

VOLUME 2/NO.1/2014

ISN : 2337-392X



PROSIDING

**SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA,
STATISTIKA, PENDIDIKAN MATEMATIKA,
DAN KOMPUTASI**

Peranan Matematika dan Statistika dalam Menyikapi Perubahan Iklim



<http://seminar.mipa.uns.ac.id>

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta
Jl. Ir. Sutami 36 A Solo - Jawa Tengah**

Tim Prosiding

Editor

Purnami Widyaningsih, Respatiwan, Sri Kuntari,
Nughthoh Arfawi Kurdhi, Putranto Hadi Utomo, dan Bowo Winarno

Tim Teknis

Hamdani Citra Pradana, Ibnu Paxibrata, Ahmad Dimyathi,
Eka Ferawati, Meta Ilafiani, Dwi Ardian Syah,
dan Yosef Ronaldo Lete B.

Layout & Cover

Ahmad Dimyathi

Tim Reviewer

Drs. H. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.
Dr. Sri Subanti, M.Si.
Dr. Dewi Retno Sari Saputro, MKom.
Drs. Muslich, M.Si.
Dra. Mania Roswitha, M.Si.
Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.
Drs. Pangadi, M.Si.
Drs. Sutrima, M.Si.
Drs. Sugiyanto, M.Si.
Dra Etik Zukhronah, M.Si.
Dra Respatiwulan, M.Si.
Dra. Sri Sulistijowati H., M.Si.
Irwan Susanto, DEA
Winita Wulandari, M.Si.
Sri Kuntari, M.Si.
Titin Sri Martini, M.Kom.
Ira Kurniawati, M.Pd.

Steering Committee

Prof. Drs.Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.
Prof. Dr. Budi Murtiyasa, M.Kom.
Prof. Dr. Dedi Rosadi, M.Sc.
Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc.
Prof. Dr. Budi Nurani, M.S.
Dr. Titin Siswantining, DEA
Dr. Mardiyana, M.Si.
Dr. Sutikno, M.Si.

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa sehingga prosiding seminar nasional Statistika, Pendidikan Matematika dan Komputasi ini dapat diselesaikan.

Prosiding ini bertujuan mendokumentasikan dan mengkomunikasikan hasil presentasi paper pada seminar nasional dan terdiri atas 95 *paper* dari para pemakalah yang berasal dari 30 perguruan tinggi/politeknik dan institusi terkait. Paper tersebut telah dipresentasikan di seminar nasional pada tanggal 18 Oktober 2014. Paper didistribusikan dalam 7 kategori yang meliputi kategori Aljabar 14%, Analisis 9%, Kombinatorik 8%, Matematika Terapan 14%, Komputasi 7%, Statistika Terapan 27%, dan Pendidikan Matematika 19%.

Terima kasih disampaikan kepada pemakalah yang telah berpartisipasi pada desiminasi hasil kajian/penelitian yang dimuat pada prosiding ini. Terimakasih juga disampaikan kepada tim *reviewer*, tim prosiding, dan *steering committee*.

Semoga prosiding ini bermanfaat.

Surakarta, 28 Oktober 2014

Ketua Panitia



Dr. Dewi Retno Sari Saputro, M.Kom

The image shows a circular logo for the 'Seminar Nasional Matematika Universitas Sebelas Maret 2014'. The logo features a blue star with '2014' in the center, surrounded by the text 'Seminar Nasional Matematika' and 'Universitas Sebelas Maret'. A handwritten signature in black ink is written over the logo and extends to the right.

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Tim Prosiding	ii
Tim <i>Reviewer</i>	iii
<i>Steering Committee</i>	iv
Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vi

BIDANG ALJABAR

Bentuk-Bentuk Ideal pada Semiring $(\mathbf{D}_{n \times n}(\mathbb{Z}^+), +, \cdot)$ <i>Dian Winda Setyawati</i>	1
Penentuan Lintasan Kapasitas Interval Maksimum dengan Pendekatan Aljabar Max-Min Interval <i>M. Andy Rudhito dan D. Arif Budi Prasetyo</i>	8
Karakterisasi Aljabar Pada Graf Bipartit <i>Soleha, Dian W. Setyawati</i>	18
Semigrup Bentuk Bilinear Terurut Parsial Reguler Lengkap dalam Batasan Quasi-Ideal <i>Fuzzy</i> <i>Karyati, Dhoriva Urwatul Wutsqa</i>	26
Syarat Perlu dan Cukup Ring Lokal Komutatif Agar Ring Matriksnya Bersih Kuat (-Reguler Kuat) <i>Anas Yoga Nugroho, Budi Surodjo</i>	34
Sifat-sifat Modul Komultiplikasi Bertingkat <i>Putri Widi Susanti, Indah Emilia Wijayanti</i>	42
Ideal dari Ring Polinomial $F_n^2[x] \text{ mod}(x^n-1)$ untuk Kontrol Kesalahan dalam Aplikasi Komputer <i>Komar Baihaqi dan Iis Herisman</i>	49
Submodul Hampir Prima <i>Dyana Patty, Sri Wahyuni</i>	55
Subgrup Normal suatu Grup Perkalian dari Ring Pembagian yang Radikal atas Subring Pembagian Sejati <i>Juli Loisiana Butarbutar dan Budi Surodjo</i>	64
Sifat dan Karakterisasi Submodul Prima Lemah $S(N)$ <i>Rosi Widia Asiani, Sri Wahyuni</i>	73
Modul Distributif dan Multiplikasi <i>Lina Dwi Khusnawati, Indah Emilia Wijayanti</i>	83

Penjadwalan Keberangkatan Kereta Api di Jawa Timur dengan Menggunakan Model Petrinet dan Aljabar Max-plus Ahmad Afif, Subiono	92
Optimalisasi Norm Daerah Hasil dari Himpunan Bayangan Matriks Aljabar Maks-Plus dengan Sebagian Elemen Ditentukan <i>Antin Utami Dewi, Siswanto, dan Respatiwulan</i>	107
Himpunan Bayangan Bilangan Bulat Matriks Dua Kolom dalam Aljabar Maks-Plus <i>Nafi Nur Khasana, Siswanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	112
BIDANG ANALISIS	
Ruang 2-Norma Selisih <i>Sadjidon, Mahmud Yunus, dan Sunarsini</i>	120
Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada Ruang $C[a,b]$ -Metrik $(\ell_p, d^{C[a,b]})$ <i>Sunarsini, Sadjidon, Mahmud Yunus</i>	124
Generalisasi Ruang Barisan Yang Dibangkitkan Oleh Fungsi Orlicz <i>Nur Khusnussa'adah dan Supaman</i>	132
Gerakan Kurva Parameterisasi Pada Ruang Euclidean <i>Iis Herisman dan Komar Baihaqi</i>	141
Penggunaan Metode Transformasi Diferensial Fraksional dalam Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville Fraksional untuk Persamaan Bessel Fraksional <i>Marifatun, Sutrima, dan Isnandar Slamet</i>	148
Konsep Topologi Pada Ruang $C[a,b]$ <i>Muslich</i>	155
Kekompakan Terkait Koleksi Terindeks Kontinu dan Ruang Topologis Produk <i>Hadrian Andradi, Atok Zulijanto</i>	162
A Problem On Measures In Infinite Dimensional Spaces <i>Herry Pribawanto Suryawan</i>	171
Masalah Syarat Batas Sturm-Liouville Singular Fraksional untuk Persamaan Bessel <i>Nisa Karunia, Sutrima, Sri Sulistijowati H</i>	179
BIDANG KOMBINATORIK	
Pelabelan Selimut (a,d) -H-Anti Ajaib Super pada Graf Buku <i>Frey Kurnita Sari, Mania Roswitha, dan Putranto Hadi Utomo</i>	187

Digraf Eksentrik Dari Graf Hasil Korona Graf Path Dengan Graf Path <i>Putranto Hadi Utomo, Sri Kuntari, Tri Atmojo Kusmayadi</i>	193
Super (a, d) -H-Antimagic Covering On Union Of Stars Graph <i>Dwi Suraningsih, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i>	198
Dimensi Metrik pada Graf <i>Umbrella</i> <i>Hamdani Citra Pradana dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>	202
Dimensi Metrik pada Graf <i>Closed Helm</i> <i>Deddy Rahmadi dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>	210
Pelabelan Selimut (a,b) - C_{s+2} -Anti Ajaib Super pada Graf <i>Generalized Jahangir</i> <i>Anna Amandha, Mania Roswitha, dan Bowo Winarno</i>	215
Super (a,d) -H-Antimagic Total Labeling On Sun Graph <i>Marwah Wulan Mulia, Mania Roswitha, and Putranto Hadi Utomo</i>	223
Maksimum dan Minimum Pelabelan γ pada Graf <i>Flower</i> <i>Tri Endah Puspitosari, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i>	231

BIDANG MATEMATIKA TERAPAN

Penghitungan Volume Konstruksi dengan Potongan Melintang <i>Mutia Lina Dewi</i>	238
Pola Pengubinan Parabolis <i>Theresia Veni Dwi Lestari dan Yuliana Pebri Heriawati</i>	247
Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa Hutchinson dengan Waktu Tunda dan Pemanenan Konstan <i>Ali Kusnanto, Lilis Saodah, Jaharuddin</i>	257
Susceptible Infected Zombie Removed (SIZR) Model with Quarantine and Antivirus <i>Lilik Prasetyo Pratama, Purnami Widyaningsih, and Sutanto</i>	264
Model Endemik <i>Susceptible Exposed Infected Recovered Susceptible (SEIRS)</i> pada Penyakit Influenza <i>Edwin Kristianto dan Purnami Widyaningsih</i>	272
Churn Phenomenon Pengguna Kartu Seluler dengan Model <i>Predator-Prey</i> <i>Rizza Muamar As-Shidiq, Sutanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	279
Pemodelan Permainan <i>Flow Colors</i> dengan <i>Integer Programming</i> <i>Irfan Chahyadi, Amril Aman, dan Farida Hanum</i>	283
Optimasi Dividen Perusahaan Asuransi dengan Besarnya Klaim Berdistribusi Eksponensial <i>Ali Shodiqin, Supandi, Ahmad Nashir T</i>	292

Permasalahan Kontrol Optimal Dalam Pemodelan Penyebaran Penyakit <i>Rubono Setiawan</i>	300
Model Pengoptimuman <i>Dispatching</i> Bus pada Transportasi Perkotaan: Studi Kasus pada Beberapa Koridor Trans Jakarta <i>Farida Hanum, Amril Aman, Toni Bakhtiar, Irfan Cahyadi</i>	306
Model Pengendalian Epidemii dengan Vaksinasi dan Pengobatan <i>Toni Bachtiar dan Farida Hanum</i>	315
How Realistic The Well-Known Lotka-Volterra Predator-Prey Equations Are <i>Sudi Mungkasi</i>	323
Aplikasi Kekongruenan Modulo pada Algoritma Freund dalam Penjadwalan Turnamen <i>Round Robin</i> <i>Esthi Putri Hapsari, Ira Kurniawati</i>	334

BIDANG KOMPUTASI

Aplikasi Algoritma Enkripsi Citra <i>Digital</i> Berbasis <i>Chaos</i> Menggunakan <i>Three Logistic Map</i> <i>Suryadi MT, Dhian Widya</i>	344
Implementasi Jaringan Syaraf Tiruan Untuk Mengklasifikasi Kualitas Citra Ikan <i>Muhammad Jumnahdi</i>	352
Sistem Pengkonversi Dokumen eKTP/SIM Menjadi Suatu Tabel <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Muhammad Mushonnif Junaidi</i>	360
Kriptografi Kurva Eliptik Elgamal Untuk Proses Enkripsi-Dekripsi Citra Digital Berwarna <i>Daryono Budi Utomo, Dian Winda Setyawati dan Gestihayu Romadhoni F.R</i>	373
Penerapan <i>Assosiation Rule</i> dengan Algoritma Apriori untuk Mengetahui Pola Hubungan Tingkat Pendidikan Orang Tua terhadap Indeks Prestasi Kumulatif Mahasiswa <i>Kuswari Hernawati</i>	384
Perancangan Sistem Pakar Fuzzy Untuk Pengenalan Dini Potensi Terserang Stroke <i>Alvida Mustika R., M Isa Irawan dan Harmuda Pandiangan</i>	394
Miniatur Sistem Portal Semiotomatis Berbasis Sidik Jari pada Area Perpakiran <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Devy Indria Safitri</i>	405

BIDANG STATISTIKA

Uji Van Der Waerden Sebagai Alternatif Analisis Ragam Satu Arah <i>Tanti Nawangsari</i>	417
Analisis Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Keberhasilan Mahasiswa Politeknik (Studi Kasus Mahasiswa Polban) <i>Euis Sartika</i>	425
Distribusi Prior Dirichlet yang Diperumum sebagai Prior Sekawan dalam Analisis Bayesian <i>Feri Handayani, Dewi Retno Sari Saputro</i>	439
Pemodelan Curah Hujan Dengan Metode <i>Robust</i> Kriging Di Kabupaten Sukoharjo <i>Citra Panindah Sari, Dewi Retno Sari S, dan Muslich</i>	444
Premi Tunggal Bersih Asuransi Jiwa Endowment Unit Link Dengan Metode Annual Ratchet <i>Ari Cahyani, Sri Subanti, Yuliana Susanti</i>	453
Uji Siegel-Tukey untuk Pengujian Efektifitas Obat Depresan pada Dua Sampel Independen <i>David Pratama dan Getut Pramesti</i>	462
Aplikasi <i>Almost Stochastic Dominance</i> dalam Evaluasi Hasil Produksi Padi di Indonesia <i>Kurnia Hari Kusuma, Isnandar Slamet, dan Sri Kuntari</i>	470
Pendeteksian Krisis Keuangan Di Indonesia Berdasarkan Indikator Nilai Tukar Riil <i>Dewi Retnosari, Sugiyanto, Tri Atmojo</i>	475
Pendekatan <i>Cross-Validation</i> untuk Pendugaan Data Tidak Lengkap pada Pemodelan AMMI Hasil Penelitian Kuantitatif <i>Gusti Ngurah Adhi Wibawa dan Agusrawati</i>	483
Aplikasi Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Triangle pada Data Meteo Vertical dan Ozon Vertikal, Tanggal 30 Januari 2013 <i>Nanang Widodo, Tony Subiakto, Dian Yudha R, Lalu Husnan W</i>	493
Pemodelan Indeks Harga Saham Gabungan dan Penentuan Rank Correlation dengan Menggunakan Copula <i>Ika Syattwa Bramantya, Retno Budiarti, dan I Gusti Putu Purnaba</i>	502
Identifikasi Perubahan Iklim di Sentra Produksi Padi Jawa Timur dengan Pendekatan <i>Extreme Value Theory</i> <i>Sutikno dan Yustika Desi Wulan Sari</i>	513
Analisis Data Radiasi Surya dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Kernel Cosinus <i>Nanang Widodo, Noer Abdillah S.N.S.N, Dian Yudha Risdianto</i>	523

Pengujian Hipotesis pada Regresi Poisson Multivariate dengan Kovariansi Merupakan Fungsi dari Variabel Bebas <i>Triyanto, Purhadi, Bambang Widjanarko Otok, dan Santi Wulan Purnami</i>	533
Perbandingan Metode Ordinary Least Squares (OLS), Seemingly Unrelated Regression (SUR) dan Bayesian SUR pada Pemodelan PDRB Sektor Utama di Jawa Timur <i>Santosa, AB, Iriawan, N, Setiawan, Dohki, M</i>	544
Studi Model Antrian M/G/1: Pendekatan Baru <i>Isnandar Slamet</i>	557
Pengaruh Pertumbuhan Ekonomi dan Konsumsi Energi Terhadap Emisi CO ₂ di Indonesia: Pendekatan Model Vector Autoregressive (VAR) <i>Fitri Kartiasih</i>	567
Estimasi Parameter Model Epidemi <i>Susceptible Infected Susceptible (SIS)</i> dengan Proses Kelahiran dan Kematian <i>Pratiwi Rahayu Ningtyas, Respatiwulan, dan Siswanto</i>	578
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Harga Saham <i>Tri Marlina, Sugiyanto, dan Santosa Budi Wiyono</i>	584
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Kecamatan Rancaekek, Kabupaten Bandung <i>Gumgum Darmawan, Restu Arisanti, Triyani Hendrawati, Ade Supriatna</i>	592
Model Markov <i>Switching Autoregressive (MSAR)</i> dan Aplikasinya pada Nilai Tukar Rupiah terhadap Yen <i>Desy Kurniasari, Sugiyanto, dan Sutanto</i>	602
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Pertumbuhan Kredit Domestik <i>Pitaningsih, Sugiyanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	608
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Bandung dan Sekitarnya <i>Gumgum Darmawan, Triyani Hendrawati, Restu Arisanti</i>	615
Model Probit Spasial <i>Yuanita Kusuma Wardani, Dewi Retno Sari Saputro</i>	623
Peramalan Jumlah Pengunjung Pariwisata di Kabupaten Boyolali dengan Perbandingan Metode Terbaik <i>Indiawati Ayik Imaya, Sri Subanti</i>	628
Pemodelan Banyaknya Penderita Demam Berdarah <i>Dengue (DBD)</i> dengan Regresi <i>Kriging</i> di Kabupaten Sukoharjo <i>Sylviana Yusriati, Dewi Retno Sari Saputro, Sri Kuntari</i>	638

Ekspektasi Durasi Model Epidemi <i>Susceptible Infected (SI)</i> <i>Sri Kuntari, Respatiwan, Intan Permatasari</i>	646
---	-----

BIDANG PENDIDIKAN

Konsep Pembelajaran Integratif dengan Matematika Sebagai Bahasa Komunikasi dalam Menyongsong Kurikulum 2013 <i>Surya Rosa Putra, Darmaji, Soleha, Suhud Wahyudi</i> ,	653
Penerapan Pendidikan Lingkungan Hidup Berbasis Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika <i>Urip Tisngati</i>	664
Studi Respon Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasarkan Taksonomi SOLO (Structure of Observed Learned Outcome) <i>Herlin Widia, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i>	677
Desain Model Discovery Learning pada Mata Kuliah Persamaan Diferensial <i>Rita Pramujiyanti Khotimah, Masduki</i>	684
Efektivitas Pembelajaran Berbasis Media Tutorial Interaktif Materi Geometri <i>Joko Purnomo, Agung Handayanto, Rina Dwi Setyawati</i>	693
Pengembangan Modul Pembelajaran Matematika Menggunakan Pendekatan Problem Based Learning (PBL) Pada Materi Peluang Kelas VII SMP <i>Putri Nurika Anggraini, Imam Sujadi, Yemi Kuswardi</i>	703
Pengembangan Bahan Ajar Dalam Pembelajaran Geometri Analitik Untuk Meningkatkan Kemandirian Mahasiswa <i>Sugiyono, Himmawati Puji Lestari</i>	711
Pengembangan Strategi Pembelajaran Info Search Berbasis PMR untuk Meningkatkan Pemahaman Mata Kuliah Statistika Dasar 2 <i>Joko Sungkono, Yuliana, M. Wahid Syaifuddin</i>	724
Analisis Miskonsepsi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Pada Mata Kuliah Kalkulus I <i>Sintha Sih Dewanti</i>	731
Kemampuan Berpikir Logis Mahasiswa yang Bergaya Kognitif Reflektif vs Impulsif <i>Warli</i>	742
Model Pembelajaran Berbasis Mobile <i>Yayu Laila Sulastri, Luki Luqmanul Hakim</i>	753

Profil Gaya Belajar Myers-Briggs Tipe Sensing-Intuition dan Strateginya Dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Rini Dwi Astuti, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i>	760
Penggunaan Permainan Matematika Berbasis Lingkungan Hidup untuk Meningkatkan Minat dan Keterampilan Matematis Peserta Didik <i>Rita Yuliasstuti</i>	772
Tingkat Pemahaman Peserta PLPG Matematika Rayon 138 Yogyakarta Tahun 2014 Terhadap Pendekatan Saintifik Pada Kurikulum 2013 Berdasarkan Kuesioner Awal dan Akhir Pelatihan <i>Beni Utomo, V. Fitri Rianasari dan M. Andy Rudhito</i>	784
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Melalui Pendekatan RME dengan CD Interaktif Berbasis Pendidikan Karakter Materi Soal Cerita Kelas III <i>Sri Surtini, Ismartoyo, dan Sri Kadarwati</i>	791
E-Learning Readiness Score Sebagai Pedoman Implementasi E-Learning <i>Nur Hadi Waryanto</i>	805
Pengembangan Lembar Kerja Siswa (LKS) Matematika Realistik di SMP Berbasis Online Interaktif <i>Riawan Yudi Purwoko, Endro Purnomo</i>	817
IbM APE Matematika Bagi TK Pinggiran Di Kota Malang <i>Kristina Widjajanti, Mutia Lina Dewi</i>	826

ANALISIS KESTABILAN MODEL MANGSA PEMANGSA HUTCHINSON DENGAN WAKTU TUNDA DAN PEMANENAN KONSTAN

Ali Kusnanto, Lilis Saodah, Jaharuddin
Departemen Matematika FMIPA-IPB

ABSTRAK. Model dalam tulisan ini merupakan modifikasi model Lotka-Volterra yang disusun oleh Hutchinson dengan mempertimbangkan waktu tunda terhadap populasi mangsa dan sebuah parameter pemanenan konstan pada kedua populasi mangsa-pemangsa. Analisis kestabilan dilakukan terhadap model tanpa waktu tunda dan dengan waktu tunda. Untuk model tanpa waktu tunda diperoleh tiga titik tetap yang bersifat sadel dan simpul/spiral stabil, sedangkan titik tetap pada model dengan waktu tunda terdapat titik tetap yang bersifat sadel dan spiral stabil/tidak stabil. Untuk model dengan waktu tunda, semakin besar nilai waktu tunda mengakibatkan munculnya *limit cycle* dan terjadi bifurkasi Hopf. Kondisi bifurkasi Hopf akan terulang kembali pada saat nilai waktu tunda dinaikkan lagi.

Kata Kunci: model Hutchinson, waktu tunda, pemanenan, bifurkasi Hopf, mangsa-pemangsa

1. PENDAHULUAN

Salah satu model mangsa pemangsa yang paling terkenal adalah Model Lotka-Volterra yang dikenalkan pada tahun 1926. Asumsi dasar dari model mangsa pemangsa Lotka-Volterra adalah bahwa setiap populasi mengalami pertumbuhan atau peluruhan eksponensial. Kemudian untuk membangun model yang lebih realistis Ruan dalam [1] telah mereview beberapa model mangsa pemangsa dengan waktu tunda. Beberapa model yang disebutkan dalam tulisan ini adalah model type Kolmogorof, tipe Gause, model Wangersky-Cunningham dan model Hutchinson.

Baretta dan Kuang [2] juga sudah menambahkan waktu tunda untuk respons pemangsa terhadap mangsa dengan memilih respon fungsionalnya berbentuk Holling Tanner II. Dalam hal ini diasumsikan bahwa penggunaan waktu tunda pada sistem ini disebabkan karena adanya waktu yang diperlukan populasi pemangsa dalam memangsa mangsanya. Dalam tulisan ini juga sudah dipaparkan adanya batas waktu tunda sehingga terjadinya bifurkasi Hopf.

Model yang dibahas dalam tulisan ini adalah model Hutchinson yang sudah diawali pembahasannya dalam [1] dan [2]. Dalam tulisan ini, untuk menganalisis model Hutchinson tersebut dilakukan transformasi ke dalam model lain yang lebih sederhana seperti yang telah dilakukan dalam [3]. Untuk pembahasan masalah kestabilan sistem tanpa waktu tunda akan didasarkan pada nilai eigen dari matriks Jacobi terhadap pelinearan sistem persamaan diferensial model Hutchinson. Langkah-langkah pembahasan cara pelinearan dan pencarian kestabilan sistem dapat dilihat dalam [4]. Pendukung teori untuk sistem dengan waktu tunda dapat dibaca pada [5].

2. TINJAUAN PUSTAKA/RUMUSAN MASALAH

Dalam tulisan ini akan dibahas model mangsa pemangsa May yang dikembangkan oleh Hutchinson dengan memasukkan waktu tunda pada mangsa dan pemanenan konstan

untuk mangsa dan pemangsa [3]. Representasi model tersebut dapat dituliskan dalam persamaan (3.1) berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= rx(t) \left(1 - \frac{x(t) - \tau}{K} \right) - \alpha x(t)y(t) - E_x x(t), \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -cy(t) + \beta x(t)y(t) - E_y y(t), \end{aligned} \tag{3.1}$$

dimana $x, y \geq 0$, dan konstanta $r, K, \tau, \alpha, c, \beta, E_x, E_y > 0$, dengan

- x : banyaknya populasi mangsa pada waktu t ,
- y : banyaknya populasi pemangsa pada waktu t ,
- r : laju instrinsik dari mangsa,
- K : daya dukung lingkungan untuk populasi mangsa dalam ketiadaan pemangsanya,
- τ : waktu tunda atau perlambatan,
- c : laju instrinsik dari pemangsa,
- α : tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang berpengaruh terhadap populasi mangsa,
- β : tingkat interaksi antara mangsa dan pemangsa yang berpengaruh terhadap populasi mangsa,
- E_x : upaya pemanenan populasi mangsa,
- E_y : upaya pemanenan populasi pemangsa.

Tanpa mengurangi keumuman pembahasan, dalam tulisan ini dipilih $E_x = E_y = E$ dengan E konstanta positif. Selanjutnya dengan melakukan substitusi $r_1 = r - E, K_1 = \frac{r-E}{r}K, c_1 = c + E$, akan diperoleh persamaan (3.2) berikut :

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= r_1 x(t) \left(1 - \frac{x(t) - \tau}{K_1} \right) - \alpha x(t)y(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -c_1 y(t) + \beta x(t)y(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

Selanjutnya, diasumsikan $r > E$ yang merepresentasikan laju pertumbuhan instrinsik populasi pemangsa lebih besar dibanding upaya pemanenannya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Model tanpa waktu tunda ($\tau = 0$)

Terdapat tiga titik tetap yang mungkin, yaitu $T_1 = 0,0, T_2 = K_1, 0, T_3 = x^*, y^* = \frac{c_1}{\beta}, \frac{r_1(K_1\beta - c_1)}{\alpha\beta K_1}$. Agar titik tetap T_3 memiliki komponen-komponen yang bernilai positif, maka $K_1\beta - c_1 > 0$. Pada titik tetap T_3 , batasan upaya pemanenan yang dinyatakan oleh E diberikan sebagai berikut

$$0 < E < \frac{r(K_1\beta - c_1)}{(K_1\beta + r)}.$$

Analisis Kestabilan dilakukan dengan mencari nilai eigen pada masing-masing titik tetap. Nilai eigen dilakukan dengan menggunakan matriks Jacobi dari persamaan (3.2), yaitu

$$J = \begin{pmatrix} r_1 - 2\frac{r_1x}{K_1} - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -c_1 + \beta x \end{pmatrix}.$$

Jika titik tetap $T_1 = (0,0)$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, maka akan diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = r_1, \lambda_2 = -c_1$. Hal ini mengakibatkan titik tetap bersifat sadel [4].

Jika titik tetap $T_2 = K_1, 0$ disubstitusikan ke dalam matriks Jacobi, maka diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = -r_1, \lambda_2 = -c_1 + \beta K_1$. Karena semua parameter diasumsikan bernilai positif, maka $\lambda_1 < 0$ dan λ_2 bergantung pada nilai parameter βK_1 dan c_1 yang digunakan. Jika $\beta K_1 - c_1 > 0$, maka kestabilan titik tetap T_2 bersifat sadel, dan bersifat simpul stabil, jika $\beta K_1 - c_1 < 0$.

Jika titik tetap T_3 disubstitusikan ke matriks Jacobian, maka diperoleh

$$J_{\frac{c_1 r_1 (\beta K_1 - c_1)}{\beta}, \frac{r_1 c_1}{\alpha \beta K_1}} = \begin{pmatrix} -\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} & \frac{-\alpha c_1}{\beta} \\ \frac{K_1 \beta r_1 - r_1 c_1}{\alpha K_1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga nilai eigen titik tetap T_3 , akan memenuhi persamaan

$$\lambda_{1,2} = \frac{\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} \pm \sqrt{\frac{r_1 c_1}{\beta K_1}^2 - 4 \frac{c_1 r_1}{\beta K_1} (\beta K_1 - c_1)}}{2}. \tag{3.3}$$

Berdasarkan nilai eigen pada persamaan (3.3) dengan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ terdapat beberapa kemungkinan, yaitu:

- i) $\frac{r_1 c_1}{\beta K_1}^2 - \frac{4 r_1 c_1}{\beta K_1} (\beta K_1 - c_1) > 0$ sehingga $\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} > 4(\beta K_1 - c_1)$
 Dalam hal ini titik tetap bersifat simpul stabil.
- ii) $\frac{r_1 c_1}{\beta K_1}^2 - \frac{4 r_1 c_1}{\beta K_1} (\beta K_1 - c_1) < 0$ sehingga $\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} < 4(\beta K_1 - c_1)$

Dalam hal ini titik tetap bersifat spiral stabil.

Agar titik tetap T_3 stabil, maka nilai eigen harus negatif, sehingga

$$\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} > \frac{r_1 c_1}{\beta K_1}^2 - \frac{4 r_1 c_1}{\beta K_1} (\beta K_1 - c_1) \text{ atau } \frac{4 r_1 c_1}{\beta K_1} (\beta K_1 - c_1) > 0.$$

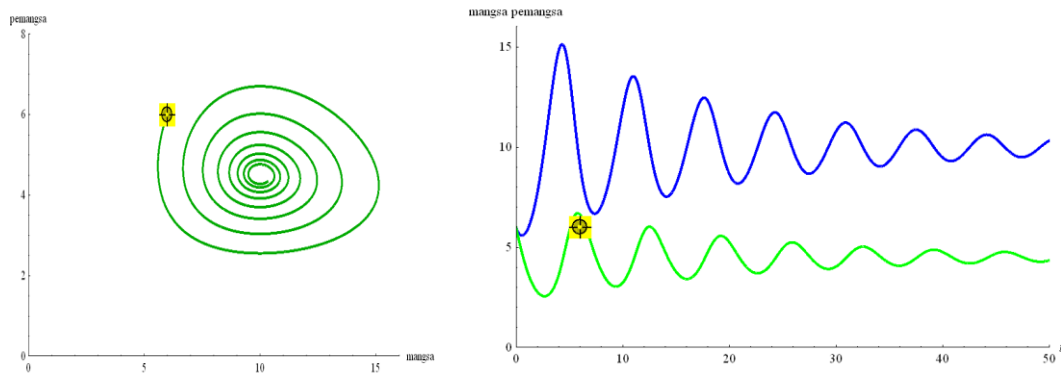
Selanjutnya, titik tetap T_3 dimana $\frac{c_1}{\beta} > 0$ dan $\frac{r_1 (\beta K_1 - c_1)}{\alpha \beta K_1} > 0$, maka $1 - \frac{c_1}{\beta K_1} > 0$ sehingga $\beta K_1 > c_1$. Jadi diperoleh nilai eigen yang negatif, maka titik tetap T_3 stabil. Jenis kestabilan titik tetap T_3 didasarkan pada kedua kemungkinan di atas dan diberikan pada Tabel 1.

Tabel 1 Kondisi kestabilan titik tetap

Kondisi		T_1	T_2	T_3
$\beta K_1 > c_1$	$\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} - 4(\beta K_1 - c_1) > 0$	Sadel	Sadel	Simpul Stabil
	$\frac{r_1 c_1}{\beta K_1} - 4(\beta K_1 - c_1) < 0$	Sadel	Sadel	Spiral Stabil

$\beta K_1 < c_1$		Sadel	Simpul Stabil	Titik tetap negatif
-------------------	--	-------	---------------	---------------------

Dengan memilih nilai parameter $K = 110, r = 1.1, c = 0.9, \beta = 0.1, \alpha = 0.01$ dan $E = 0.1$ akan diperoleh solusi seperti dalam Gambar 1 berikut



Gambar 1 Bidang fase dan bidang solusi simulasi 1

3.2 Model dengan waktu tunda ($\tau > 0$)

Model mangsa pemangsa dengan waktu tunda yang diberikan pada persamaan (3.2) dianalisis dengan menggunakan pendekatan model linear di titik tetap T_3 . Untuk itu dimisalkan $u(t) = x(t) - x^*, v(t) = y(t) - y^*$. Jika pemisalan tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan (3.2) dan menyederhanakannya, maka diperoleh

$$\frac{du(t)}{dt} = -\frac{r_1}{K_1} x^* u(t - \tau) - \alpha x^* v(t) \tag{3.4}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = \beta y^* u(t)$$

Analisis kestabilan di titik tetap T_3 pada model (3.4) ekuivalen dengan analisis kestabilan dari titik tetap model persamaan (3.2) setelah dilinearisasi. Jika persamaan pertama pada persamaan (3.4) diturunkan terhadap t kemudian menggunakan persamaan kedua pada persamaan (3.4), maka diperoleh

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -\frac{r_1}{K_1} x^* \frac{du(t - \tau)}{dt} - \alpha x^* \beta y^* u(t)$$

Jika penyelesaian $u = e^{\lambda t}$ digunakan, maka diperoleh

$$\lambda^2 + \lambda P_1 e^{-\lambda \tau} + Q_1 = 0 \tag{3.5}$$

dengan $P_1 = \frac{r_1}{K_1} x^*$, dan $Q_1 = \alpha \beta x^* y^*$. Berdasarkan persamaan (3.5) dapat disimpulkan bahwa matriks Jacobi dari persamaan (3.2) di titik tetap T_3 berbentuk

$$J = \begin{pmatrix} -\frac{r_1}{K_1} x^* e^{-\lambda \tau} & -\alpha x^* \\ \beta y^* & 0 \end{pmatrix}$$

Bifurkasi Hopf terjadi pada saat nilai eigen berbentuk $\lambda = \pm i\omega$, $\omega > 0$ [4]. Dengan memisalkan nilai eigen $\lambda = \pm i\omega$, $\omega > 0$, kemudian disubstitusikan ke dalam persamaan (3.5) akan didapatkan persamaan karakteristik

$$-\omega^2 + iP_1\omega \cos \omega\tau + P_1\omega \sin(\omega\tau) + Q_1 = 0. \quad (3.6)$$

Kemudian dengan memisahkan bagian real dan imajiner pada persamaan (3.6) diperoleh

$$\begin{aligned} -\omega^2 + P_1\omega \sin(\omega\tau) + Q_1 &= 0 \\ P_1\omega \cos \omega\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Berdasarkan persamaan (3.7) diperoleh $\cos \omega\tau = 0$ sehingga

$$\begin{aligned} \omega\tau^+ &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \omega\tau^- &= \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

atau

$$\tau_k^+ = \frac{\pi}{2\omega_+} + \frac{2k\pi}{\omega_+}, \quad \tau_k^- = \frac{3\pi}{2\omega_+} + \frac{2k\pi}{\omega_+}, \quad k = 0,1,2, \dots \quad (3.8)$$

dengan τ_k^\pm adalah nilai waktu tunda τ pada jarak $k = 0,1,2, \dots$. Selanjutnya persamaan (3.7) dikuadratkan, maka diperoleh

$$\begin{aligned} P_1^2\omega^2 \sin^2 \omega\tau &= \omega^4 - 2Q_1\omega^2 + Q_1 \\ P_1^2\omega^2 \cos^2 \omega\tau &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Jika kedua persamaan pada persamaan (3.9) dijumlahkan, maka diperoleh persamaan polinomial untuk ω sebagai berikut

$$\omega^4 - P_1^2 + 2Q_1\omega^2 + Q_1^2 = 0$$

dengan akar-akar penyelesaian berbentuk:

$$\omega_\pm^2 = \frac{1}{2} (P_1^2 + 2Q_1) \pm \sqrt{P_1^2 + 4Q_1}. \quad (3.10)$$

Dari persamaan (3.10), didapatkan solusi positif pada ω_\pm^2 . Selanjutnya dapat ditemukan nilai τ_k^\pm dengan mensubstitusikan ω_\pm^2 ke dalam persamaan (3.8).

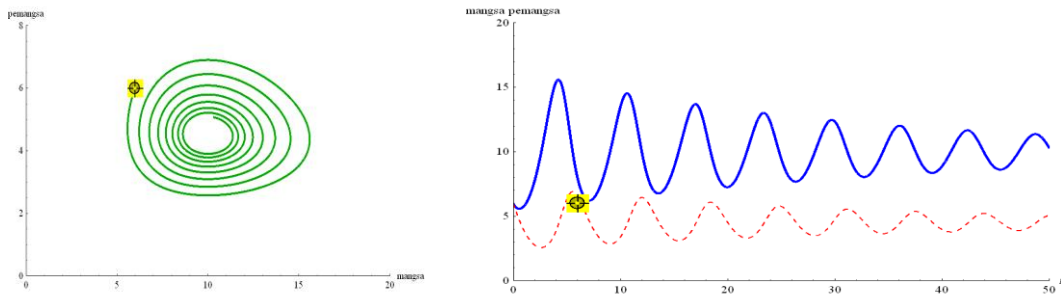
Pada kasus ini, nilai parameter yang digunakan sama dengan tanpa waktu tunda yaitu $r = 1.1$, $K = 110$, $\alpha = 0.2$, $c = 0.9$, $\beta = 0.1$, dan $E = 0.1$. Selanjutnya dilakukan pemilihan nilai waktu tunda yang memenuhi Tabel 2 yang sesuai dengan nilai τ_k^\pm pada persamaan (3.8).

Tabel 2 Pemilihan nilai waktu tunda

k	τ_k^+	τ_k^-
0	1.57080	5.23599
1	7.85398	12.21730
2	14.13717	19.19862
3	20.42035	26.17994
4	26.70354	33.16126
5	32.98672	40.14257

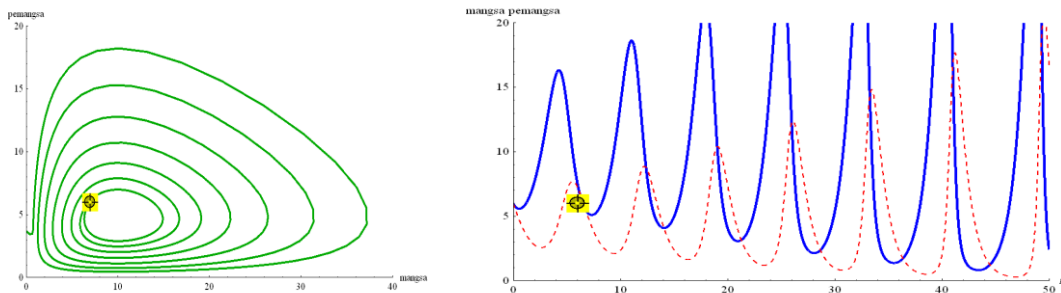
Berikut akan diberikan simulasi nilai-nilai τ yang berada di sekitar nilai-nilai batas yang dituliskan dalam Tabel 1 di atas. Pertama diberikan nilai $\tau < \tau_0^+$. Selanjutnya berturut-turut akan dipilih : $\tau_0^+ < \tau < \tau_0^-$, $\tau_0^- < \tau < \tau_1^+$, $\tau_1^+ < \tau < \tau_1^-$, dan $\tau_1^- < \tau < \tau_2^+$. Tanpa mengurangi keumuman, dalam simulasi ini dipilih $\tau = 1, 3, 6, 10$ dan 14 .

Dengan memilih $\tau = 1$, sistem bersifat spiral stabil seperti yang ditunjukkan dalam Gambar 2. Sistem masih memiliki perilaku yang sama dengan sistem tanpa waktu tunda (bandingkan hasilnya dengan Gambar 1 sebelumnya).



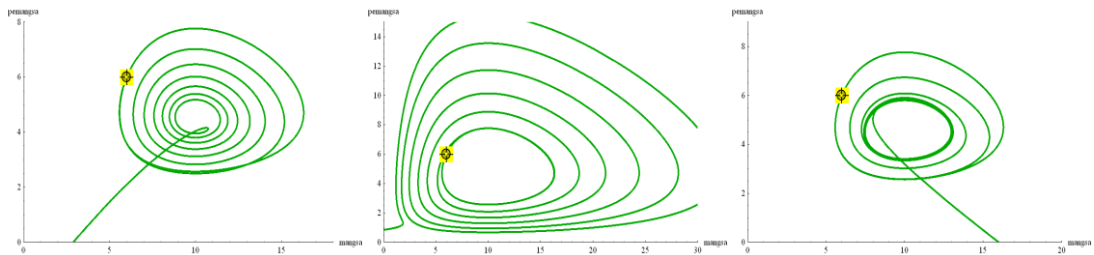
Gambar 2 Bidang fase dan solusi dengan waktu tunda $\tau = 1$

Dengan menaikkan nilai τ dan melewati ambang batas nilai $\tau_0^+ = 1.57080$ maka perilaku sistem akan berubah menjadi tidak stabil seperti diperlihatkan dalam Gambar 3 berikut ini. Karena pengaruh titik tetap ke satu dan ke dua yang sadel, ketidakstabilan titik tetap ini akan terbatas pada suatu *limit cycle*. Berarti dalam sistem ini telah terjadi bifurkasi Hopf [4].



Gambar 3 Bidang fase dan solusi dengan waktu tunda $\tau = 3$

Dalam Gambar 4 berikut, ditunjukkan berturut-turut adalah bidang fase dengan waktu tunda $\tau = 6$, $\tau = 10$ dan $\tau = 14$. Setelah munculnya *limit cycle* pada nilai $\tau = 3$ dan sistem menjadi spiral tak stabil, maka jika nilai τ dinaikkan melewati batas $\tau = 5.23599$, sistem menjadi spiral stabil kembali. Jika nilai ini dinaikkan lagi, maka sistem akan berganti lagi menjadi spiral tak stabil demikian seterusnya, seperti dalam rangkaian Gambar 4 berikut.



Gambar 4 Bidang fase dengan waktu tunda $\tau = 6$, $\tau = 10$ dan $\tau = 14$.

Dari rangkaian simulasi di atas, telah ditunjukkan secara simulatif, bahwa membesarnya nilai waktu tunda akan menyebabkan perubahan ketidakstabilan sistem yang berganti-ganti antara spiral stabil menjadi spiral tak stabil dan sebaliknya.

4. KESIMPULAN

Dari analisis model tanpa waktu tunda diperoleh tiga titik tetap. Kestabilan titik tetap pertama selalu bersifat sadel, sedangkan titik tetap kedua akan bersifat sadel atau stabil tergantung parameter laju interaksi pemangsa terhadap mangsa yang digunakan. Sedangkan untuk titik tetap ketiga yang bernilai positif bersifat stabil. Parameter laju interaksi pemangsa dan laju interaksi mangsa mempengaruhi percepatan kestabilan dan pertumbuhan populasi mangsa pemangsa berdasarkan titik tetap model.

Populasi mangsa pemangsa pada model juga dipengaruhi oleh adanya waktu tunda terhadap mangsa dan upaya pemanenan. Populasi mangsa dengan waktu tunda akan mengalami perubahan kestabilan dari stabil ke tidak stabil dan sebaliknya. Membesarnya nilai waktu tunda mengakibatkan terjadinya bifurkasi Hopf dan munculnya *limit cycle*. Kondisi bifurkasi Hopf akan terulang kembali pada saat nilai waktu tunda dinaikkan lagi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Ruan S. 2009. On Nonlinear Dynamics of *Predator-Prey* Models with Discrete Delay. *Math. Model. Nat. Phenom.* 4:140-188.
- [2] Baretta E, Kuang Y. 1996. Convergence Results in a Well-Known Delayed *Predator-Prey* System. *Journal Mathematics Analysis* **204**:840-853.
- [3] Toaha S, Hasan MA, Ismail F, June LW. 2008. Stability Analysis and Maximum Profit of *Predator-Prey* Population Model with Time Delay and Constant Effort of Harvesting. *Malaysian Journal of Mathematical Sciences* (2):147-159.
- [4] Strogatz SH. 1994. *Nonlinear Dynamics and Chaos, with Application to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Massachusetts (US): Addison-Wesley Publishing Company.
- [5] Kuang, Y, *Delay Differential Equation with Application in Population Dynamics*, Boston: Academic Press, 1993.