

BAB 6

PENDUGAAN PARAMETER

MUHAMMAD NUR AIDI

6.1 Pendahuluan

Analisis dengan metode kuadran memiliki dua pendekatan teori: Deduktif dan Induktif. Pendekatan deduktif diawali dengan adanya data empirik kemudian dianalisis agar didapatkan pola sebaran yang akhirnya berakhir pada kesimpulan pola konfigurasi (*pattern*). Sebaliknya pendekatan induktif berawal dari analisis sebaran sampai pada pola *pattern* titik-titik yang dihasilkan oleh sebaran tersebut dan merupakan landasan teori untuk analisis data empirik. Salah satu pokok bahasan dari analisis dengan pendekatan induktif adalah masalah Pendugaan Parameter.

Metode pendugaan parameter yang dilakukan pada pembahasan ini adalah penurunan rumus pendugaan parameter dari berbagai jenis sebaran. Sebagaimana diketahui bahwa dengan metode deduktif (dalam pembahasan *Compound and generalized distributions*) diperoleh kesimpulan bahwa jenis sebaran titik merupakan representasi dari pola *pattern*. Misalnya titik-titik pengamatan memiliki sebaran poisson, maka ia memiliki pola random, kemudian secara berurutan sebaran poisson-binomial, Neyman Type A, Poisson Negative Binomial, Negative Binomial, titik-titik pengamatan tersebut semakin memiliki pola kluster.

Oleh karena itu diperlukan penduga parameter dari sebaran-sebaran tersebut agar dapat dilakukan perhitungan, yaitu perhitungan data empirik agar dapat diduga bentuk sebarannya. Metode pendugaan parameter dilakukan dengan dua cara : metode momen dan maksimum Likelihood, karena dua metode tersebut dikenal memiliki penduga tak bias. Untuk metode momen memiliki keunggulan lebih mudah dalam menurunkan rumus penduga parameternya, namun maksimum likelihood juga dikenal memiliki penduga yang efisien dari sekian banyak penduga yang ada, walaupun kadang tidak mudah untuk mencari bentuk rumus penduganya.

6.2 Penduga Momen

Untuk memudahkan pencarian penduga parameter dengan metode momen, perlu dilakukan penyederhanaan prosedur yaitu dengan mencari bentuk-bentuk hubungan yang lebih sederhana. Penduga momen diturunkan melalui Fungsi Pembangkit Peluang dari sebuah sebaran (*Distribution's Generating Function* – p.g.f) dengan rumus umum :

$$G(s) = \sum_{r=0}^{\infty} P(r)S^r \quad (1)$$

Dari bentuk tersebut kemudian dicari hubungan untuk memudahkan perhitungan penduga parameter dari berbagai bentuk sebaran sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G'(1) &= \frac{d}{ds} G(s)|_{s=1} = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r)(1)^{r-1} = \sum_{r=0}^{\infty} rP(r) = m_1 \\ G''(1) &= \frac{d^2}{ds^2} G(s)|_{s=1} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r)(1)^{r-2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r) \\ &= m_2' - m_1 \\ &= m_2 + m_1^2 - m_1 \text{ (lihat catatan di bawah)} \end{aligned} \quad (2)$$

Catatan:

m_2 : momen ke-2 terhadap nilai tengahnya (m_1)

m_2' : momen ke-2 terhadap titik nol

$$m_2 = E(r^2) - [E(r)]^2$$

$$m_2' = E(r^2) - [0]^2 = E(r^2) = \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r)]$$

$$m_2 = m_2' - m_1^2 \quad \rightarrow m_2' = m_2 + m_1^2$$

$$\begin{aligned} G''(1) &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r)(1)^{r-2} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} r(r-1)P(r) \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r) - rP(r)] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} [r^2P(r)] - \sum_{r=0}^{\infty} rP(r) \\ &= m_2' - m_1 \\ &= m_2 + m_1^2 - m_1 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Dari hubungan di atas, momen k-1 (m_1) dan momen ke-2 (m_2) dapat diperoleh sebagai berikut :

$$G'(1) = m_1 \rightarrow m_1 = G'(1)$$

$$G''(1) = m_2 + m_1^2 - m_1 \rightarrow m_2 = G''(1) - m_1^2 + m_1 = G''(1) - [G'(1)]^2 + G'(1)$$

Jika k_1, k_2, k_3 adalah parameter sebaran teoritik yang tidak diketahui, maka :

$\hat{m}_1(k_1, k_2, k_3) = u_1 = \hat{m}_1$ dimana u_1 adalah nilai tengah sampel dimana :

$$u_1 = \frac{1}{N} \sum_{r=0}^W r f_r \text{ dan } N = \sum_{r=0}^W f_r \text{ (W adalah frekuensi pengamatan terbesar, } f_r \text{ adalah frekuensi dan } r_i \text{ adalah frekuensi kelas ke-i)}$$

6.3. Penduga Maksimum Likelihood

Penduga maksimum Likelihood diperoleh dengan cara memaksimalkan fungsi Likelihood dari fungsi sebaran peluang teoritik $[P(r)]$ dimana fungsi

$$\text{Likelihoodnya adalah : } L(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n) = \prod_{r=0}^W [P(r)]^{f_r} \quad (3)$$

W adalah frekuensi pengamatan terbesar, $f_w \neq 0$ dan $f_r = 0$ untuk semua $r > W$. Kemudian untuk mendapatkan nilai maksimum dari fungsi likelihood di atas, maka fungsi harus diturunkan pada orde pertama terhadap parameter k dan dicari penyelesaiannya jika fungsi turunan tersebut sama dengan nol. Jika dituliskan notasinya adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_1} \ln L &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial k_2} \ln L &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial k_3} \ln L &= 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial}{\partial k_n} \ln L &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

Persamaan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k_i} \left\{ \sum_r \ln [p(r)]^{f_r} \right\} &= 0, (i = 1, 2, 3, \dots, n) \text{ atau} \\ \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \end{aligned} \quad (5)$$

Namun dalam banyak kasus, fungsi di atas masih sulit untuk diselesaikan sehingga seringkali untuk menyelesaikan persamaan tersebut harus menggunakan prosedur iterasi pendekatan.

Dengan demikian, untuk mencari penduga parameter dapat digunakan dengan dua metode di atas dengan rumus yang telah disederhanakan. Berikut ini adalah proses pencarian penduga parameter untuk berbagai fungsi sebaran :

6.4. Sebaran Poisson

6.4.1 Metode Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Poisson adalah $G(s) = e^{v(s-1)}$. Maka dengan memanfaatkan persamaan hubungan momen dengan fungsi turunannya sebagaimana dijelaskan di atas diperoleh:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= G'(1) \\
 \ln G(1) &= \ln e^{v(s-1)} \\
 \frac{\partial}{\partial s} G(1) &= \frac{\partial}{\partial s} [V(s-1) \ln e] \\
 \frac{G'(1)}{G(1)} &= v \\
 G'(1) &= vG(1) \\
 G'(1) &= ve^{v(1-1)} \\
 G'(1) &= ve^0 \\
 G'(1) &= v
 \end{aligned} \tag{7}$$

Jadi penduga momen untuk $\hat{v} = \hat{m}_1$

6.4.2. Metode Maksimum Likelihood

Fungsi peluang sebaran Poisson adalah : $P(r) = e^{-v} \frac{(v)^r}{r!}$ dan turunan pertama $P(r)$ adalah : $\frac{\partial}{\partial v} P(r) = \frac{r}{v} P(r) - P(r)$. Maka dengan memanfaatkan model persamaan Fungsi Maksimum Likelihood yang telah disederhanakan dapat diperoleh nilai dugaan parameter v sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \\
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \left[\frac{r}{v} P(r) - P(r) \right] &= 0
 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\begin{aligned} \sum_r f_r \left[\frac{r}{v} - 1 \right] &= 0 \\ \sum_r f_r \left[\frac{r}{v} \right] &= \sum_r f_r \\ \hat{v} &= \sum_r r f_r / \sum_r f_r \\ \hat{v} &= \sum_r r f_r / N \\ \hat{v} &= \widehat{m}_1 \end{aligned} \tag{8}$$

Catatan:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \frac{v^r}{r!} \\ \ln \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \frac{v^r}{r!} \right] \\ \frac{\partial}{\partial v} \ln P(r) &= \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} e^{-v} \right] + \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} v^r \right] - \ln \left[\frac{\partial}{\partial v} r! \right] \\ P'(r) / P(r) &= -1 + r \frac{\partial}{\partial v} \ln v - 0 \\ P'(r) / P(r) &= -1 + r / v \\ P'(r) &= P(r) [r / v - 1] \\ P'(r) &= \frac{r}{v} P(r) - P(r) \end{aligned}$$

Jadi penduga parameter untuk sebaran poisson baik dengan menggunakan metode momen maupun maksimum likelihood adalah sama yaitu \widehat{m}_1 .

6.5. Sebaran Binomial

6.5.1 Metode momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran binomial adalah $G(s) = (1 - p + ps)^n$ dimana n adalah bilangan bulat positif. Maka penduga parameter untuk p adalah $G'(1)$ atau m_1 dan jika dilakukan perhitungan adalah sebagai berikut :

$$\begin{aligned} G(s) &= (1 - p + ps)^n \\ G'(s) &= n(1 - p + ps)^{n-1} \frac{\partial}{\partial s} (1 - p + ps) \text{ (ingat aturan rantai untuk turunan)} \\ G'(1) &= n(1 - p + p \cdot 1)^{n-1} p \\ G'(1) &= n(1)^{n-1} p \end{aligned}$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\begin{aligned}
 G'(1) &= np \\
 \widehat{m}_1 &= n\hat{p} \\
 \hat{p} &= \frac{\widehat{m}_1}{n} = \frac{\widehat{m}_1}{w}
 \end{aligned} \tag{9}$$

6.5.2 Metode Maksimum Likelihood

Sebaran binomial memiliki fungsi peluang $P(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$ sedangkan $P'(r)$ adalah :

$$\begin{aligned}
 P(r) &= \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r} \\
 \ln P(r) &= \ln \binom{n}{r} + \ln p^r + \ln (1-p)^{n-r} \\
 \frac{\partial}{\partial p} P(r) &= \frac{\partial}{\partial p} \left[\ln \binom{n}{r} + \ln p^r + \ln (1-p)^{n-r} \right] \\
 P'(r)/P(r) &= 0 + r \frac{\partial}{\partial p} \ln p + (n-r) \frac{\partial}{\partial p} \ln(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= 0 + r/p + (n-r)/(1-p) (-1) \\
 P'(r)/P(r) &= r/p - (n-r)/(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= [r(1-p) - p(n-r)]/p(1-p) \dots\dots \text{penyamaan penyebut} \\
 P'(r)/P(r) &= [(r-rp) - (np+rp)]/p(1-p) \\
 P'(r)/P(r) &= (r-np)/p(1-p) \\
 P'(r) &= [(r-np)/p(1-p)] P(r)
 \end{aligned} \tag{10}$$

Dengan menggunakan persamaan (5) di atas diperoleh nilai dugaan parameter :

$$\begin{aligned}
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} \frac{\partial}{\partial k_i} P(r) &= 0 \\
 \sum_r \frac{f_r}{p(r)} [(r-np)/p(1-p)] P(r) &= 0 \\
 \sum_r f_r [(r-np)/p(1-p)] &= 0 \\
 \sum_r f_r [(r-np)] &= 0 \\
 \sum_r r f_r - \sum_r np &= 0 \\
 \sum_r r f_r &= \sum_r np \\
 n\hat{p} &= \sum_r r f_r / \sum_r f_r
 \end{aligned}$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\begin{aligned} n\hat{p} &= \widehat{m}_1 \\ \hat{p} &= \widehat{m}_1/n = \widehat{m}_1/w \end{aligned} \quad (11)$$

Jadi penduga parameter untuk sebaran Binomial baik dengan menggunakan metode momen maupun maksimum likelihood adalah sama yaitu \widehat{m}_1/w .

6.6. Sebaran Binomial Negatif

6.6.1 Penduga Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Binomial Negatif adalah sebagai berikut:

$$G(s) = (1 + p - ps)^{-k} \quad (12)$$

Maka dengan metode momen jika $p=w/k$ maka dapat dituliskan

$$G(s) = \left(1 + \frac{w}{k} - \frac{ws}{k}\right)^{-k} \quad (13)$$

Kemudian dicari penduga parameter untuk w dan k dengan pendekatan momen-1 dan momen-2:

$$\frac{d}{ds}G(s) = w\left(1 + \frac{w}{k} - \frac{ws}{k}\right)^{-(k+1)}$$

$$G'(1) = w$$

$$G''(1) = \frac{w^2(k+1)}{k} = w^2 + \frac{w^2}{k}$$

$$m_1 = w$$

$$m_2 = w^2 + \frac{w^2}{k} - w^2 + w = w + \frac{w^2}{k}$$

$$\widehat{w} = \widehat{m}_1$$

$$\widehat{k} = \frac{\widehat{m}_1^2}{\widehat{m}_2 - \widehat{m}_1} \quad (14)$$

6.6.2. Maksimum Likelihood

Fungsi sebaran peluang untuk sebaran binomial negatif adalah :

$$P(r) = \frac{k(k+1) \dots (k+r-1)}{r!} \left(\frac{k}{w+k}\right)^k \left(\frac{w}{w+k}\right)^r \quad (15)$$

Maka dengan menggunakan metode maksimum likelihood fungsi tersebut dicari turunan pertamanya dulu:

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= \frac{r}{w} P(r) - \frac{r+k}{w+k} P(r) = \frac{r(w+k) - w(w+k)}{w(w+k)} P(r) \\ &= \frac{k}{w+k} \left(\frac{r}{w} - 1 \right) P(r) \end{aligned} \quad (16)$$

Setelah itu dicari penduga parameternya dengan fungsi maksimum likelihood yang sudah disederhanakan :

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= 0 \\ \frac{k}{w+k} \sum_r \left(\frac{r}{w} - 1 \right) f_r &= 0 \\ \hat{w} &= \frac{\sum_r r f_r}{\sum_r f_r} = \hat{m}_1 \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial w} P(r) &= \sum_{i=0}^{r-1} \frac{P(r)}{k+i} + P(r) \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) + \left(1 - \frac{k+r}{w+k} \right) P(r) \\ \sum_r f_r \sum_{i=0}^{r-1} \left(\frac{1}{k+i} \right) &+ \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) \sum_r f_r + \frac{1}{w+k} \sum_r f_r (w-r) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

Untuk memecahkan persamaan di atas digunakan aturan deret hingga sehingga bentuk persamaannya menjadi :

$$\begin{aligned} \sum_r f_r \sum_{i=0}^{r-1} \frac{1}{k+i} &= f_1 \left(\frac{1}{k} \right) + f_2 \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) + \dots \\ &+ f_w \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{k+w-1} \right) \\ &= \frac{1}{k} (f_1 + f_2 + \dots + f_w) + \frac{1}{k+1} (f_1 + f_2 + \dots + f_w) + \dots \\ &+ \frac{1}{k+w-1} f_w \end{aligned} \quad (18)$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Ingat Deret Hingga

$$S_r = f_{r+1} + f_{r+1} + \dots + f_w = \sum_{i=r+1}^w f_i \quad (r = 0, 1, \dots, w)$$

$$\sum_{r=0}^{w-1} \frac{S_r}{k+r} + N \ln \left(\frac{k}{k+w} \right) = 0 = Q(k)$$

Untuk memperoleh nilai k diperlukan aproksimasi dengan Newton-Raphson:

$$k_2 = k_1 - \frac{Q(k_1)}{Q'(k_2)}$$

$$Q'(k) = N \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+w} \right) - \sum_{r=0}^{w-1} \frac{S_r}{(k+r)^2}$$

Akhirnya diperoleh hasil yang sama dengan metode momen untuk penduga parameter K

$$\hat{k} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1} \quad (19)$$

6.6.3 Efisiensi Penduga Parameter

Jika dibandingkan antara metode momen dan maksimum likelihood dalam mencari penduga parameter untuk sebaran binomial negatif dapat dihitung sebagaimana tabel di bawah, kesimpulannya tingkat efisiensi tergantung nilai w dan k, semakin tinggi nilai w dan k maka metode maksimum likelihood sangat efisien dibandingkan dengan metode momen

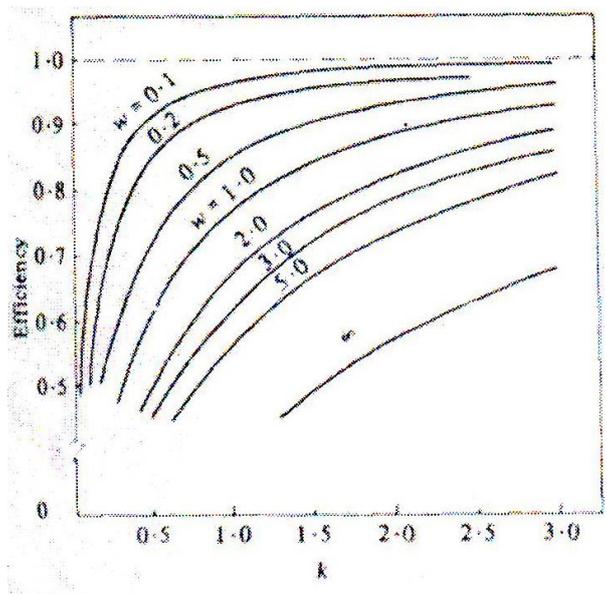
Tabel 6.1. Efisiensi penduga parameter untuk metode momen dan maksimum likelihood

Jumlah poin tiap sel	Jumlah sel yang diobservasi	NB (mom) $\hat{w} = 0.5200$ $\hat{k} = 0.6781$	NB (mle) $\hat{w} = 0.5200$ $\hat{k} = 0.7352$
0	67	67.98	67.48
1	23	20.01	20.55
2	5	7.29	7.39
3	2	2.82	2.79
4	2	1.13	1.08
5+	1	0.78	0.70

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Total sel = 100			
Total poin = 52			
$X^2 =$		$[2.05]^a$	$[2.12]^a$
$\hat{m}_1 = 0.5200 ;$	$\hat{m}_2 = 0.9188$		
$P_{0.05} =$		5.99	5.99
$\hat{m}_2/\hat{m}_1 = 1.7669$			

^a $[X^2] = X^2$ statistic computed with grouping \geq instead of ≥ 5



Gambar 6.1 Efisiensi dari Metode Penduga Momen k untuk Sebaran Binomial Negatif

6.7. Sebaran Neyman Type A

6.7.1 Penduga Momen

Fungsi pembangkit peluang untuk sebaran Neyman Type A adalah sebagai berikut :

$$G(s) = \exp\{v[\exp[a(s-1)] - 1]\}$$

$$\frac{d}{ds}G(s) = va \exp[a(s-1)]G(s)$$

$$G'(1) = va \qquad G''(1) = va(a + va)$$

$$m_1 = va \qquad m_2 = va(a + 1)$$

$$\hat{a} = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{\hat{m}_1} \qquad (20)$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{a}} = \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1} \quad (21)$$

6.7.2 Penduga Maksimum Likelihood

Fungsi sebaran peuan Neyman Type A :

$$P(r) = \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} [v \exp(-a)]^i \quad (22)$$

Agar dapat diperoleh penduga parameter melalui maksimum likelihood dicari turunan pertamanya :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= -P(r) + \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} i \exp(-a) [v \exp(-a)]^{i-1} \\ &= -P(r) + \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^{r+1}}{i!} \frac{[v \exp(-a)]^i}{v} \\ &= -P(r) + \frac{r+1}{va} \exp(-v) \frac{a^{r+1}}{(r+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^{r+1}}{i!} [v \exp(-a)]^i \\ &= -P(r) + \frac{r+1}{va} P(r+1) \frac{\partial}{\partial a} P(r) \\ &= \frac{r}{a} P(r) \exp(-v) \frac{a^r}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^r}{i!} i [-v \exp(-a)] [v \exp(-a)]^{i-1} \\ &= \frac{r}{a} P(r) - \frac{r+1}{a} P(r+1) \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= \sum_r f_r \left[-1 + \frac{r+1}{va} \frac{P(r+1)}{P(r)} \right] \\ &= -N + \frac{1}{va} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} = 0 \\ \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial a} P(r) &= \sum_r f_r \left[\frac{r}{a} - \frac{r+1}{a} \frac{P(r+1)}{P(r)} \right] \\ &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r - \frac{1}{a} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} = 0 \\ &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r - Nv = 0 \\ va &= \frac{1}{a} \sum_r r f_r = \hat{m}_1 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

$$\begin{aligned}
 va &= \hat{m}_1 \\
 \sum_r f_r H_r - N \hat{m}_1 &= 0 \\
 Q(a) &= \sum_r f_r H_r(a) - N \hat{m}_1 = 0 \\
 \frac{d}{da} P(r) &= \frac{\partial}{\partial a} P(r) + \frac{\partial}{\partial v \partial} [P(r)] \frac{dv}{da} = \frac{\partial}{\partial a} P(r) - \frac{\hat{m}_1}{a^2} \frac{\partial}{\partial v} P(r) \\
 \frac{d}{da} P(r) &= \frac{rP(r) - (r+1)P(r+1)}{a} + \frac{\hat{m}_1 P(r) - (r+1)P(r+1)}{a^2} \\
 \frac{d}{da} H_r &= \frac{r+1}{a} \frac{P(r+1)}{P(r)} \\
 &\quad + \frac{a+1}{a^2} \left[\frac{(r+1)^2 P^2(r+1)}{P^2(r)} - \frac{(r+1)(r+2)(r+2)}{P(r)} \right] \\
 &= H_r \left[\frac{1}{a} - \frac{a+1}{a^2} (H_{r+1} - H_r) \right] \\
 Q'(a) &= \sum_r f_r \frac{d}{da} H_r \\
 &= \sum_r f_r H_r \left[\frac{1}{a} - \frac{a+1}{a^2} (H_{r+1} - H_r) \right] \tag{23}
 \end{aligned}$$

6.7.3 Efisiensi Penduga Momen dan Maksimum Likelihood pada sebaran Neyman Type A

Kebalikan dari sebaran negatif binomial, pada Neyman Type A semakin besar nilai dugaan parameternya, maka tingkat efisiensi penduga maksimum likelihood semakin melemah.

6.8. Sebaran Poisson-Binomial

6.8.1 Penduga Momen

P.g.f dari sebaran poisson-binomial adalah

$$G(s) = \exp\{v[(1-p+ps)^n - 1]\}$$

Dimana n adalah integer positif. Karena sebaran ini sering konvergen terhadap sebaran Neyman Type A di mana n meningkat, dan sejak n adalah

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang memurnikan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

integer, kebanyakan aplikasi-aplikasi dari Piosson-binomial mengasumsikan n menjadi a data dan bukan parameter yang tidak diketahui untuk pendugaan ⁽¹⁰⁾. Biasanya n diasumsikan sama dengan 2 atau 4.

Maka dari itu kita mendapatkan bahwa

$$\frac{d}{ds} G(s) = vnp(1 - p + ps)^{n-1} G(s)$$

$$G'(1) = vnp$$

$$G''(1) = vnp[(n - 1)p + vnp]$$

Karena itu

$$m_1 = vnp \tag{24}$$

$$m_2 = vnp[1(n - 1)p] \tag{25}$$

Dan penduga momen adalah

$$p = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{(n - 1)\hat{m}_1} \tag{26}$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{m}_1}{n\hat{p}} = \frac{n - 1}{n} \frac{\hat{m}_1^2}{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}$$

6.8.2. Penduga Kemungkinan Maksimum Likelihood

Untuk Sebaran Poisson-binomial

$$P(r) = \exp(-v) \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1 - p)^{ni-r}$$

dimana

$$\binom{ni}{r} = \frac{(ni)!}{(ni - r)! r!}$$

Akan kita lihat nanti,asumsi yang sama tidak diambil secara umum untuk sebaran negatif Poisson-binomial

Pada berikut ini kita akan membutuhkan untuk menggunakan identitas

$$\begin{aligned} (ni - r) \binom{ni}{r} &= \frac{(ni)! (ni - r)}{(ni - r)! r!} = \frac{(ni)! (r + 1)}{(ni - r - 1)! (r + 1)!} \\ &= (r + 1) \binom{ni}{r + 1} \end{aligned} \tag{27}$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Kita mulai dengan menghitung penurunan parsial dari $P(r)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= -P(r) + \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{iv^{i-1}}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r} \\ &= -P(r) + \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \frac{(n-1) + r}{n} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r} \end{aligned}$$

Menggunakan identitas pada persamaan (27) akan menghasilkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} P(r) &= -P(r) \\ &+ \frac{\exp(-v)}{vn} (r+1) \frac{1-p}{p} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r+1} p^{r+1} (1-p)^{ni-r-1} \\ &+ \frac{r \exp(-v)}{vn} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} p^r (1-p)^{ni-r} \\ &= -P(r) + \frac{(r+1)(1-p)}{vnp} P(r+1) + \frac{r}{vn} P(r) \end{aligned} \quad (28)$$

Dengan cara yang sama

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} P(r) &= \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i}{i!} \binom{ni}{r} \left[\frac{r}{p} - \frac{ni-r}{(1-p)} \right] p^r (1-p)^{ni-r} \\ &= \frac{r}{p} P(r) - \frac{r+1}{p} P(r+1) \end{aligned} \quad (29)$$

Maka dari itu persamaan kemungkinan maksimum bisa dijelaskan sebagai berikut

$$\begin{aligned} \sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial (v)} P(r) \\ &= - \sum_r f_r + \frac{(1-p)}{vnp} \sum_r f_r (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} \\ &+ \frac{1}{vn} \sum_r f_r = 0 \end{aligned}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Misalkan

$$H_r = (r + 1) \frac{P(r + 1)}{P(r)} \quad \text{dan} \quad \sum_r r f_r = \hat{m}_1 \sum_r f_r = N \hat{m}_1 .$$

Maka

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = -N + \frac{N \hat{m}_1}{vn} + \frac{(1-p)}{vnp} \sum_r f_r H_r = 0 \quad (30)$$

Dengan cara yang sama

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial p} P(r) = \frac{1}{p} \sum_r f_r - \frac{1}{p} \sum_r f_r H_r = 0$$

Atau

$$\frac{N \hat{m}_1}{p} - \frac{1}{p} \sum_r f_r = 0$$

Yang akan menghasilkan

$$\sum_r f_r H_r - N \hat{m}_1 = 0$$

Ganti persamaan (20) $\sum_r f_r H_r$ dengan \hat{m}_1 , kita akan mendapatkan

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = -N + \frac{N \hat{m}_1}{vn} + \frac{(1-p)}{vnp} N \hat{m}_1 = N \left(-1 + \frac{\hat{m}_1}{vnp} \right) = 0$$

Maka dari itu penduga kemungkinan maksimum adalah solusi bagi sistem persamaan berikut:

$$vnp = \hat{m}_1, \quad (31)$$

$$\sum_r f_r H_r - N \hat{m}_1 = 0 \quad (32)$$

Perhatikan bahwa persamaan (31) sama dengan persamaan momen pertama, dan persamaan (32) menghasilkan persamaan yang mirip dengan persamaan (21).

Menentukan $H_r(p)$ untuk nilai H_r dimana $v = \hat{m}_1 / np$, kita dapatkan

$$Q(p) = \sum_r f_r H_r - N \hat{m}_1 = 0, \quad (33)$$

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Dan, seperti sebelumnya, kita bisa menyelesaikan persamaan ini dengan prosedur iterative Newton-Rhapon. Jadi:

$$\frac{d}{dp} P(r) = \frac{\partial}{\partial p} P(r) + \frac{\partial}{\partial v} P(r) \frac{dv}{dp} = \frac{\partial}{\partial p} P(r) - \frac{\hat{m}_1}{np^2} \frac{\partial}{\partial v} P(r)$$

Persamaan tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P(r) &= \frac{rP(r) - (r+1)P(r+1)}{p} \\ &= + \frac{\hat{m}_1}{np^2} \left[P(r) - \frac{r}{vn} P(r) - \frac{(r+1)(1-p)}{vnp} P(r+1) \right] \end{aligned}$$

Ganti v dengan \hat{m}_1 / np , dan berdasarkan persamaan pada $P(r)$ dan $P(r+1)$, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} P(r) &= P(r) \left[\frac{(n-1)r}{n} \frac{1}{p} + \frac{\hat{m}_1}{np^2} \right] \\ &\quad - (r+1)P(r+1) \left[\frac{(n-1)}{n} \frac{1}{p} + \frac{1}{np^2} \right] \quad (34) \end{aligned}$$

Satu yang dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan persamaan (34) adalah

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} H_r &= (r+1) \frac{P(r+1)}{P(r)} \frac{n-1}{np} \\ &\quad - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) \left[\frac{(r+1)(r+2)P(r+2)}{P(r)} - \frac{(r+1)^2 p^2 (r+2)}{P(r)} \right] \\ &= H_r \left[\frac{n-1}{np} - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right] \end{aligned}$$

Maka dari itu

$$\begin{aligned} Q'(p) &= \sum_r f_r \frac{d}{dp} H_r \\ &= \sum_r f_r H_r \left[\frac{n-1}{np} - \left(\frac{n-1}{np} + \frac{1}{np^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right] \quad (35) \end{aligned}$$

Dapat diperhatikan bahwa $n \rightarrow \infty$ dalam cara seperti itu $np \rightarrow a$, maka persamaan (35) cenderung pada persamaan (23)

6.8.3. Eksistensi dan efisiensi penduga

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, penduga momen nyata jika dan hanya jika ragam v_2 berada di antara v_1 dan \hat{m}_1 . Sprott (1958), dan Katti dan Gurland (1962) telah mentabulasikan keefisiensiannya untuk $n = 2, 3$, dan 5 , untuk beragam nilai p dan v . Hasil untuk $n = 2$, diringkas pada gambar 4.3, yang memperlihatkan bahwa efisiensi metode momen sangat rendah ketika p lebih besar dari 0.2 . Faktanya, untuk berapapun nilai v , efisiensi cenderung nol ketika $p \rightarrow 1$.

Penulis mengobservasi bahwa peningkatan efisiensi bisa diperoleh dengan menggunakan metode frekuensi contoh nol – sebuah metode yang mengobservasi proporsi dari jumlah nol yang digunakan untuk memperoleh satu pendugaan persamaan, yang lainnya menjadi cocok dengan persamaan kemungkinan maksimum.persamaan (21). Kita lalu memiliki

$$P(0) = \frac{f_0}{N} = \exp\{-v[1 - (1 - p)^n]\} \quad (36)$$

Di mana saat nilai $n = 2$ akan menghasilkan

$$\hat{p} = 2 + \frac{2}{\hat{m}_1} \ln \frac{f_0}{N} \quad \text{dan} \quad \hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{n\hat{p}}$$

Saat n lebih besar dari 2 , persamaan (36) tidak dapat diselesaikan dengan mudah, tapi metode Newman-Rhapson selalu bisa digunakan.

Ketika penduga \hat{p} harus berada diantara 0 dan 1 , penduga frekuensi contoh nol nyata, asalkan memenuhi pertidaksamaan berikut

$$N \exp(-\hat{m}_1) \leq f_0 \leq N \exp(-\hat{m}_1 / n)$$

Karena itu, bisa saja penduga momen tidak nyata, padahal penduga frekuensi contoh nol nyata – dan sebaliknya. Efisiensi metode ini jauh lebih besar daripada metode momen. Ini diperlihatkan pada saat $n = 2$ dalam gambar 6.4, yang diturunkan menggunakan hasil dari Sprott (1958), dan Katti dan Gurland (1962).

Tabel 6.2 mengilustrasikan perbedaan estimasi dari parameter Poisson-Binomial yang bisa dihasilkan oleh contoh numerik. Dalam penambahan terhadap model dengan $n = 2$, kita juga memasukan model yang cocok dengan $n = 4$ untuk menunjukkan kekonvergenan yang tinggi dari sebaran frekuensi

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.

2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

harapan terhadap Neyman Type A. Perhatikan bahwa pendugaan frekuensi contoh nol berada di antara momen dan pendugaan kemungkinan maksimum.

Tabel 6.2. Observasi dan Sebaran Kuadran Harapan dari Simulasi sebaran dengan Momen dan Kemungkinan Maksimum dari Model Poisson dan Binomial

Jumlah titik tiap sel	Jumlah sel yang diobservasi	P.B(n=2) (mom) $\hat{v} = 0.3390$ $\hat{p} = 0.7669^b$	P.B(n=2) (m.l.e) $\hat{v} = 0.7379$ $\hat{p} = 0.3524$	P.B(n=4) (m.l.e) $\hat{v} = 0.8438$ $\hat{p} = 0.1541$
0	67	75.57	65.16	66.25
1	23	8.80	21.94	20.86
2	5	15.00	9.66	8.98
3	2	1.78	2.43	2.83
4	2	1.55	0.65	0.80
5+	1	0.30	0.17	0.28
Total sel = 100				
Total poin = 52				
$X^2 =$		$[30.72]^a$	$[4.31]^a$	$[5.63]^a$
$\hat{m}_1 = 0.5200 ;$	$\hat{m}_2 = 0.9188$			
$P_{0.05} =$		5.99	4.84	5.99
$\hat{m}_2/\hat{m}_1 = 1.7669$				

^a $[X^2] = X^2$ Perhitungan statistik dengan pengelompokan ≥ 1 sebagai pengganti ≥ 5

^bPendugaan frekuensi contoh nol untuk \hat{v} dan \hat{p} adalah 0.5656 dan 0.4597, respectively.

6.9. SEbaran Poisson Binomial Negatif

6.9.1 Penduga momen

P.g.f dari sebaran Poisson-binomial negatif adalah

$$G(s) = \exp\{v[1 + (p - ps)^{-1} - 1]\}$$

dimana p dan k adalah positif. Secara formal, ini sama dengan sebaran Poisson-binomial, kecuali bahwa p telah digantikan dengan -p, dan n dengan -k. bagaimanapun juga, k tidak lebih panjang dari integer tetapi ini adalah parameter ketiga yang tidak diketahui yang akan diestimasi berdasarkan data.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Proses dilakukan sebagaimana sebelumnya, kita menghitung

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}G(s) &= vkp(1+p-ps)^{-k-1}G(s), \\ \frac{d^2}{ds^2}G(s) &= vkp[(k+1)p(1+p-ps)^{-k-2} \\ &\quad + vkp(1+p-ps)^{-2(k+1)}]G(s),\end{aligned}$$

Dan menghasilkan

$$\begin{aligned}G'(1) &= vkp \\ G''(1) &= vkp[(k+1)p + vkp] \\ G'''(1) &= vkp[(k+1)(k+2)p^2 + 2vkp(k+1)p + vkp(k+1)p \\ &\quad + v^2k^2p^2]\end{aligned}$$

Maka dari itu, berdasarkan persamaan sebelumnya

$$m_1 = v kp, \tag{37}$$

$$m_2 = v kp\{1 + (k+1)p\}, \tag{38}$$

Atau

$$p = \frac{m_2 - m_1}{(k+1)m_1}$$

Akhirnya, sekali lagi kita mendapatkan bahwa:

$$\begin{aligned}m_3 &= vkp[(k+1)(k+2)p^2 + 3vkp(k+1)p + v^2k^2p^2 - 3vkp(k+1)p \\ &\quad - 3v^2k^2p^2 + 2v^2k^2p^2 + 3(k+1)p + 1] \\ &= vkp[(k+1)(k+2)p^2 + 3(k+1)p + 1].\end{aligned}$$

Menggunakan persamaan (27) dan (29), kita dapatkan

$$\begin{aligned}m_3 &= m_1 \left[\frac{(k+1)(k+2)(m_2 - m_1)^2}{(k+1)^2 m_1^2} + \frac{3(k+1)(m_2 - m_1)}{(k+1)m_1} + 1 \right] \\ &= \frac{(m_2 - m_1)^2}{m_1} \frac{k+2}{k+1} + 3m_2 - 3m_1\end{aligned}$$

Yang bisa ditulis sebagai berikut

$$(k+1)m_1(m_3 - 3m_2 + 2m_1) = (m_2 - m_1)^2(k+2)$$

Atau

$$\begin{aligned}k &= \frac{2(m_2 - m_1)^2 - (m_3 - 3m_2 + 2m_1)m_1}{m_1(m_3 - 3m_2 + m_1) - (m_2 - m_1)^2} \\ &= \frac{2m_2^2 - m_1(m_2 + m_3)}{m_1(m_1 - m_2 + m_3) - m_2^2}\end{aligned} \tag{39}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Dari persamaan (37), (38), dan (39), kita dapatkan penduga momen :

$$\hat{k} = \frac{2\hat{m}_2^2 - \hat{m}_1(\hat{m}_2 + \hat{m}_3)}{\hat{m}_1(\hat{m}_1 - \hat{m}_2 + \hat{m}_3) - \hat{m}_2^2} \quad (40)$$

$$\hat{p} = \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{(k + 1)\hat{m}_1} \quad (41)$$

$$\hat{v} = \frac{\hat{m}_1}{\hat{k}\hat{p}} \quad (42)$$

6.9.2 Penduga Kemungkinan Maksimum

Untuk sebaran Poisson-binomial negatif,

$$P(r) = \exp(-v) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^i ki(ki + 1) \dots (ki + r - 1)}{r!} p^r (1 + p)^{-ki-r}$$

Lalu, menggunakan proses yang sama sebagaimana sebaran Poisson-binomial, kita dapatkan

$$\frac{\partial}{\partial v} P(r) = -P(r) + \frac{(r + 1)(1 + p)}{vkp} P(r + 1) + \frac{r}{vk} P(r)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} P(r) = \frac{rP(r) - (r + 1)P(r + 1)}{p}$$

Dan persamaan dua kemungkinan yang pertama adalah

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial v} P(r) = 0$$

Dan

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial p} P(r) = 0$$

Yang menurunkan kepada

$$vkp = \hat{m}_1 \quad (43)$$

Dan

$$Q(p, k) = \sum_r f_r H_r(p, k) - N\hat{m}_1 = 0,$$

Dimana

$$H_r = (r + 1) \frac{P(r + 1)}{P(r)}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Mengingat k konstan, kita dapatkan

$$\frac{d}{dp} Q(p) = Q'(p) = \sum_r f_r H_r \left[\frac{k+1}{kp} - \left(\frac{k+1}{kp} + \frac{1}{kp^2} \right) (H_{r+1} - H_r) \right]. \quad (44)$$

Untuk menyelesaikan persamaan kemungkinan ketiga

$$\sum_r \frac{f_r}{P(r)} \frac{\partial}{\partial k} P(r) = 0, \quad (45)$$

Kita harus menemukan $\partial P(r)/\partial k$. Shumway dan Gurland (1960) memperlihatkan, setelah perhitungan yang rumit, maka

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial k} P(r) = & \frac{rP(r)}{k} \\ & - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) \\ & - \left[\frac{(1+p)(r+1)}{pk} P(r+1) - \frac{r}{k} P(r) \right] \ln(1+p), \end{aligned}$$

Dimana

$$B_{ri} = \left(\frac{p}{1+p} \right)^{r-1} \frac{i}{(r-i)(r-i+1)}$$

Lalu persamaan menjadi

$$\frac{1}{k} \sum_r f_r - \frac{\ln(1+p)}{k} \left[\frac{1+p}{p} \sum_r f_r H_r - \sum_r r f_r \right] - \frac{1}{k} \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0.$$

Mengingat fakta bahwa $\sum_r r f_r = N\hat{m}_1$, dan mengalikan dengan k , kita dapatkan

$$N\hat{m}_1 - \ln(1+p) \left(\frac{1+p}{p} - 1 \right) N\hat{m}_1 - \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0,$$

Atau

$$Nm_1 \left[1 - \frac{\ln(1+p)}{p} \right] - \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i) = 0.$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Sejak $\hat{m}_1 = vkp$, persamaan diatas menjadi

$$k = \frac{1}{Nv[p - \ln(1 + p)]} \sum_r \frac{f_r}{P_r} \sum_{i=1}^{r-1} B_{ri} P(i)$$

Kita sekarang dapat menemukan penduga kemungkinan maksimum dengan mengikuti prosedur iteratif berikut :

1. Anggap v', k', p' penduga awal
 2. Hitung penduga baru untuk p
- $$p'' = p' \frac{Q(v', k', p')}{Q'(v', k', p')}$$
3. Menghitung dugaan baru untuk k, $k'' = \text{fungsi dari } (v', k', p')$
 4. Menghitung nilai baru untuk v, $v'' = \frac{\hat{m}_1}{k'' p''}$
 5. Jika v'', k'', p'' berbeda nyata dari v', k', p' , ulangi langkah 2, 3, dan 4 dengan v'', k'', p'' sebagai pendugaan baru.
 6. Eksistensi dan efisiensi penduga

Penduga momen nyata jika persamaan (40), (41), dan (42) menghasilkan nilai positif. Kasus ini jika dan hanya jika memenuhi pertidaksamaan berikut :

$$\hat{m}_2 \geq \hat{m}_1, \quad \frac{\hat{m}_2 + \hat{m}_1 \hat{m}_2 - \hat{m}_1^2}{\hat{m}_1} \leq \hat{m}_3 \leq \frac{\hat{m}_2(2\hat{m}_2 - \hat{m}_1)}{\hat{m}_1}$$

Katti dan Gurlang (1961) menghitung efisiensi dari penduga momen untuk beragam nilai v, k , dan p ; mereka sangat rendah saat p lebih besar dari 0.1 atau k lebih besar dari 1. Rupanya hasil yang didapat jauh lebih baik bila menggunakan rasio dari frekuensi dua observasi yang pertama, dibandingkan dengan momen ketiga, untuk menghasilkan persamaan penduga ketiga. Dalam metode ini nilai p dicari dahulu, sebagai solusi untuk

$$\hat{p} \ln \left(\hat{m}_1 \frac{f_0}{f_1} \right) - \frac{\hat{m}_2 - \hat{m}_1}{\hat{m}_1} \ln(1 + \hat{p}) = 0$$

Yang bisa diselesaikan dengan mudah menggunakan metode Newton-Rhapson. Penduga \hat{k} dan \hat{v} didapat dari persamaan (41) dan (42). Penduga ini nyata jika dan hanya jika

$$1 + \ln \left(\hat{m} \frac{f_0}{f_1} \right) m \leq \frac{\hat{m}_2}{\hat{m}_1} \leq \hat{m}_1 \frac{f_0}{f_1}$$

Dan mereka memberikan nilai awal yang lebih baik dari penduga momen untuk proses iteratif yang dibutuhkan untuk menghasilkan penduga kemungkinan maksimum.

Bagaimanapun, dalam bentuk hal, proses iteratif tidak konvergen. Alasannya mungkin karena iteratif menggunakan persamaan yang memiliki bentuk

$$k = f(k).$$

Jika kita memiliki perkiraan nilai k_1 dari solusi persamaan, maka $k_2 = f(k_1)$ adalah pendugaan yang lebih baik jika $df(k)/dk < 1$, dalam selang (k_1, \hat{k}) .

Tabel 6.4 menyajikan penduga momen dari parameter model Poisson-binomial negatif saat mereka cocok terhadap contoh numerik. Algoritma untuk metode kemungkinan maksimum dan rasio dari metode dua frekuensi observasi pertama kedua-duanya divergen.

6.10. Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran

Teori pendugaan telah dikembangkan dalam bab ini berdasarkan pada contoh kuadran-prosedur yang menyeleksi kuadran secara acak di daerah pembelajaran. Ini jelas bahwa teori ini tidak tepat untuk aplikasai dalam kasus cacat kuadran, yang telah kita gunakan dalam contoh numerik. Ini adalah ‘ contoh ‘ yang diambil dengan kuadran perbatasan yang meliputi seluruh daerah pembelajaran, yang dalam kasus ini nomor poin perbatasan kuadran dengan jelas bergantung.

- Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang
1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
 2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Tabel 6.3. Perbandingan Hasil Sebaran Frekuensi Observasi Menggunakan Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran.^a

Jumlah poin tiap sel	Nomor sel yang diobservasi menggunakan contoh kuadran				Jumlah observasi sel dengan cacah kuadran
	Jumlah contoh Percobaan				
	5	10	20	50	
0	16.0	16.5	16.35	16.70	16.75(67)
1	4.8	5.3	5.70	5.72	5.75(23)
2	2.6	1.9	1.70	1.42	1.25(5)
3	0.8	0.6	0.50	0.40	0.50(2)
4	0.6	0.5	0.45	0.42	0.50(2)
5+	0.2	0.2	0.30	0.34	0.25(1)

^a Jumlah dalam tanda kurung berdasarkan gambar untuk 100% contoh

Tabel 6.4. Perbandingan untuk Pendugaan Parameter yang Dihasilkan oleh Contoh Kuadran dan Cacah Kuadran

Parameter	Penduga parameter dengan contoh kuadran				Penduga parameter dengan cacah kuadran
	Jumlah contoh Percobaan				
	5	10	20	50	
Rataan	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
Ragam	10.807	0.9430	0.9590	0.9326	0.9097
<i>Binomial Negative Penduga momen</i>					
\hat{w}	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
\hat{k}	0.8902	0.7989	0.7672	0.6787	0.6781
Penduga kemungkinan maksimum					
\hat{w}	0.6320	0.5560	0.5560	0.5256	0.5200
\hat{k}	0.7329	0.7487	0.7821	0.7316	0.7352
<i>Neyman Type-A Penduga momen</i>					
\hat{v}	0.8902	0.7989	0.7672	0.6787	0.6781
\hat{a}	0.7099	0.6960	0.7247	0.7744	0.7669
Penduga kemungkinan maksimum					
\hat{v}	0.8551	0.9233	10.026	0.9733	0.9791
\hat{a}	0.7391	0.6028	0.5545	0.5400	0.5311

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Teori untuk pendugaan cacah kuadran belum dikembangkan. Maka kita terpaksa pada posisi menggunakan prosedur yang ditemukan pada asumsi yang kita tahu akan salah. Untuk menguji kemungkinan ini, kita mengadakan eksperimen contoh kecil pada contoh numerik yang telah digunakan sepanjang bab ini. Mengambil contoh acak sebanyak 25 % setiap waktu, kita telah pelajari bahwa perilaku dari sebaran frekuensi observasi dan beberapa parameter yang diduga, sebagai jumlah dari percobaan contoh pada eksperimen contoh adalah meningkat dari lima ke lima puluh. Hasil pokok dikumpulkan pada tabel 6.3 dan 6.4. Tabel-tabel ini memaparkan bahwa hasil yang didapat dengan contoh kuadran cenderung kepada hasil yang didapat oleh cacah kuadran ketika jumlah percobaan contoh meningkat.

6.11 Contoh Kasus

1. Pola Sebaran Pasar

Mengetahui pola penyebaran kemunculan pasar/mal di wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi dengan metode analisis spasial. Data keberadaan pasar/mal dalam peta dianalisis dimulai dengan membuat grid pada wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi. Dari proses itu kelima wilayah tersebut terbagi dalam 100 kotak dan setelah itu dihitung dalam setiap kotak banyaknya jumlah pasar/mal. Data perhitungan kemudian disajikan dalam bentuk tabel distribusi frekuensi berdasarkan kotak, misalnya ada berapa kotak yang tidak berisi jumlah pasar, atau yang berisi satu pasar dan seterusnya.. Dari data tersebut kemudian dianalisis tentang pola penyebaran kemunculan pasar/mal. Data dalam tabel tersebut kemudian dianalisis polanya dengan menggunakan Uji Keباikan Suai (*Goodness of Fit*).

- a. Langkah pertama adalah membagi peta wilayah JABODETABEK dalam grid (dalam hal ini 100). Grid yang dibuat sebetulnya adalah 8 baris x 13 kolom sehingga menghasilkan 104 grid. Namun setelah diamati ternyata ada 4 kotak yang berisi lautan sehingga keempat kotak tersebut tidak dilibatkan dalam perhitungan dengan alasan tidak mungkin ada pasar/mal di tengah laut, sehingga sisanya tinggal 100 kotak. Berikut ini adalah ilustrasi pembuatan grid tersebut:
- b. Kemudian dilakukan perhitungan banyaknya pasar/mal di setiap kotak, lalu dibuat tabel frekuensi yang memuat berapa banyaknya kotak yang memuat pasar/mal sebagai berikut:

Tabel 6.5. Banyaknya Kotak yang Berisi Jumlah Pasar di Wilayah Jakarta, Bogor, Depok, Tangerang dan Bekasi

JUMLAH PASAR/MAL SETIAP KOTAK	BANYAKNYA KOTAK
x_1	f_1
0	63
1	20
2	10
3	4
4	2
5	0
6	1
JUMLAH	100

Berdasarkan tabel 6.5 yang telah disusun di atas kemudian dilakukan analisis spasial dengan metode kuadran. Analisis pertama adalah apakah data menyebar secara Poisson dengan menggunakan uji kebaikan suai Khi Kuadran. Sebelum melakukan analisis, harus ditentukan dahulu nilai-nilai peluang munculnya pasar/mal dalam setiap kotak jika menyebar secara Poisson. Fungsi sebaran peluang Poisson dan parameternya dilukiskan sebagai berikut :

$$P(R = r) = e^{-v} \frac{v^r}{r!}$$

$$\text{Nilai tengah} = \text{Ragam} = v = \frac{\sum_{i=1}^{\sigma} x_i f_i}{\sum_{i=1}^{\sigma} f_i}$$

$$= [(0 \times 63) + (1 \times 20) + (2 \times 10) + (3 \times 4) + (4 \times 2) + (5 \times 0) + (6 \times 1)] / 100 = \mathbf{0.66}$$

Karena pada sebaran Binomial penduga nilai tengah sama dengan pada Poisson, maka nilai v di atas tersebut sekaligus dapat juga digunakan untuk menentukan peluang sukses pada sebaran Binomial yaitu sebesar $0.66/6 = 0.11$ (karena enam kelompok sebaran frekuensi). Setelah itu dilakukan perhitungan uji kesesuaian sebaran dengan menggunakan uji Chi Square dihitung menggunakan MS Excel dengan hasil sebagai berikut :

Tabel 6.6. Perhitungan Uji Chi-square untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan $\alpha = 3\%$

Data Jumlah Pasar/Mal di JABODETABEK			POISSON			BINOMIAL		
i	Frekuensi	fi.xi	p(X)	Harapan	χ^2 Hitung	p(X)	Nilai Harapan	χ^2 Hitung
0	63	0	0.517	32.562	28.454	0.497	31.310	30.324
1	20	20	0.341	6.822	25.453	0.369	7.371	6.652
2	10	20	0.113	1.126		0.114	1.139	0.922
3	4	12	0.025	0.099		0.019	0.075	0.042
4	2	8	0.004	0.008		0.002	0.003	0.001
6	1	6	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
	100	0.66						
	P(sukses) >	0.11	$\chi^2_{Tbl} >>$	54.781	54.91	$\chi^2_{Tbl} >>$	54.78	37.942

Dari tabel perhitungan di atas terlihat bahwa uji Chi Square baik untuk Poisson maupun Binomial dengan $\alpha = 3\%$ menghasilkan hasil yang sama yaitu terima hipotesis nol. Hipotesis ini berarti bahwa pola pattern kemunculan pasar/mal di wilayah JABODETABEK peluangnya menyebar secara Poisson dan Binomial. Dengan demikian pola point pattern kemunculan pasar/mal di wilayah JABODETABEK adalah acak (bukan kluster) sekaligus reguler.

Pola tersebut berarti kemunculan/keberadaan pasar di wilayah JABODETABEK secara umum menyebar acak/merata atau tidak mengumpul di titik-titik tertentu. Penyebaran pun memiliki pola reguler yang berarti ada semacam keteraturan dalam posisinya, dan hal ini mungkin dipengaruhi adanya upaya penataan kota/wilayah. Namun jika diperhatikan, perbedaan nilai Chi-square hitung dan tabel untuk sebaran poisson sangat dekat. Jika nilai α dilonggarkan menjadi 5 % akan menghasilkan kesimpulan yang berbeda yaitu hipotesis nol ditolak yang berarti peluangnya tidak menyebar secara poisson. Adapun uji pada sebaran binomial tidak berubah, yang berarti memang berpola reguler. Perhatikan tabel berikut jika nilai α diperlonggar menjadi 5 %.

Tabel 6.7. Perhitungan Uji Chisquare Untuk Sebaran Poisson dan Binomial dengan $\alpha = 5\%$

Data Jumlah Pasar/Mal di JABODETABEK			POISSON			BINOMIAL		
x	Frekuensi	fi.xi	p(X)	Nilai Harapan n	χ^2 Hitung	p(X)	Nilai Harapan n	χ^2 Hitung
0	63	0	0.517	32.562	28.454	0.497	31.310	30.324
1	20	20	0.341	6.822	25.453	0.369	7.371	6.652
2	10	20	0.113	1.126		0.114	1.139	0.922
3	4	12	0.025	0.099		0.019	0.075	0.042
4	2	8	0.004	0.008		0.002	0.003	0.001
6	1	6	0.000	0.000		0.000	0.000	0.000
	100	0.66						
	P(sukses)>	0.11	χ^2 Tbl	52.192	54.906	χ^2 Tbl>	52.192	37.942

Fenomena di atas menunjukkan bahwa pola/pattern random yang ditunjukkan dari hasil uji Chi-Square untuk sebaran Poisson tidak bersifat **Perfectly**, jadi sudah agak bergeser ke arah pola kluster jika menggunakan α yang tidak begitu ketat. Hal ini memang terlihat pada gambar peta dimana keberadaan pasar/mal di sebagian wilayah mengumpul, terutama di luar Jakarta. Oleh karena itu diperoleh adanya kemungkinan antara wilayah Jakarta memiliki point Pattern yang berbeda.

Lalu apakah diperlukan pengujian untuk mengetahui pola kluster dengan Chi Square untuk sebaran Negative Binomial? Jawabannya adalah tidak perlu. Sebab dari analisis di atas sudah tergambar bahwa pola penyebaran pasar/mal di wilayah JABODETABEK menunjukkan Random dan sedikit bergerak ke arah kluster. Adapun pola reguler bersifat robust/tetap baik dengan $\alpha = 3\%$ maupun $\alpha = 5\%$ tidak mengalami perubahan.

2. Distribusi lokasi rumah sakit di DKI Jakarta dengan analisis kuadran.

Uji kebaikan suai (Goodness of Fit) dalam menentukan sebaran rumah sakit dalam kasus ini menggunakan Uji Chi-Square (χ^2). Sebelum menggunakan Uji Chi-Square, maka dilakukan pendugaan rata-rata populasi dengan asumsi sebaran Poisson (X), dilanjutkan dengan menghitung frekuensi harapan:

$$NP(r) = N \frac{e^{-\lambda} \lambda^r}{r!}, r = 0, 1, 2, \dots$$

Dan uji Chi-Square yang digunakan:

$$\chi^2 = \sum_{r=0}^w \frac{[f_r - NP(r)]^2}{NP(r)}$$

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumumkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.

Dimana:

$W+1$ = jumlah kelas frekuensi

f_r = jumlah pengamatan di kelas frekuensi ke- r .

N = ukuran jumlah rumah sakit ($\sum f_r = N = 90$)

$P(r)$ = peluang sebuah pengamatan masuk kedalam kelas frekuensi ke- r .

Selanjutnya membandingkan nilai Chi-Square hasil perhitungan di atas dengan nilai tabel Chi-Square menggunakan derajat bebas = $W-1$ dan $\alpha = 0.05$. Jika $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$ maka disimpulkan bahwa sebaran rumah sakit tidak menyebar acak secara distribusi Poisson.

Dari data yang dihitung dari masing-masing kuadran (kotak) dalam travel map diperoleh bahwa dari seluruh kuadran (90 kuadran), jumlah rumah sakit yang tersebar sebanyak 24. Jadi peluang untuk mendapatkan titik rumah sakit di DKI Jakarta sebesar $23/90 = 0.256$ (25,6%)

Tabel 6.8. Frekuensi Harapan dari Sebaran Poisson Rumah Sakit di DKI Jakarta

Jumlah titik dalam satu kuadran	Banyak kuadran (kotak) (f_r)	λ	$P(r)$	Frekuensi harapan $NP(r)$ ($N=90$)	$\frac{[f_r - NP(r)]^2}{NP(r)}$
0	75	0.256	0.774	69.704	0.402
1	9	0.256	0.198	17.813	4.360
2	4	0.256	0.025	2.276	-
3	2	0.256	0.002	0.194	-

Dari tabel di atas diperoleh $\chi^2 = 0.402 + 4.360 = 4.764$. Jika dibandingkan χ^2_{hitung} tabel (derajat bebas = 1 dan $\alpha = 0.05$) = 4.84 maka $\chi^2_{hitung} > \chi^2_{tabel}$, sehingga disimpulkan sebaran rumah sakit di DKI Jakarta tidak menyebar acak secara Poisson.

Selanjutnya dilakukan analisa terhadap sebaran Binomial. Parameter X dalam Poisson adalah parameter np dalam Binomial sehingga $P(r)$ dalam Binomial = $X/n = 0.256 / 3 = 0.085$. Dengan n menunjukkan nilai maksimum/ banyaknya r (titik) dalam kuadran, dimana maksimum ada 3 titik dalam satu kuadran.

Tabel 6.9. Frekuensi Harapan dari Sebaran Binomial Rumah Sakit di DKI Jakarta

Jumlah Titik Dalam Satu Kuadran (Kotak) r	Banyak Kuadran (Kotak) (fr)	$P(r)$	N	Frekuensi Harapan $E(r)$	$\frac{[f_r - E(r)]^2}{E(r)}$
0	75	0.085	3	68.904	0.539
1	9	0.085	3	19.248	5.457
2	4	0.085	3	1.793	-
3	2	0.085	3	0.056	-

Dari tabel di atas diperoleh $X_z = 0.539 + 5.457 = 5.996$. Jika dibandingkan X_z tabel (derajat bebas = 1 dan $\alpha = 0.05$) = 4.84 maka X_z (hitung) > X_z (tabel), sehingga disimpulkan sebaran rumah sakit di DKI Jakarta tidak menyebar acak secara Binomial. Dari dua analisa sebaran di atas (Poisson dan Binomial) maka disimpulkan bahwa pola sebaran rumah sakit cenderung bersifat clustered (bergerombol) karena tidak menyebar acak secara Poisson dan Binomial. Dengan hasil ini diketahui memang belum ada pemerataan dalam pelayanan kesehatan di DKI Jakarta khususnya dalam pembangunan rumah sakit.

6.12. Daftar Pustaka

- Engelhardt, M. and L.J. Bain. 1992. Introduction to Probability and Mathematical Statistics, 2nd Ed. PWS-Kent Pub., Boston.
- Ghahramani, S. 1996. Fundamentals of Probability. Prentice Hall, New Jersey.
- Golberg, S. 1962. Probability. An Introduction. Printice-Hall, Inc. Englewood Cliff, New York
- Hogg, R.V, and A.T. Craig, 2005. Introduction to Mathematical Statistics. 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
- Hogg, R.V and E.A. Tanis. 2001. Probability and Statistical Inference, 6th Ed. Prentice Hall, New Jersey
- Hurtsbinger, D.V. dan P. P. Bilingsley. 1987. Element of Statistical Inference. 6th ed. Allyn and Bacon. Boston.
- Katti, S.K. , Gurland, J. 1962. "Some method s of estimation for the Poisson Binomial Distribution". Biometrics, 18, 42-51.
- Koopmans, L. H. 1987. Introduction to Contemporary Statistical Methods 2nd ed. Duxbury Press. Boston.



9. Larson, H. J. 1969. Introduction to Probability Theory and Statistical Inference. John Wiley and Sons, New York
10. Mendenhall, W., Wackerly, D. D., & Scheaffer, R. L. 1990. *Mathematical Statistics with Applications*. Fourth ed. PWS Kent Publishing Co, Boston.
11. Rogers, A. 1974. *Statistical Analysis of Spatial Dispersion*. London : Pion Limited
12. Ross, S. 1989. A First Course in Probability. Macmillian Publishing Company. New York
13. Scheaffer, R.L. 1990. *Introduction to Probability and Applications*. PWS Kent, Boston.
14. Sprott, D.A. 1958. "The method of maximum likelihood applied to the Poisson binomial distribution". *Biometrika*, 14, 97-106.
15. Shumway, R. Gurland, J. 1960. *A fitting pocedure for some generalized Poisson Distribution*. *Biometrika*, 43, 87-108.
16. Silk, John. 1979. *Statistical Concepts in Geography*. London : GEORGE ALLEN & UNWIN LTD
17. Thomas, R. W. 1977. *An Introduction to Quadrat Analysis*. Norwich : Geo Abstracts Ltd
18. Walpole, R.E, Myers, R.H, Myers, S.L, & Ye, K. 2002. Probability & Statistics for Engineers & Scientist 7th edition. Prentica Hall. New Jersey.

Hak Cipta Dilindungi Undang-Undang

1. Dilarang mengutip sebagian atau seluruh karya tulis ini tanpa mencantumkan dan menyebutkan sumber:
 - a. Pengutipan hanya untuk kepentingan pendidikan, penelitian, penulisan karya ilmiah, penyusunan laporan, penulisan kritik atau tinjauan suatu masalah.
 - b. Pengutipan tidak merugikan kepentingan yang wajar IPB.
2. Dilarang mengumunkan dan memperbanyak sebagian atau seluruh karya tulis ini dalam bentuk apapun tanpa izin IPB.