadwalan kereta tahap pertama. Pada persamaan (5), waktu kedatangan kereta pada suatu stasiun tertentu dan rute tertentu sama dengan waktu keberangkatan kereta pada stasiun tepat sebelumnya di rute yang sama ditambah waktu tempuh antara dua stasiun tersebut. Pada persamaan (6), waktu keberangkatan kereta pada suatu stasiun tertentu dan rute tertentu sama dengan waktu kedatangan kereta pada stasiun tersebut ditambah waktu berhenti kereta pada stasiun tersebut.

Pada tahap kedua penjadwalan kereta, dibuat jadwal dengan penundaan waktu kedatangan dan waktu keberangkatan kereta di tahap pertama. Proses ini dilakukan untuk setiap *edge* yang dilalui oleh lebih dari satu rute. Misalkan

$r_a, r_b$  : rute yang melalui *edge*  $e$ , dengan  $r_a \neq r_b$ ,

$\hat{a}_{r_a,\mu}^{v'}$  : waktu kedatangan satu kereta rute  $r_a$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v'$  sebelum ada penundaan,

$\hat{d}_{r_a,\mu}^v$  : waktu keberangkatan satu kereta rute  $r_a$  dengan arah  $\mu$  dari stasiun  $v$  sebelum ada penundaan,



$\hat{a}_{r_b, \mu}^{v'}$  : waktu kedatangan satu kereta rute  $r_b$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v'$  sebelum ada penundaan,

$\hat{d}_{r_b, \mu}^{v'}$  : waktu keberangkatan satu kereta rute  $r_b$  dengan arah  $\mu$  dari stasiun  $v$  sebelum ada penundaan,

dengan  $r_a, r_b \in \mathfrak{R}$ .

Pada tahap penjadwalan kereta ini, untuk setiap *edge* yang berada di dua rute kereta yang berbeda diperiksa kondisi berikut. Jika

$$\hat{a}_{r_a, \mu}^{v'} > \hat{a}_{r_b, \mu}^{v'} \quad \text{dan} \quad \hat{d}_{r_a, \mu}^{v'} < \hat{d}_{r_b, \mu}^{v'} \quad (7)$$

dilakukan penjadwalan kembali.

Pertaksamaan (7) adalah kondisi tabrakan kereta di suatu *edge* yang berada di dua rute yang berbeda pada arah yang sama. Hal ini dapat dilihat dari waktu kedatangan satu kereta rute  $r_a$  dengan arah  $\mu$  di stasiun  $v'$  lebih dari waktu kedatangan satu kereta rute  $r_b$  sedangkan untuk waktu keberangkatan terjadi sebaliknya. Asumsinya adalah kereta tidak mengalami perubahan kecepatan pada *edge* tersebut, tetapi kecepatannya dapat berbeda antara satu *edge* dengan *edge* yang lain. Jadi kereta yang berada di rute  $r_b$  harus mendahului kereta di rute  $r_a$ , sedangkan jalur kereta yang dilalui hanya dapat dilewati oleh satu kereta. Penjadwalan kembali dilakukan dengan model penjadwalan baru, yaitu:

Fungsi objektif

$$\min \{ dd_{r_a, \mu}^{v'} (d_{r_b, \mu}^{v'} - d_{r_a, \mu}^{v'}) + da_{r_b, \mu}^{v'} (a_{r_a, \mu}^{v'} - a_{r_b, \mu}^{v'}) \} \quad (8)$$

dengan kendala

$$dd_{r_a, \mu}^{v'} + da_{r_b, \mu}^{v'} = 1 \quad (9)$$

Variabel keputusan

$$dd_{r_a, \mu}^{v'} = \begin{cases} 1, & \text{jika terjadi penundaan waktu keberangkatan kereta di stasiun } v \text{ rute } r \\ & \text{dengan arah } \mu \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

$$da_{r_b, \mu}^{v'} = \begin{cases} 1, & \text{jika terjadi penundaan waktu kedatangan kereta di stasiun } v' \text{ rute } r \\ & \text{dengan arah } \mu. \\ 0, & \text{selainnya.} \end{cases}$$

Fungsi objektif (8) bertujuan meminimumkan jeda waktu antarwaktu keberangkatan kereta pada suatu stasiun ditambah jeda antarwaktu kedatangan kereta di stasiun tepat setelahnya. Kendala (9) memastikan tepat satu penundaan yang terjadi pada *edge* tersebut, yaitu penundaan keberangkatan kereta pada rute tertentu di suatu stasiun atau penundaan waktu tiba kereta pada rute lainnya di stasiun tepat setelahnya. Setelah masalah dengan fungsi objektif (8) dan kendala (9) terselesaikan, dilakukan langkah berikutnya yaitu memeriksa apakah solusi memenuhi persamaan (10), (11), (12), dan (13).

$$d_{r_a, \mu}^v = dd_{r_a, \mu}^v (\hat{d}_{r_b, \mu}^v - \hat{d}_{r_a, \mu}^v) + \hat{d}_{r_a, \mu}^v, \quad (10)$$

$$d_{r_b, \mu}^v = \hat{d}_{r_b, \mu}^v, \quad (11)$$

$$a_{r_a, \mu}^{v'} = \hat{a}_{r_a, \mu}^{v'}, \quad (12)$$

$$a_{r_b, \mu}^{v'} = da_{r_b, \mu}^{v'} (\hat{a}_{r_a, \mu}^{v'} - \hat{a}_{r_b, \mu}^{v'}) + \hat{a}_{r_b, \mu}^{v'}. \quad (13)$$

Persamaan (10), (11), (12), dan (13) digunakan untuk menghitung waktu keberangkatan dan waktu tiba kereta pada suatu stasiun dan stasiun tepat setelahnya. Jika kondisi pertaksamaan (7) tidak terpenuhi untuk suatu *edge* maka

$$d_{r_a, \mu}^v = \hat{d}_{r_a, \mu}^v, \quad (14)$$

$$a_{r_a, \mu}^{v'} = \hat{a}_{r_a, \mu}^{v'}, \quad (15)$$

$$d_{r_b, \mu}^v = \hat{d}_{r_b, \mu}^v, \quad (16)$$

$$a_{r_b, \mu}^{v'} = \hat{a}_{r_b, \mu}^{v'}. \quad (17)$$

Persamaan (14), (15), (16), dan (17) memastikan tidak ada perubahan waktu keberangkatan di stasiun tertentu dan waktu kedatangan di stasiun tepat setelahnya jika tidak terjadi tabrakan di *edge* tersebut.

**2.4 Metode Penyelesaian:** Masalah pada karya ilmiah ini adalah memilih tipe kereta yang tepat agar dapat membawa semua penumpang dengan biaya yang minimum serta menjadwalkan waktu kedatangan dan keberangkatan kereta di setiap stasiun atau disebut juga MCSP (*minimum cost scheduling problem*). Penyelesaian MCSP ini dilakukan dengan 4 langkah. Langkah-langkahnya sebagai berikut.

- 1) Penyelesaian MCTP (*Minimum Cost Train Problem*), yaitu pemrograman linear dengan fungsi objektif (1), terhadap kendala (2) dan (3), akan dihasilkan beberapa rute kereta.
- 2) Penjadwalan kereta untuk setiap rute:
  - a) Penjadwalan tahap I, yaitu penjadwalan tanpa penundaan, diperoleh dari persamaan (5) dan (6),
  - b) Penjadwalan tahap II, yaitu perbaikan jadwal dengan menunda waktu tiba atau waktu keberangkatan, dengan memeriksa kondisi tabrakan pada pertaksamaan (7), fungsi objektif (8), kendala (9), persamaan (10), (11), (12), (13), (14), (15), (16), dan (17).
- 3) Pemeriksaan kefisibelan jadwal kereta dengan memeriksa kendala (4).
- 4) Pemilihan penjadwalan kereta yang fisibel.

### 3 IMPLEMENTASI MODEL

Misalkan terdapat jaringan rel kereta dengan 23 stasiun dan 23 *edge* antarstasiun. Gambar jaringan dapat dilihat pada Gambar 1. Angka di setiap simpul/verteks menyatakan stasiun, sedangkan angka pada setiap *edge* menyatakan banyaknya penumpang pada *edge* (rute kereta antarstasiun) tersebut. Setiap *edge* terdiri atas dua jalur yang memiliki arah yang berbeda. Arah 1 merupakan arah perjalanan kereta yang menjauhi stasiun awal, sedangkan arah 2 merupakan arah perjalanan kereta yang



terpilih kereta tipe 5 dengan banyaknya gerbong adalah 6. Pemilihan kereta ini mengeluarkan biaya Rp 76.602.000,-. Biaya ini menjadi batas bawah untuk biaya minimum pada proses selanjutnya.

Pada tahap selanjutnya dibuat penjadwalan tahap I dari tipe kereta yang terpilih. Penjadwalannya dibuat untuk satu perjalanan kereta dari stasiun awal kembali ke stasiun awal lagi. Jeda kereta berikutnya pada rute yang sama adalah 60 menit. Hasil penjadwalan tahap I dapat dilihat pada Tabel 1. Dari penjadwalan tahap I didapat bahwa terjadi tabrakan kereta di rute 4 dan 5 antara stasiun 22 dan 23 pada arah 2. Oleh karena itu, dilakukan penjadwalan tahap II dan dihasilkan penundaan terjadi pada kedatangan kereta di stasiun 22 dari stasiun 23 pada rute 5 selama 2 menit, tetapi keberangkatan kereta dari stasiun 23 ke stasiun 22 tidak mengalami penundaan. Hal ini mengakibatkan kecepatan kereta di rute 5 mengalami penurunan antara stasiun 22 dan 23 pada arah 2 dibandingkan dengan sebelum penundaan tetapi kecepatannya tetap konstan sehingga tidak terjadi tabrakan dan dapat dilihat pada Tabel 2.

Pada tahap berikutnya dilakukan pemeriksaan kefisibelan perjalanan antarstasiun setelah dilakukan penjadwalan. Pada tahap ini didapat hasil bahwa rute 5 antara stasiun 22 dan 23 takfisibel pada arah 2 karena waktu perjalanan tidak berada pada rentang waktu perjalanan minimum dan maksimum. Jadi Subproblem 1 takfisibel.

Langkah yang sama dilakukan untuk subproblem yang lain. Pada Subproblem 2, himpunan tipe kereta yang dapat digunakan pada suatu rute adalah himpunan kereta seluruhnya dikurangi himpunan penyelesaian pada Subproblem 1 yang takfisibel yaitu kereta 5 pada rute 5. Dari Subproblem 2 didapat hasil bahwa rute 4 antara stasiun 22 dan 23 takfisibel pada arah 1. Himpunan tipe kereta yang dapat digunakan pada suatu rute di Subproblem 3 adalah himpunan kereta pada Subproblem 2 dikurangi himpunan penyelesaian pada Subproblem 2 yang takfisibel yaitu kereta 4 pada rute 4. Dari Subproblem 3 ini diperoleh solusi yang fisibel yaitu rute 1 terpilih kereta tipe 5 dengan 4 gerbong, rute 2 terpilih kereta tipe 7 dengan 6 gerbong, rute 3 terpilih kereta tipe 5 dengan 6 gerbong, rute 4 terpilih kereta tipe 7 dengan 6 gerbong, dan rute 5 terpilih kereta tipe 7 dengan banyaknya gerbong ialah 6 dan dengan biaya minimum Rp 78.478.000,-. Ilustrasi perjalanan kereta yang optimal diberikan pada Gambar 2.

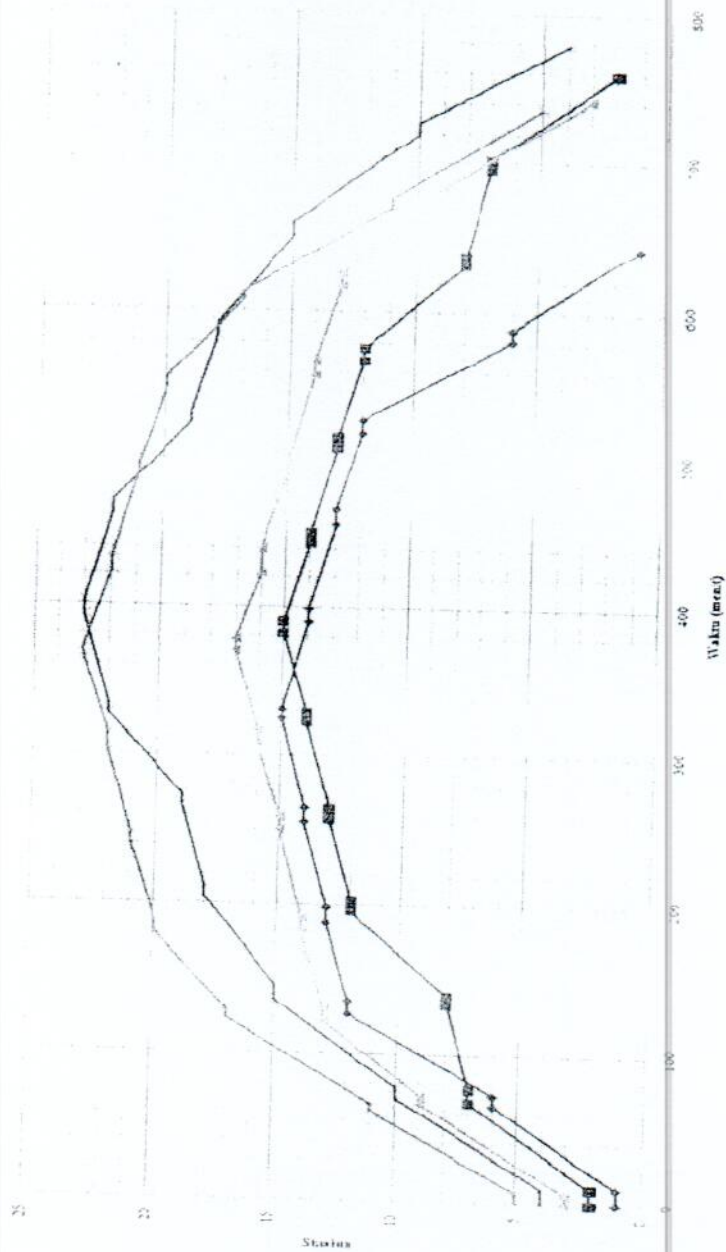
Tabel 1 Penjadwalan kereta tahap I Subproblem 1

		Waktu		Stasiun						
$\mu$		(dalam menit)		1	6	12	13	14	15	
R1,K5,C2	1	Datang	0	63	123	184	249	309		
		Berangkat	6	70	131	191	255			
	2	Datang	620	556	495	435	371			
		Berangkat	-	563	503	442	377	317		
		Waktu		Stasiun						
$\mu$		(dalam menit)		2	7	8	12	13	14	15
R2,K7,C3	1	Datang	0	61	123	183	242	305	370	
		Berangkat	7	67	129	190	248	315		
	2	Datang	743	683	621	560	502	435		
		Berangkat	-	689	627	567	508	445	380	
		Waktu		Stasiun						
$\mu$		(dalam menit)		3	9	13	14	15	16	17
R3,K5,C3	1	Datang	0	60	121	186	246	311	376	

		Berangkat	6	66	128	192	254	319	-
	2	Datang	752	692	630	566	504	439	-
		Berangkat	-	698	637	572	512	447	382
		$\mu$							
		Waktu (dalam menit)	4	10	15	18	19	22	23
		Stasiun							
R4,K4,C3	1	Datang	0	65	131	187	244	302	371
		Berangkat	6	73	137	193	250	311	-
	2	Datang	745	677	613	557	500	439*	-
		Berangkat	-	685	619	563	506	448	379*
		$\mu$							
		Waktu (dalam menit)	5	11	17	20	21	22	23
		Stasiun							
R5,K5,C3	1	Datang	0	54	119	183	245	313	375
		Berangkat	7	60	125	192	253	322	-
	2	Datang	752	699	634	567	506	437*	-
		Berangkat	-	705	640	576	514	446	384*

Tabel 2. Penjadwalan tahap II Subproblem 1 untuk rute 5

		$\mu$							
		Waktu (dalam menit)	5	11	17	20	21	22	23
		Stasiun							
R5,K5,C3	1	Datang	0	54	119	183	245	313	375
		Berangkat	7	60	125	192	253	322	-
	2	Datang	752	699	634	567	506	439	-
		Berangkat	-	705	640	576	514	446	384



Gambar 2 Ilustrasi perjalanan kereta rute 1 ( ◆ ), rute 2 ( ■ ), rute 3 ( ▲ ), rute 4 ( ● ), rute 5 ( × ).

#### 4 SIMPULAN

*Minimum cost scheduling problem* (MCSP) pada kereta dapat digunakan untuk menentukan penjadwalan kereta yang meminimumkan biaya operasional. Penyelesaian MCSP dilakukan dengan empat tahapan dengan memecah

masalah menjadi subproblem-subproblem agar pencarian solusi yang optimal dan lebih cepat. Penyelesaian MCSP dibagi menjadi dua bagian yaitu penyelesaian *minimum cost train problem* (MCTP) yang menghasilkan rute-rute kereta dan menjadwalkan kereta yang memenuhi semua kendala berdasarkan *job shop scheduling problem*.

#### DAFTAR PUSTAKA

- [1]. Bar-Noy A, Bhatia R, Naor J, Schieber B. 2002. Minimizing service and operation costs of periodic scheduling. *Mathematics of Operations Research* 27(3): 518 – 544.
- [2]. Deschinkel K & Touati S. 2008. Efficient method for periodic task scheduling with storage requirement minimization. Di dalam *Combinatorial Optimization and Application. Lecture Notes in Computer Science*, Vol 5165 hlm. 438 – 447.
- [3]. Lindner T & Zimmermann UT. 2005. Cost optimal periodic train scheduling. *Math Meth Oper Res* 62:281-295.
- [4]. Salido MA & Barber F. 2009. Mathematical solutions for solving periodic railway transportation. *Mathematical Problem in Engineering* 2009, doi:10.1155/2009/728916.
- [5]. Serafini P & Ukovich W. 1989. A mathematical model for periodic scheduling problems. *SIAM J Disc Math* 2(4): 550 – 581.
- [6]. Yuan Z, Fügenschuh A, Homfeld H, Balaprakash P, Stützle T, Schoch M. 2008. Iterated greedy algorithm for a real world cyclic train scheduling problem. Di dalam *Hybrid Metaheuristic. Lecture Notes in Computer Science* Volume 5296 hlm. 102-116.