

VOLUME 2/NO.1/2014

ISN : 2337-392X



PROSIDING

**SEMINAR NASIONAL MATEMATIKA,
STATISTIKA, PENDIDIKAN MATEMATIKA,
DAN KOMPUTASI**

Peranan Matematika dan Statistika dalam Menyikapi Perubahan Iklim



<http://seminar.mipa.uns.ac.id>

**Jurusan Matematika
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Sebelas Maret Surakarta
Jl. Ir. Sutami 36 A Solo - Jawa Tengah**

Tim Prosiding

Editor

Purnami Widyaningsih, Respatiwan, Sri Kuntari,
Nughthoh Arfawi Kurdhi, Putranto Hadi Utomo, dan Bowo Winarno

Tim Teknis

Hamdani Citra Pradana, Ibnu Paxibrata, Ahmad Dimyathi,
Eka Ferawati, Meta Ilafiani, Dwi Ardian Syah,
dan Yosef Ronaldo Lete B.

Layout & Cover

Ahmad Dimyathi

Tim Reviewer

Drs. H. Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.
Dr. Sri Subanti, M.Si.
Dr. Dewi Retno Sari Saputro, MKom.
Drs. Muslich, M.Si.
Dra. Mania Roswitha, M.Si.
Dra. Purnami Widyaningsih, M.App.Sc.
Drs. Pangadi, M.Si.
Drs. Sutrima, M.Si.
Drs. Sugiyanto, M.Si.
Dra Etik Zukhronah, M.Si.
Dra Respatiwulan, M.Si.
Dra. Sri Sulistijowati H., M.Si.
Irwan Susanto, DEA
Winita Wulandari, M.Si.
Sri Kuntari, M.Si.
Titin Sri Martini, M.Kom.
Ira Kurniawati, M.Pd.

Steering Committee

Prof. Drs.Tri Atmojo Kusmayadi, M.Sc., Ph.D.
Prof. Dr. Budi Murtiyasa, M.Kom.
Prof. Dr. Dedi Rosadi, M.Sc.
Prof. Dr. Ir. I Wayan Mangku, M.Sc.
Prof. Dr. Budi Nurani, M.S.
Dr. Titin Siswantining, DEA
Dr. Mardiyana, M.Si.
Dr. Sutikno, M.Si.

KATA PENGANTAR

Puji syukur dipanjatkan kepada Tuhan Yang Maha Esa sehingga prosiding seminar nasional Statistika, Pendidikan Matematika dan Komputasi ini dapat diselesaikan.


Prosiding ini bertujuan mendokumentasikan dan mengkomunikasikan hasil presentasi paper pada seminar nasional dan terdiri atas 95 *paper* dari para pemakalah yang berasal dari 30 perguruan tinggi/politeknik dan institusi terkait. Paper tersebut telah dipresentasikan di seminar nasional pada tanggal 18 Oktober 2014. Paper didistribusikan dalam 7 kategori yang meliputi kategori Aljabar 14%, Analisis 9%, Kombinatorik 8%, Matematika Terapan 14%, Komputasi 7%, Statistika Terapan 27%, dan Pendidikan Matematika 19%.

Terima kasih disampaikan kepada pemakalah yang telah berpartisipasi pada desiminasi hasil kajian/penelitian yang dimuat pada prosiding ini. Terimakasih juga disampaikan kepada tim *reviewer*, tim prosiding, dan *steering committee*.

Semoga prosiding ini bermanfaat.

Surakarta, 28 Oktober 2014

Ketua Panitia



Dr. Dewi Retno Sari Saputro, M.Kom

The image shows a circular logo for the 'Seminar Nasional Matematika Universitas Sebelas Maret 2014'. The logo features a blue star with '2014' in the center, surrounded by the text 'Seminar Nasional Matematika' and 'Universitas Sebelas Maret'. A handwritten signature in black ink is written over the logo and extends to the right.

DAFTAR ISI

	Halaman
Halaman Judul	i
Tim Prosiding	ii
Tim <i>Reviewer</i>	iii
<i>Steering Committee</i>	iv
Kata Pengantar	v
Daftar Isi	vi

BIDANG ALJABAR

Bentuk-Bentuk Ideal pada Semiring $(\mathbf{D}_{n \times n}(\mathbb{Z}^+), +, \cdot)$ <i>Dian Winda Setyawati</i>	1
Penentuan Lintasan Kapasitas Interval Maksimum dengan Pendekatan Aljabar Max-Min Interval <i>M. Andy Rudhito dan D. Arif Budi Prasetyo</i>	8
Karakterisasi Aljabar Pada Graf Bipartit <i>Soleha, Dian W. Setyawati</i>	18
Semigrup Bentuk Bilinear Terurut Parsial Reguler Lengkap dalam Batasan Quasi-Ideal <i>Fuzzy</i> <i>Karyati, Dhoriva Urwatul Wutsqa</i>	26
Syarat Perlu dan Cukup Ring Lokal Komutatif Agar Ring Matriksnya Bersih Kuat (-Reguler Kuat) <i>Anas Yoga Nugroho, Budi Surodjo</i>	34
Sifat-sifat Modul Komultiplikasi Bertingkat <i>Putri Widi Susanti, Indah Emilia Wijayanti</i>	42
Ideal dari Ring Polinomial $F_n^2[x] \text{ mod}(x^n-1)$ untuk Kontrol Kesalahan dalam Aplikasi Komputer <i>Komar Baihaqi dan Iis Herisman</i>	49
Submodul Hampir Prima <i>Dyana Patty, Sri Wahyuni</i>	55
Subgrup Normal suatu Grup Perkalian dari Ring Pembagian yang Radikal atas Subring Pembagian Sejati <i>Juli Loisiana Butarbutar dan Budi Surodjo</i>	64
Sifat dan Karakterisasi Submodul Prima Lemah $S(N)$ <i>Rosi Widia Asiani, Sri Wahyuni</i>	73
Modul Distributif dan Multiplikasi <i>Lina Dwi Khusnawati, Indah Emilia Wijayanti</i>	83

Penjadwalan Keberangkatan Kereta Api di Jawa Timur dengan Menggunakan Model Petrinet dan Aljabar Max-plus Ahmad Afif, Subiono	92
Optimalisasi Norm Daerah Hasil dari Himpunan Bayangan Matriks Aljabar Maks-Plus dengan Sebagian Elemen Ditentukan <i>Antin Utami Dewi, Siswanto, dan Respatiwulan</i>	107
Himpunan Bayangan Bilangan Bulat Matriks Dua Kolom dalam Aljabar Maks-Plus <i>Nafi Nur Khasana, Siswanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	112
BIDANG ANALISIS	
Ruang 2-Norma Selisih <i>Sadjidon, Mahmud Yunus, dan Sunarsini</i>	120
Teorema Titik Tetap Pemetaan Kontraktif pada Ruang $C[a,b]$ -Metrik $(\ell_p, d^{C[a,b]})$ <i>Sunarsini, Sadjidon, Mahmud Yunus</i>	124
Generalisasi Ruang Barisan Yang Dibangkitkan Oleh Fungsi Orlicz <i>Nur Khusnussa'adah dan Supaman</i>	132
Gerakan Kurva Parameterisasi Pada Ruang Euclidean <i>Iis Herisman dan Komar Baihaqi</i>	141
Penggunaan Metode Transformasi Diferensial Fraksional dalam Penyelesaian Masalah Sturm-Liouville Fraksional untuk Persamaan Bessel Fraksional <i>Marifatun, Sutrima, dan Isnandar Slamet</i>	148
Konsep Topologi Pada Ruang $C[a,b]$ <i>Muslich</i>	155
Kekompakan Terkait Koleksi Terindeks Kontinu dan Ruang Topologis Produk <i>Hadrian Andradi, Atok Zulijanto</i>	162
A Problem On Measures In Infinite Dimensional Spaces <i>Herry Pribawanto Suryawan</i>	171
Masalah Syarat Batas Sturm-Liouville Singular Fraksional untuk Persamaan Bessel <i>Nisa Karunia, Sutrima, Sri Sulistijowati H</i>	179
BIDANG KOMBINATORIK	
Pelabelan Selimut (a,d) -H-Anti Ajaib Super pada Graf Buku <i>Frey Kurnita Sari, Mania Roswitha, dan Putranto Hadi Utomo</i>	187

Digraf Eksentrik Dari Graf Hasil Korona Graf Path Dengan Graf Path <i>Putranto Hadi Utomo, Sri Kuntari, Tri Atmojo Kusmayadi</i>	193
Super (a, d) -H-Antimagic Covering On Union Of Stars Graph <i>Dwi Suraningsih, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i>	198
Dimensi Metrik pada Graf <i>Umbrella</i> <i>Hamdani Citra Pradana dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>	202
Dimensi Metrik pada Graf <i>Closed Helm</i> <i>Deddy Rahmadi dan Tri Atmojo Kusmayadi</i>	210
Pelabelan Selimut (a,b) - C_{s+2} -Anti Ajaib Super pada Graf <i>Generalized Jahangir</i> <i>Anna Amandha, Mania Roswitha, dan Bowo Winarno</i>	215
Super (a,d) -H-Antimagic Total Labeling On Sun Graph <i>Marwah Wulan Mulia, Mania Roswitha, and Putranto Hadi Utomo</i>	223
Maksimum dan Minimum Pelabelan γ pada Graf <i>Flower</i> <i>Tri Endah Puspitosari, Mania Roswitha, Sri Kuntari</i>	231

BIDANG MATEMATIKA TERAPAN

Penghitungan Volume Konstruksi dengan Potongan Melintang <i>Mutia Lina Dewi</i>	238
Pola Pengubinan Parabolis <i>Theresia Veni Dwi Lestari dan Yuliana Pebri Heriawati</i>	247
Analisis Kestabilan Model Mangsa Pemangsa Hutchinson dengan Waktu Tunda dan Pemanenan Konstan <i>Ali Kusnanto, Lilis Saodah, Jaharuddin</i>	257
Susceptible Infected Zombie Removed (SIZR) Model with Quarantine and Antivirus <i>Lilik Prasetyo Pratama, Purnami Widyaningsih, and Sutanto</i>	264
Model Endemik <i>Susceptible Exposed Infected Recovered Susceptible (SEIRS)</i> pada Penyakit Influenza <i>Edwin Kristianto dan Purnami Widyaningsih</i>	272
Churn Phenomenon Pengguna Kartu Seluler dengan Model <i>Predator-Prey</i> <i>Rizza Muamar As-Shidiq, Sutanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	279
Pemodelan Permainan <i>Flow Colors</i> dengan <i>Integer Programming</i> <i>Irfan Chahyadi, Amril Aman, dan Farida Hanum</i>	283
Optimasi Dividen Perusahaan Asuransi dengan Besarnya Klaim Berdistribusi Eksponensial <i>Ali Shodiqin, Supandi, Ahmad Nashir T</i>	292

Permasalahan Kontrol Optimal Dalam Pemodelan Penyebaran Penyakit <i>Rubono Setiawan</i>	300
Model Pengoptimuman <i>Dispatching</i> Bus pada Transportasi Perkotaan: Studi Kasus pada Beberapa Koridor Trans Jakarta <i>Farida Hanum, Amril Aman, Toni Bakhtiar, Irfan Cahyadi</i>	306
Model Pengendalian Epidemi dengan Vaksinasi dan Pengobatan <i>Toni Bachtiar dan Farida Hanum</i>	315
How Realistic The Well-Known Lotka-Volterra Predator-Prey Equations Are <i>Sudi Mungkasi</i>	323
Aplikasi Kekongruenan Modulo pada Algoritma Freund dalam Penjadwalan Turnamen <i>Round Robin</i> <i>Esthi Putri Hapsari, Ira Kurniawati</i>	334
BIDANG KOMPUTASI	
Aplikasi Algoritma Enkripsi Citra <i>Digital</i> Berbasis <i>Chaos</i> Menggunakan <i>Three Logistic Map</i> <i>Suryadi MT, Dhian Widya</i>	344
Implementasi Jaringan Syaraf Tiruan Untuk Mengklasifikasi Kualitas Citra Ikan <i>Muhammad Jumnahdi</i>	352
Sistem Pengkonversi Dokumen eKTP/SIM Menjadi Suatu Tabel <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Muhammad Mushonnif Junaidi</i>	360
Kriptografi Kurva Eliptik Elgamal Untuk Proses Enkripsi-Dekripsi Citra Digital Berwarna <i>Daryono Budi Utomo, Dian Winda Setyawati dan Gestihayu Romadhoni F.R</i>	373
Penerapan <i>Assosiation Rule</i> dengan Algoritma Apriori untuk Mengetahui Pola Hubungan Tingkat Pendidikan Orang Tua terhadap Indeks Prestasi Kumulatif Mahasiswa <i>Kuswari Hernawati</i>	384
Perancangan Sistem Pakar Fuzzy Untuk Pengenalan Dini Potensi Terserang Stroke <i>Alvida Mustika R., M Isa Irawan dan Harmuda Pandiangan</i>	394
Miniatur Sistem Portal Semiotomatis Berbasis Sidik Jari pada Area Perpakiran <i>Nurul Hidayat, Ikhwan Muhammad Iqbal, dan Devy Indria Safitri</i>	405

BIDANG STATISTIKA

Uji Van Der Waerden Sebagai Alternatif Analisis Ragam Satu Arah <i>Tanti Nawangsari</i>	417
Analisis Faktor-Faktor Yang Mempengaruhi Keberhasilan Mahasiswa Politeknik (Studi Kasus Mahasiswa Polban) <i>Euis Sartika</i>	425
Distribusi Prior Dirichlet yang Diperumum sebagai Prior Sekawan dalam Analisis Bayesian <i>Feri Handayani, Dewi Retno Sari Saputro</i>	439
Pemodelan Curah Hujan Dengan Metode <i>Robust</i> Kriging Di Kabupaten Sukoharjo <i>Citra Panindah Sari, Dewi Retno Sari S, dan Muslich</i>	444
Premi Tunggal Bersih Asuransi Jiwa Endowment Unit Link Dengan Metode Annual Ratchet <i>Ari Cahyani, Sri Subanti, Yuliana Susanti</i>	453
Uji Siegel-Tukey untuk Pengujian Efektifitas Obat Depresan pada Dua Sampel Independen <i>David Pratama dan Getut Pramesti</i>	462
Aplikasi <i>Almost Stochastic Dominance</i> dalam Evaluasi Hasil Produksi Padi di Indonesia <i>Kurnia Hari Kusuma, Isnandar Slamet, dan Sri Kuntari</i>	470
Pendeteksian Krisis Keuangan Di Indonesia Berdasarkan Indikator Nilai Tukar Riil <i>Dewi Retnosari, Sugiyanto, Tri Atmojo</i>	475
Pendekatan <i>Cross-Validation</i> untuk Pendugaan Data Tidak Lengkap pada Pemodelan AMMI Hasil Penelitian Kuantitatif <i>Gusti Ngurah Adhi Wibawa dan Agusrawati</i>	483
Aplikasi Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Triangle pada Data Meteo Vertical dan Ozon Vertikal, Tanggal 30 Januari 2013 <i>Nanang Widodo, Tony Subiakto, Dian Yudha R, Lalu Husnan W</i>	493
Pemodelan Indeks Harga Saham Gabungan dan Penentuan Rank Correlation dengan Menggunakan Copula <i>Ika Syattwa Bramantya, Retno Budiarti, dan I Gusti Putu Purnaba</i>	502
Identifikasi Perubahan Iklim di Sentra Produksi Padi Jawa Timur dengan Pendekatan <i>Extreme Value Theory</i> <i>Sutikno dan Yustika Desi Wulan Sari</i>	513
Analisis Data Radiasi Surya dengan Pendekatan Regresi Nonparametrik Menggunakan Estimator Kernel Cosinus <i>Nanang Widodo, Noer Abdillah S.N.S.N, Dian Yudha Risdianto</i>	523

Pengujian Hipotesis pada Regresi Poisson Multivariate dengan Kovariansi Merupakan Fungsi dari Variabel Bebas <i>Triyanto, Purhadi, Bambang Widjanarko Otok, dan Santi Wulan Purnami</i>	533
Perbandingan Metode Ordinary Least Squares (OLS), Seemingly Unrelated Regression (SUR) dan Bayesian SUR pada Pemodelan PDRB Sektor Utama di Jawa Timur <i>Santosa, AB, Iriawan, N, Setiawan, Dohki, M</i>	544
Studi Model Antrian M/G/1: Pendekatan Baru <i>Isnandar Slamet</i>	557
Pengaruh Pertumbuhan Ekonomi dan Konsumsi Energi Terhadap Emisi CO ₂ di Indonesia: Pendekatan Model Vector Autoregressive (VAR) <i>Fitri Kartiasih</i>	567
Estimasi Parameter Model Epidemi <i>Susceptible Infected Susceptible (SIS)</i> dengan Proses Kelahiran dan Kematian <i>Pratiwi Rahayu Ningtyas, Respatiwulan, dan Siswanto</i>	578
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Harga Saham <i>Tri Marlina, Sugiyanto, dan Santosa Budi Wiyono</i>	584
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Kecamatan Rancaekek, Kabupaten Bandung <i>Gumgum Darmawan, Restu Arisanti, Triyani Hendrawati, Ade Supriatna</i>	592
Model Markov <i>Switching Autoregressive (MSAR)</i> dan Aplikasinya pada Nilai Tukar Rupiah terhadap Yen <i>Desy Kurniasari, Sugiyanto, dan Sutanto</i>	602
Pendeteksian Krisis Keuangan di Indonesia Berdasarkan Indikator Pertumbuhan Kredit Domestik <i>Pitaningsih, Sugiyanto, dan Purnami Widyaningsih</i>	608
Pemilihan Model Terbaik untuk Meramalkan Kejadian Banjir di Bandung dan Sekitarnya <i>Gumgum Darmawan, Triyani Hendrawati, Restu Arisanti</i>	615
Model Probit Spasial <i>Yuanita Kusuma Wardani, Dewi Retno Sari Saputro</i>	623
Peramalan Jumlah Pengunjung Pariwisata di Kabupaten Boyolali dengan Perbandingan Metode Terbaik <i>Indiawati Ayik Imaya, Sri Subanti</i>	628
Pemodelan Banyaknya Penderita Demam Berdarah <i>Dengue (DBD)</i> dengan Regresi <i>Kriging</i> di Kabupaten Sukoharjo <i>Sylviana Yusriati, Dewi Retno Sari Saputro, Sri Kuntari</i>	638

Ekspektasi Durasi Model Epidemio <i>Susceptible Infected (SI)</i> <i>Sri Kuntari, Respatiawulan, Intan Permatasari</i>	646
---	-----

BIDANG PENDIDIKAN

Konsep Pembelajaran Integratif dengan Matematika Sebagai Bahasa Komunikasi dalam Menyongsong Kurikulum 2013 <i>Surya Rosa Putra, Darmaji, Soleha, Suhud Wahyudi</i> ,	653
Penerapan Pendidikan Lingkungan Hidup Berbasis Pendidikan Karakter dalam Pembelajaran Matematika <i>Urip Tisngati</i>	664
Studi Respon Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika Berdasarkan Taksonomi SOLO (Structure of Observed Learned Outcome) <i>Herlin Widia, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i>	677
Desain Model Discovery Learning pada Mata Kuliah Persamaan Diferensial <i>Rita Pramujiyanti Khotimah, Masduki</i>	684
Efektivitas Pembelajaran Berbasis Media Tutorial Interaktif Materi Geometri <i>Joko Purnomo, Agung Handayanto, Rina Dwi Setyawati</i>	693
Pengembangan Modul Pembelajaran Matematika Menggunakan Pendekatan Problem Based Learning (PBL) Pada Materi Peluang Kelas VII SMP <i>Putri Nurika Anggraini, Imam Sujadi, Yemi Kuswardi</i>	703
Pengembangan Bahan Ajar Dalam Pembelajaran Geometri Analitik Untuk Meningkatkan Kemandirian Mahasiswa <i>Sugiyono, Himmawati Puji Lestari</i>	711
Pengembangan Strategi Pembelajaran Info Search Berbasis PMR untuk Meningkatkan Pemahaman Mata Kuliah Statistika Dasar 2 <i>Joko Sungkono, Yuliana, M. Wahid Syaifuddin</i>	724
Analisis Miskonsepsi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika Pada Mata Kuliah Kalkulus I <i>Sintha Sih Dewanti</i>	731
Kemampuan Berpikir Logis Mahasiswa yang Bergaya Kognitif Reflektif vs Impulsif <i>Warli</i>	742
Model Pembelajaran Berbasis Mobile <i>Yayu Laila Sulastri, Luki Luqmanul Hakim</i>	753

Profil Gaya Belajar Myers-Briggs Tipe Sensing-Intuition dan Strateginya Dalam Pemecahan Masalah Matematika <i>Rini Dwi Astuti, Urip Tisngati, Hari Purnomo Susanto</i>	760
Penggunaan Permainan Matematika Berbasis Lingkungan Hidup untuk Meningkatkan Minat dan Keterampilan Matematis Peserta Didik <i>Rita Yuliasstuti</i>	772
Tingkat Pemahaman Peserta PLPG Matematika Rayon 138 Yogyakarta Tahun 2014 Terhadap Pendekatan Saintifik Pada Kurikulum 2013 Berdasarkan Kuesioner Awal dan Akhir Pelatihan <i>Beni Utomo, V. Fitri Rianasari dan M. Andy Rudhito</i>	784
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Melalui Pendekatan RME dengan CD Interaktif Berbasis Pendidikan Karakter Materi Soal Cerita Kelas III <i>Sri Surtini, Ismartoyo, dan Sri Kadarwati</i>	791
E-Learning Readiness Score Sebagai Pedoman Implementasi E-Learning <i>Nur Hadi Waryanto</i>	805
Pengembangan Lembar Kerja Siswa (LKS) Matematika Realistik di SMP Berbasis Online Interaktif <i>Riawan Yudi Purwoko, Endro Purnomo</i>	817
IbM APE Matematika Bagi TK Pinggiran Di Kota Malang <i>Kristina Widjajanti, Mutia Lina Dewi</i>	826

MODEL PENGENDALIAN EPIDEMI DENGAN VAKSINASI DAN PENGOBATAN

Toni Bakhtiar dan Farida Hanum
Departemen Matematika, Institut Pertanian Bogor

ABSTRAK. Tulisan ini membahas strategi pengendalian epidemi melalui vaksinasi dan pengobatan. Model umum epidemi dinyatakan dalam model kompartemental SIR. Vaksinasi dan pengobatan diterapkan secara sendiri-sendiri maupun secara simultan dengan fungsional objektif meminimumkan jumlah individu terinfeksi sekaligus meminimumkan biaya pengendalian. Prinsip maksimum Pontryagin diterapkan untuk menurunkan sistem persamaan diferensial sebagai kondisi yang harus dipenuhi variabel kontrol optimum. Metode Runge-Kutta orde-4 kemudian digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial tersebut. Sebuah contoh ilustratif dikemukakan untuk melihat pengaruh efektivitas kontrol terhadap tingkat infeksi.

Kata kunci: model kontrol optimum, prinsip maksimum Pontryagin, model epidemi SIR, metode Runge-Kutta.

1. MODEL SIR

Dalam pemodelan matematik penyebaran penyakit menular, seperti halnya di hampir semua masalah pemodelan secara umumnya, selalu dijumpai adanya *trade-off* antara model sederhana yang mengabaikan banyak detil dan dibangun untuk menjelaskan interksi kualitatif secara umum, dan model kompleks yang detil dan disusun untuk menggambarkan situasi yang khusus. Model kompleks umumnya sangat sulit atau bahkan tidak mungkin diselesaikan secara analitik sehingga kontribusi secara teori sangat terbatas. Namun demikian di situasi yang sangat khusus, penggunaan model sederhana tidak cukup menjelaskan sehingga penghitungan numerik menjadi pendekatan yang diharapkan.

Model SIR merupakan model sederhana berbentuk sistem persamaan diferensial biasa yang menggambarkan dinamika keadaan individu dalam populasi. Variabel dalam sistem dinyatakan dalam bentuk kompartemen sesuai dengan nama model, yaitu kompartemen individu rentan (*susceptible*) dan dilambangkan dengan S , kompartemen individu terinfeksi (*infected*) dan dilambangkan dengan I , serta kompartemen individu sembuh (*removed*) dan dilambangkan dengan R . Model matematik yang menyertainya menjelaskan pergerakan masuk dan keluar antarkompartemen. Pergerakan tersebut meliputi kelahiran, kematian, penyebaran penyakit, dan penyembuhan. Transisi antarkompartemen terjadi menurut laju (turunan terhadap waktu), yang dalam kasus paling sederhana diasumsikan konstan, seperti laju kelahiran, laju kematian, dan laju penyembuhan.

Pemodelan SIR di bidang epidemiologi pertama kali dilakukan oleh Kermack dan McKendrick [9]. Setelah itu, karena kesederhanaannya, model SIR mengalami perkembangan yang pesat dalam hal penerapannya di berbagai kasus penyebaran penyakit menular seperti kolera [20], influenza H1N1 [3, 6, 7], campak [14], leptospirosis [16], AIDS [17], rabies [4], cacar [12], dan penyakit menular yang disebabkan oleh vektor [15]. Berbagai varian perkembangan model SIR diajukan untuk membuatnya lebih realistis dan mampu menggambarkan situasi yang lebih khusus, seperti model diskret [3], model dengan waktu tunda

[7, 16] dan *time scales* [14], model dengan sumber daya terbatas [8], model dengan saturasi [10, 11], serta model dengan tambahan kompartemen [4].

Tujuan dari tulisan ini ialah menganalisis efektivitas vaksinasi dan pengobatan dalam mengendalikan epidemi. Model umum SIR digunakan untuk menggambarkan interaksi antarkompartemen pada populasi yang terkena epidemi. Pada bab selanjutnya akan diketengahkan model SIR tanpa kontrol serta model SIR dengan satu dan dua kontrol.

2. MODEL TANPA KONTROL

Untuk memodelkan epidemi, populasi dibagi menjadi tiga kompartemen, yaitu S , I , dan R . Banyaknya individu dalam populasi pada saat t yang rentan dan belum terkena penyakit, terinfeksi dan dapat menyebarkan penyakit ke individu rentan melalui kontak, dan sembuh tanpa kemungkinan terinfeksi lagi, berturut-turut dilambangkan dengan $S(t)$, $I(t)$, dan $R(t)$. Dinamika interaksi antarkompartemen mengikuti sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta \frac{SI}{N}, \quad (2.1)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (\mu + d + r)I, \quad (2.2)$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R, \quad (2.3)$$

dengan nilai-nilai awal $S(0) = S_0 > 0$, $I(0) = I_0 > 0$, dan $R(0) = R_0 > 0$. Pada model di atas, Λ adalah laju kelahiran yang menunjukkan besarnya penambahan individu rentan baru ke dalam populasi, μ adalah laju kematian alami, d merupakan laju kematian karena adanya penyakit (*disease induced mortality rate*), r adalah laju penyembuhan sendiri menuju kekebalan (*self recovery rate*), β merupakan laju kontak efektif yang merupakan komposit dari laju kontak dan besarnya peluang terjadinya penularan akibat kontak, dan N merupakan populasi total, yaitu $N(t) = S(t) + I(t) + R(t)$.

Model (2.1)–(2.3) memiliki dua titik kesetimbangan, yaitu titik tetap bebas penyakit $T_1(\frac{\Lambda}{\mu}, 0, 0$ dan titik tetap epidemik $T_2(S^*, I^*, R^*)$, dengan

$$S^* = \frac{(\mu + d + r)N}{\beta}, \quad (2.4)$$

$$I^* = \frac{\Lambda\beta - (\mu + d + r)N\mu}{\beta(\mu + d + r)}, \quad (2.5)$$

$$R^* = \frac{r\Lambda\beta - (\mu + d + r)Nr\mu}{\beta\mu(\mu + d + r)}. \quad (2.6)$$

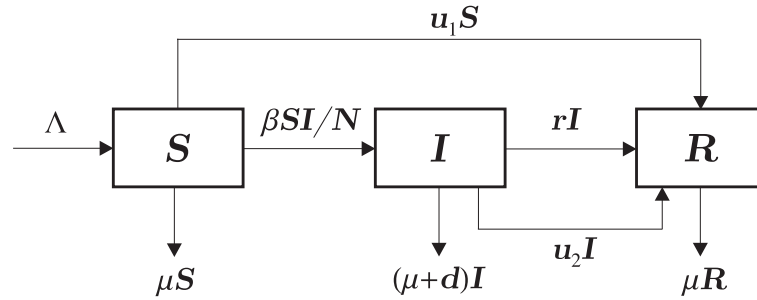
Jika diasumsikan $\Lambda = \mu N$ maka keberadaan T_2 di kuadran pertama dijamin asalkan $\beta > \mu + d + r$. Dengan menggunakan metode *next generation matrix* [5] dapat diperoleh bilangan reproduksi dasar \mathcal{R}_0 sebagai berikut:

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + d + r}. \quad (2.7)$$

Titik tetap bebas penyakit bersifat stabil jika $\mathcal{R}_0 < 1$ dan bersifat takstabil jika $\mathcal{R}_0 > 1$.

3. MODEL DENGAN KONTROL

Teori kontrol optimum [19] merupakan metode yang dapat digunakan untuk menentukan nilai ekstremum suatu fungsional objektif yang melibatkan variabel dinamik. Proses memaksimumkan atau meminimumkan dilakukan dengan menyesuaikan peubah kontrol sehingga nilai maksimum atau minimum tercapai. Peubah kontrol yang menghasilkan



Gambar 1. Model SIR dengan dua peubah kontrol.

nilai ekstremum disebut sebagai kontrol optimum. Peubah kontrol biasanya merupakan fungsi dari waktu dan dapat digunakan dalam berbagai situasi permodelan. Dalam tulisan ini, dua peubah kontrol akan digunakan, yaitu vaksinasi dan pengobatan, yang secara berturut-turut dilambangkan dengan u_1 dan u_2 . Dalam hal ini, $u_1(t)$ dan $u_2(t)$ dapat dipandang sebagai besarnya dosis vaksinasi dan pengobatan yang digunakan dan diasumsikan terbatas. Vaksinasi diterapkan kepada individu rentan sedangkan pengobatan ditujukan kepada individu terinfeksi seperti pada Gambar 1.

Model epidemi dengan pengendalian seperti pada Gambar 1 dituliskan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = \Lambda - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - u_1 S, \tag{3.1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{SI}{N} - (\mu + d + r)I - u_2 I, \tag{3.2}$$

$$\frac{dR}{dt} = rI - \mu R + u_1 S + u_2 I, \tag{3.3}$$

dengan $a_1 \leq u_1 \leq b_1$ dan $a_2 \leq u_2 \leq b_2$ untuk bilangan-bilangan real taknegatif $a_1, b_1, a_2,$ dan b_2 . Kontrol-kontrol optimum u_1^* dan u_2^* dicari sedemikian sehingga meminimumkan fungsional objektif berikut:

$$J := \int_0^T (I(t) + \frac{1}{2}A_1 u_1^2(t) + \frac{1}{2}A_2 u_2^2(t)) dt. \tag{3.4}$$

Dari (3.4) dapat dilihat bahwa tujuan pengendalian epidemi ialah meminimumkan banyaknya individu yang terinfeksi penyakit sekaligus meminimumkan biaya pengendalian sampai periode T , dengan A_1 dan A_2 dapat dipandang sebagai bobot yang menunjukkan tingkat kepentingan relatif [2] atautkah biaya struktural [6].

4. KONTROL OPTIMUM

Ada tiga situasi yang akan dianalisis berkaitan dengan penerapan kontrol, yaitu (i) vaksinasi merupakan satu-satunya kontrol yang diterapkan, yaitu $u_1 \neq 0$ dan $u_2 = 0$, (ii) pengobatan merupakan satu-satunya kontrol yang diterapkan, yaitu $u_1 = 0$ dan $u_2 \neq 0$, dan (iii) vaksinasi dan pengobatan diterapkan bersama-sama, yaitu $u_1 \neq 0$ dan $u_2 \neq 0$. Prinsip maksimum Pontryagin [19] digunakan untuk menurunkan kondisi-kondisi yang harus dipenuhi oleh kontrol optimum.

Secara umum fungsi hamilton H didefinisikan berdasarkan model (3.1)–(3.3) dan fungsional objektif (3.4) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 H = I + \frac{1}{2}A_1u_1^2 + \frac{1}{2}A_2u_2^2 + p_1 \left(\Lambda - \mu S - \beta \frac{SI}{N} - u_1S \right) \\
 + p_2 \left(\beta \frac{SI}{N} - (\mu + d + r)I - u_2I \right) \\
 + p_3 (rI - \mu R + u_1S + u_2I), \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

dengan $p_1(t)$, $p_2(t)$, dan $p_3(t)$ merupakan fungsi-fungsi adjoin yang dapat ditentukan melalui proses pengoptimuman. Syarat perlu optimalitas menurut prinsip maksimum Pontryagin diberikan oleh:

$$\frac{\partial H}{\partial u_i} = 0, \quad i = 1, 2, \tag{4.2}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i \in \{S, I, R\}, \tag{4.3}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad x_i \in \{S, I, R\}, \tag{4.4}$$

dan syarat transversalitas. Jika diinginkan titik-titik akhir $S(T)$, $I(T)$, dan $R(t)$ bebas maka syarat transversalitas $p_1(T) = p_2(T) = p_3(T) = 0$ harus dipenuhi.

4.1. Model Epidemi dengan Vaksinasi. Di bagian ini diasumsikan $u_1 \neq 0$ dan $u_2 = 0$, sehingga vaksinasi merupakan satu-satunya jalur intervensi model. Kondisi (4.2) memberikan

$$u_1^* = \frac{(p_1 - p_3)S}{A_1}.$$

Karena $a_1 \leq u_1 \leq b_1$ maka dituliskan

$$u_1^* = \begin{cases} a_1 & ; \frac{1}{A_1}(p_1 - p_3)S < a_1 \\ \frac{1}{A_1}(p_1 - p_3)S & ; a_1 \leq \frac{1}{A_1}(p_1 - p_3)S \leq b_1 \\ b_1 & ; \frac{1}{A_1}(p_1 - p_3)S > b_1 \end{cases}.$$

Bentuk di atas dapat dituliskan dalam notasi yang lebih ringkas sebagai berikut:

$$u_1^*(t) = \min \left\{ b_1, \max \left\{ a_1, \frac{1}{A_1}(p_1(t) - p_3(t))S(t) \right\} \right\}. \tag{4.5}$$

Kondisi (4.3) tentu saja memberikan model (3.1)–(3.3), sedangkan (4.4) bersama-sama asumsi titik akhir bebas memberikan sistem persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu p_1 + \beta \frac{I}{N}(p_1 - p_2) + u_1(p_1 - p_3), \quad p_1(T) = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \beta \frac{S}{N}(p_1 - p_2) + (\mu + d + r)p_2 - rp_3 - 1, \quad p_2(T) = 0, \tag{4.7}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \mu p_3, \quad p_3(T) = 0. \tag{4.8}$$

Kontrol optimum u_1^* diperoleh dengan cara menyelesaikan sistem persamaan diferensial (3.1)–(3.3), (4.6)–(4.7), dan (4.5) secara simultan.

4.2. Model Epidemii dengan Pengobatan. Di bagian ini diasumsikan $u_1 = 0$ dan $u_2 \neq 0$, sehingga pengobatan merupakan satu-satunya jalur intervensi model. Dapat diverifikasi dengan mudah bahwa jika $a_2 \leq u_2 \leq b_2$ kondisi (4.2) memberikan kontrol optimum berikut:

$$u_2^*(t) = \min \left\{ b_2, \max \left\{ a_2, \frac{1}{A_2} (p_2(t) - p_3(t)) I(t) \right\} \right\}. \tag{4.9}$$

Kondisi (4.4) bersama-sama asumsi titik akhir bebas memberikan sistem persamaan adjoin berikut:

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu p_1 + \beta \frac{I}{N} (p_1 - p_2), \quad p_1(T) = 0, \tag{4.10}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \beta \frac{S}{N} (p_1 - p_2) + (\mu + d + r) p_2 + u_2 (p_2 - p_3) - r p_3, \quad p_2(T) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \mu p_3, \quad p_3(T) = 0. \tag{4.12}$$

4.3. Model Epidemii dengan Vaksinasi dan Pengobatan. Jika vaksinasi dan pengobatan dilakukan pada waktu yang sama, yaitu $u_1 \neq 0$ dan $u_2 \neq 0$, maka diperoleh kontrol-kontrol optimum (4.5) dan (4.9), serta sistem persamaan adjoin berikut:

$$\frac{dp_1}{dt} = \mu p_1 + \beta \frac{I}{N} (p_1 - p_2) + u_1 (p_1 - p_3), \quad p_1(T) = 0, \tag{4.13}$$

$$\frac{dp_2}{dt} = \beta \frac{S}{N} (p_1 - p_2) + (\mu + d + r) p_2 + u_2 (p_2 - p_3) - r p_3 - 1, \quad p_2(T) = 0, \tag{4.14}$$

$$\frac{dp_3}{dt} = \mu p_3, \quad p_3(T) = 0. \tag{4.15}$$

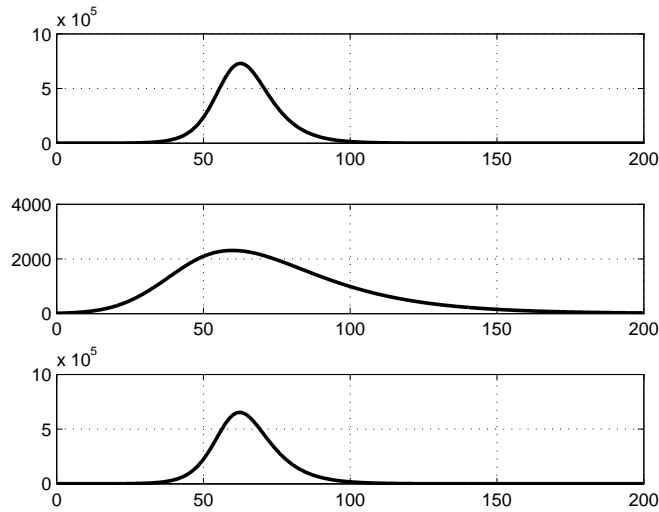
5. PENYELESAIAN NUMERIK

Di bab ini akan diperlihatkan efektivitas penerapan kontrol terhadap penyebaran penyakit. Nilai-nilai parameter berikut digunakan untuk menghitung penyelesaian numerik: $\Lambda = 237$, $\mu = 3.86 \times 10^{-5}$, $d = 0.5 \times 10^{-2}$, $r = 0.25$, $\beta = 0.46$, $S_0 = 6 \times 10^6$, $I_0 = 11$, $R_0 = 10$, $a_1 = a_2 = 0$, $b_1 = 0.01$, $b_2 = 0.03$, $A_1 = 10^8$, $A_2 = 2A_1$, dan $T = 200$.

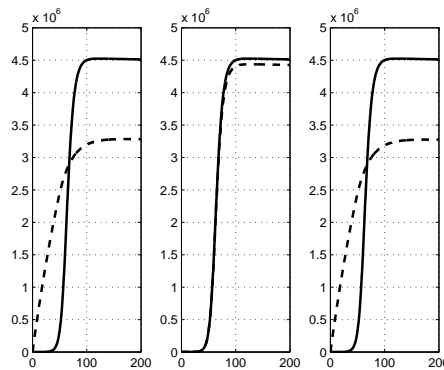
Penyelesaian nuemrik diperoleh dengan menggunakan metode Runge-Kutta orde-4. Pada kasus tanpa kontrol, sistem persamaan adjoin tidak ada sehingga algoritme iteratif maju (*forward in time*) dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem (3.1)–(3.3) dengan kondisi batas di awal waktu. Pada kasus dengan kontrol, sistem persamaan adjoin memiliki kondisi batas di akhir waktu. Hal ini memberikan masalah tersendiri dalam pembuatan penyelesai iteratif karena dari enam persamaan diferensial yang akan diselesaikan, tiga persamaan memiliki syarat nilai awal sehingga harus diselesaikan secara maju dan tiga persamaan lainnya memiliki syarat nilai akhir sehingga harus diselesaikan secara mundur (*backward in time*). Untuk kebutuhan ini dibuat program komputer bersifat iteratif untuk menyelesaikan sistem persamaan diferensial dengan tahapan sebagai berikut:

- (1) Tetapkan tebakan awal bagi peubah kontrol.
- (2) Selesaikan masalah nilai awal (3.1)–(3.3) secara maju.
- (3) Selesaikan sistem persamaan adjoin secara mundur dengan menggunakan informasi yang diperoleh di langkah sebelumnya.
- (4) Hitung peubah kontrol baru dengan menggunakan (4.5) dan/atau (4.9).
- (5) Perbarui nilai kontrol dengan rata-rata nilai kontrol lama dan baru.
- (6) Lakukan iterasi sampai mencapai batas toleransi yang ditetapkan.

Gambar 2 menunjukkan bahwa tanpa intervensi banyaknya individu terinfeksi akan mencapai puncaknya pada hari ke-63 sejumlah 730 ribu jiwa. Strategi vaksinasi terbukti



Gambar 2. Banyaknya individu terinfeksi: tanpa kontrol (atas), dengan vaksinasi (tengah), dengan pengobatan (bawah)

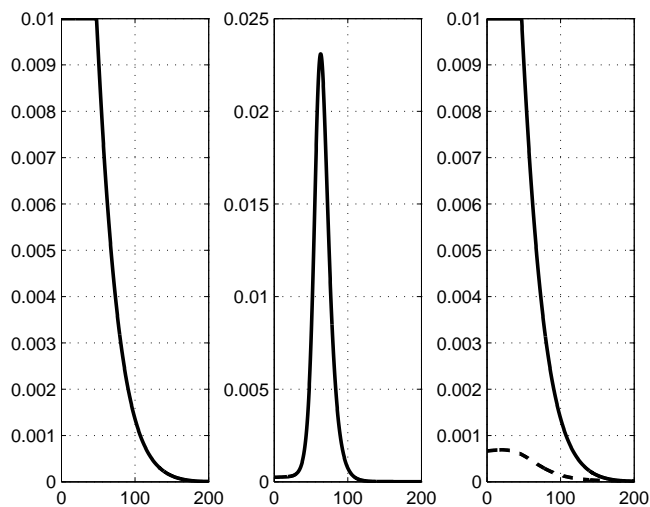


Gambar 3. Banyaknya individu rentan (kiri) dan sembuh (kanan) masing-masing dengan kontrol vaksinasi, pengobatan, dan keduanya. Banyaknya individu tanpa kontrol dilukiskan oleh garis penuh.

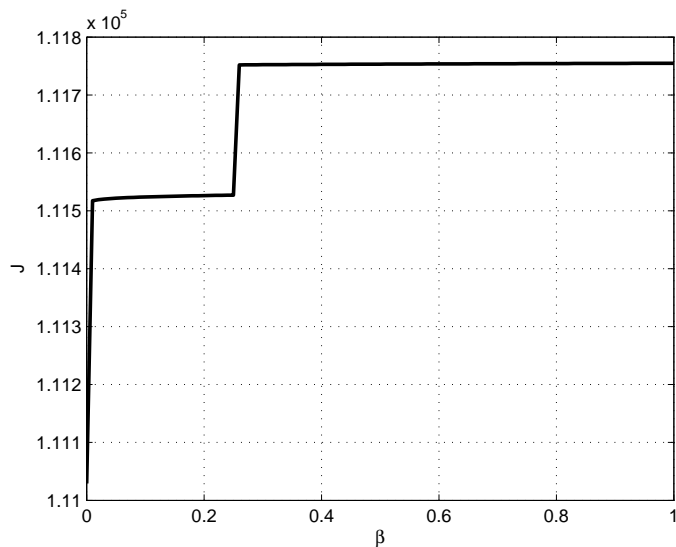
dapat mengurangi banyaknya individu terinfeksi hingga menjadi 2300 jiwa (99 persen) dengan puncak infeksi terjadi pada hari ke-60. Sementara itu strategi pengobatan hanya mampu menurunkan sekitar 10 persen. Meski banyaknya individu terinfeksi berkurang, kedua strategi pengendalian membuat banyaknya individu rentan bertambah sedangkan banyaknya individu sembuh berkurang seperti terlihat pada Gambar 3. Gambar 4 memberikan informasi bahwa program vaksinasi harus dilaksanakan dengan tingkat maksimum sampai hari ke-48 setelah itu terus diturunkan hingga akhir periode. Sementara itu program pengobatan dilaksanakan dengan tingkat 77 persen pada hari ke-63. Jika vaksinasi dan pengobatan diterapkan bersama-sama maka program vaksinasi harus dilaksanakan 100 persen sementara pengobatan hanya berperan 2.3 persen.

6. SIMPULAN DAN SARAN

Tulisan ini membahas penerapan vaksinasi dan pengobatan sebagai bentuk intervensi terhadap model epidemik berbentuk SIR. Dengan menerapkan program intervensi secara



Gambar 4. Kontrol optimum dengan vaksinasi (kiri), pengobatan (tengah), dan keduanya (kanan).



Gambar 5. Hubungan antara laju kontak efektif β dan fungsional objektif J .

sendiri-sendiri maupun bersamaan diperlihatkan bahwa program vaksinasi lebih efektif daripada program pengobatan dalam mengurangi banyaknya individu yang terinfeksi hingga 99 persen dari situasi ketika program pengendalian tidak diterapkan.

Telaah menarik dapat dilakukan dengan melihat pengaruh perubahan parameter model terhadap fungsional objektif optimum. Gambar 5 menunjukkan bahwa semakin sering terjadi kontak antara individu terinfeksi dan individu rentan yang ditunjukkan oleh β yang makin besar, maka dibutuhkan upaya pengendalian yang lebih intensif. Akibatnya fungsional objektif J sebagai *performance index* juga meningkat. Namun besarnya J cenderung konstan ketika $\beta \in [0.3, 1]$.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Alkama, M., M. Elhia, Z. Rachik, M. Rachik, dan E. Labriji. 2014. Free terminal time optimal control problem of an SIR epidemic model with vaccination. *International Journal of Science and Research*, vol. 3, no. 5: 227–230.
- [2] Bakare, E.A., A. Nwagwo, dan E. Danso-Addo. 2014. Optimal control analysis of an SIR epidemic model with constant recruitment. *International Journal of Applied Mathematical Research*, vol. 3, no. 3: 273–285.
- [3] Balatif, O., M. Elhia, J. Bouyaghroumni, dan M. Rachik. 2014. Optimal control strategy for a discrete SIR epidemic model. *International Journal of Applied Mathematics and Modeling*, vol.2, no. 2: 1–8.
- [4] Clayton, T., S. Duke-Sylvester, L.J. Gross, S. Lenhart dan L.A. Real. 2010. Optimal control of a rabies epidemic model with a birth pulse, *Journal of Biological Dynamics*, vol. 4, no. 1: 43–58.
- [5] Driessche, P.v.d. dan J. Watmough. 2002. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, vol. 180: 29–48.
- [6] Elhia, M., O. Balatif, J. Bouyaghroumni, E. Labriji, dan M. Rachik. 2012. Optimal control applied to the spread of influenza A (H1N1). *Applied Mathematical Sciences*, vol. 6, no. 82: 4057–4065.
- [7] Elhia, M., M. Rachik, dan E. Benlahmar. 2013. Optimal control of an SIR model with delay in state and control variables. *ISRN Biomathematics*. vol. 2013, Article ID 403549, 7 halaman.
- [8] Hansen, E. dan T. Day. 2011. Optimal control of epidemics with limited resources. *J. Math. Biol.*, vol. 62: 423–451.
- [9] Kermack, W.O. dan A.G. McKendrick. 1927. A contribution to the mathematical theory of epidemics. *Proc. Royal Soc. London*, vol. 115: 700–721.
- [10] Laarabi, L., E.H. Labriji, M. Rachik, dan A. Kaddar. 2012. Optimal control of an epidemic model with a saturated incidence rate. *Nonlinear Analysis: Modelling and Control*, vol. 17, no. 4: 448–459.
- [11] Laarabi, H., M. Rachik, O.E. Kahlaoui, dan E.H. Labriji. 2013. Optimal vaccination strategies of an SIR epidemic model with a saturated treatment. *Universal Journal of Applied Mathematics*, vol. 1, no. 3: 185–191.
- [12] Lawot, N. 2006. Mathematical modeling of smallpox with optimal intervention policy. *M.Sc. Thesis*. Department of Mathematics, College of Sciences, the University of Central Florida, Orlando, Florida.
- [13] Nainggolan, J., S. Supian, A.K. Supriatna, dan N. Anggriani. 2012. Kontrol optimal vaksinasi model epidemiologi tipe SIR. *Prosiding Seminar Nasional Matematika dan Pendidikan Matematika*, Jurusan Pendidikan Matematika FMIPA UNY.
- [14] Owuor, O.N., M. Johannes, dan M.S. Kibet. 2013. Optimal vaccination strategies in an SIR epidemic model with time scales. *Applied Mathematics*, vol. 4: 1–14.
- [15] Ozair, M., A.A. Lashari, I.H. Jung, dan K.O. Okosun. 2012. Stability analysis and optimal control of a vector-borne disease with nonlinear incidence. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, vol. 2012, Article ID 595487, 21 halaman.
- [16] Saddiq, S.F., M.A. Khan, S. Islam, G. Zaman, N. Khalid, S.I.A. Shah, dan Z. Haq. 2013. Optimal control of an epidemic model of leptospirosis with time delay. *Life Science Journal*, vol. 10(3s): 292–298
- [17] Shonkwiler, R.W. dan J. Herod. 2009. *Mathematical Biology. An Introduction with Maple and Matlab. 2nd Edition*. New York: Springer.
- [18] Ullah, R., G. Zaman, dan S. Islam. 2013. Stability analysis of a general SIR epidemic model. *VFAST Transactions on Mathematics*, vol. 1, no. 1: 16–20.
- [19] Vinter, R. 2010. *Optimal Control*. New York: Birkhäuser.
- [20] Wang, J. dan C. Modnak. 2011. Modeling Cholera Dynamics with Controls. *Canadian Applied Mathematics Quarterly*, vol. 19, no. 3: 255–273.
- [21] Yusuf, T.T. dan F. Benyah. 2012. Optimal control of vaccination and treatment for an SIR epidemiological model. *World Journal of Modelling and Simulation*, vol. 8, no. 3: 194–204.

E-mail : tonibakhtiar@yahoo.com, faridahanum00@yahoo.com

