Bahan Ajar Matematika Teknik 1

Oleh:

Ir. Elang Pramudya Wijaya, S.T., M.T., IPP.

Kania Amelia Safitri, S.T., M.T.

Departemen Teknik Mesin dan Biosistem

Institut Pertanian Bogor

Kata Pengantar

Segala puji dan Syukur kami panjatken ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa, bahwa atas Rahmat, taufik dan hidayahNya saya dapat menyelesaikan modul mata kuliah TPB-1305 Matematika Teknik pada prodi Teknik Mesin dan Biosistem Institut Pertanian Bogor telah selesai disusun. Adapun tujuan dari penulisan modul ini adalah untuk memfasilitasi mahasiswa dalam pemahaman materi-materi matematika Teknik, sehingga mahasiswa dapat memahami secara penuh berbagai permasalahan dan penyelesaian persamaan differensial dengan berbagai metode.

Pada penyusunan modul ini, saya mengucapkan terima kasih kepada berbagai pihak yang telah membantu dan mengarahkan saya sehingga modul ini dapat selesai. Saya ucapkan terima kasih kepada Fakultas Teknologi Pertanian Institut Pertanian Bogor yang telah memberikan dukungan dan pendampingan pada penyelesaian modul-modul dan perkembangan bahan ajar mahasiswa pada setiap mata kuliah.

Bogor, 9 September 2024

Penulis

Daftar Isi

BAB 1 Persamaan Turunan

Persamaan turunan adalah persamaan yang merelasikan fungsi dari satu atau lebih variabel independen dan turunan-turunannya terhadap variabel tersebut. Persamaan turunan digunakan untuk menggambarkan banyak fenomena fisik, teknis, dan biologis di mana perubahan suatu kuantitas berhubungan dengan perubahan lainnya. Persamaan ini menjadi dasar dalam banyak aplikasi ilmiah dan rekayasa karena kemampuannya untuk memodelkan perubahan dan dinamika sistem. Persamaan turunan digunakan untuk menggambarkan berbagai fenomena seperti pertumbuhan populasi, pergerakan partikel, dinamika fluida, penyebaran panas, gelombang elektromagnetik, ekonomi, dan banyak lagi. Solusi dari persamaan ini, baik analitis maupun numerik, memberikan pemahaman mendalam tentang perilaku sistem yang dipelajari.

1.1. Klasifikasi Persamaan Turunan

Persamaan turunan dapat diklasifikasikan berdasarkan beberapa kriteria:

1. **Berdasarkan Orde Turunan:**
    - Persamaan yang melibatkan turunan pertama dari fungsi disebut sebagai persamaan diferensial orde pertama.

      $$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

    - Jika persamaan melibatkan turunan kedua, maka disebut sebagai persamaan diferensial orde kedua, dan seterusnya.
2. **Berdasarkan Jumlah Variabel Independen:**

- **Persamaan Diferensial Biasa (Ordinary Differential Equations - ODEs):** Persamaan yang hanya melibatkan turunan terhadap satu variabel independen.
- **Persamaan Diferensial Parsial (Partial Differential Equations - PDEs):** Persamaan yang melibatkan turunan parsial terhadap dua atau lebih variabel independen.

3. **Berdasarkan Linieritas:**
   - **Linier:** Persamaan turunan dianggap linier jika tidak ada produk fungsi yang diturunkan dan tidak ada fungsi dari turunan yang berpangkat lebih dari satu. Persamaan linier didapat dengan melihat bentuk diferensialnya yaitu bila fungsi f linear pada y', y'', …, $y^{(n)}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

   - **Non-Linier:** Jika persamaan melibatkan produk atau pangkat dari fungsi yang diturunkan atau dari turunannya, maka persamaan tersebut adalah non-linier.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

1.2. Soal-Soal Persamaan Turunan

a) Klasifikasikan persamaan turunan berikut termasuk linier atau non linier:

i. $x^2y'' + xy' + y = 0$

ii. $(y - x)dx + 4xdy = 0$

iii. $y''' + 5(y')^2 + 6y = 0$

iv. $y'' + xy' + \sin y = x^2$

v. $yy''' + xy' + y = 0$

vi. $y'' + y' + y = xy^2$

b) Tunjukkanlah bahwa $x^2 + y^2 = 25$ adalah solusi implisit dari persamaan diferensial berikut:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}\ pada\ (-5,5)$$

c) Tunjukkanlah bahwa fungsi $y = \frac{x^4}{16}$ pada Solusi persamaan ODE $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$

BAB 2 Persamaan Diferensial Terpisahkan dan Eksak

Persamaan diferensial biasa orde ke-n dengan x sebagai variable independent dan y sebagai variable dependen dapat dinyatakan dalam bentuk:

$$a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x)$$

Dengan $a_0(x) \neq 0$

Untuk mendeteksi persamaan diferensial ini homogen atau tidak maka dapat dilihat nilai dari $f(x)$ nya apakah $f(x) = 0$ atau $f(x) \neq 0$.

Apabila $f(x) = 0$ maka disebut persamaan diferensial homogen, sebaliknya jika $f(x) \neq 0$ maka persamaan diferensial tersebut dikategorikan sebagai non homogen.

Sebagai contoh:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + x^3 y = e^x$$

Merupakan persamaan diferensial orde-2 non homogen.

2.1. Persamaan Diferensial Orde 1

Bentuk umum dari persamaan diferensial orde 1 dapat dijabarkan sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Dapat pula berbentuk $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$M(x,y) = f_1(x)g_1(y)$$

$$N(x,y) = f_2(x)g_2(y)$$

Persamaan diferensial orde-1 ini dapat dikerjakan yaitu dengan cara pemisahan peubah.

2.2. Pemisahan Peubah

$$f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$$

Persamaan diferensial diubah dalam bentuk diatas lalu dibagi oleh $f_2(x)g_1(y)$ dan menjadi:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Lalu integralkan

$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = 0$$

Latihan soal:

a. $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$

b. $(2x + xy^2)dx + (y + x^2y)dy = 0$

2.3. Persamaan Diferensial Eksak

Persamaan diferensial eksak adalah jenis persamaan diferensial biasa (ordinary differential equation, ODE) orde pertama yang dapat dinyatakan sebagai diferensial total dari suatu fungsi. Ini berarti bahwa persamaan tersebut dapat diintegrasikan langsung karena merupakan turunan dari suatu fungsi potensial. Persamaan ini banyak digunakan dalam matematika dan teknik untuk memodelkan berbagai fenomena fisika dan teknik.

Sebuah persamaan diferensial orde pertama bentukya:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Persamaan diferensial dikatakan eksak apabila fungsi:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Langkah-langkah menyelesaikan persamaan diferensial eksak:

- Periksa keeksakan persamaan

  Hitung turunan parsial dari M dan N

  Apabila

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

  Maka persamaan diferensial tersebut adalah eksak

  Contoh-contoh penyelesaian persamaan diferensial eksak sebagai berikut:

Contoh : $(3x^2 + y\cos x)\,dx + (\sin x - 4y^3)\,dy = 0 = dU$

$M = 3x^2 + y\cos x \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 0 + \cos x$

$N = \sin x - 4y^3 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \cos x - 0$

$\left.\right\} \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ (eksak)

Solusi :

$\frac{\partial U}{\partial x} = M \longrightarrow \int \partial U = \int (3x^2 + y\cos x)\,dx$

$U = x^3 + y\sin x + h(y)$

$\downarrow$

$\frac{\partial U}{\partial y} = N = \sin x - 4y^3$

$0 + \cancel{\sin x} + h'(y) = \cancel{\sin x} - 4y^3$

$h'(y) = -4y^3$

$h(y) = -y^4 + C$

Substitusi ke U

$U = x^3 + y\sin x - y^4 + C$

karena $dU = 0$

$d(x^3 + y\sin x - y^4 + C) = 0$

So, $x^3 + y\sin x - y^4 = C$

contoh : $(x+2y)\,dx + (2x-5y)\,dy = 0 \quad = du$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 2$ (exak)

$\frac{\partial u}{\partial x} = M \rightarrow \int x + 2y \; dx = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + h(y)$

$u = \frac{1}{2}x^2 + 2xy + h(y)$

$\frac{\partial u}{\partial y} = N \rightarrow 0 + 2x + h'(y) = 2x - 5y$

$h'(y) = -5y$

$h(y) = \int -5y = -\frac{5}{2}y^2$

Substitusi ke u

$u = \frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 + c$

$du = 0 \rightarrow d\left(\frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 + c_1\right) = 0$

$\frac{1}{2}x^2 + 2xy - \frac{5}{2}y^2 + c_1 + c_2 = 0$

$(3xy + 2y^3) + (3x^2 + 5xy^2)\frac{dy}{dx} = 0$

Step 1 (Periksa apakah eksak?)

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x + 6y^2$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3x + 5y^2$

} blm eksak

tambah integrating factor

$3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3} + (3x^{m+2}y^n + 5x^{m+1}y^{n+2})y' = 0$

$\frac{\partial M}{\partial y} = 3(n+1)\ x^{m+1}y^n + 2(n+3)\ x^m y^{n+2}$

$\frac{\partial N}{\partial x} = 3(m+2)\ x^{m+1}y^n + 5(m+1)\ x^m y^{n+2}$

$\cancel{3}(n+1) = \cancel{3}(m+2)$

$2(n+3) = 5(m+1)$

} eliminasi dan subtitusi

$n = m+1$

$2(m+1+3) = 5m+5$

$2m+8 = 5m+5$

$3m = 3$

$m = 1$

$n = 2$

} Integrating factor $= xy^2$

kalikan integrating factor ke pers awal

$xy^2\left[(3xy+2y^3)\,dx+(3x^2+5xy^2)\,dy\right]=0$

Pers baru

$(3x^2y^3+2xy^5)\,dx+(3x^3y^2+5x^2y^4)\,dy=0$

cek eksak!

$\frac{\partial M}{\partial y}=9x^2y^2+10xy^4$

$\frac{\partial N}{\partial x}=9x^2y^2+10xy^4$

eksak!

Latihan soal:

Selesaikan persamaan diferensial berikut

a. $(2xy+2y^2)dx+\left(\frac{2}{3}x^2+2xy\right)dy=0$

b. $(y+3x+xy+3)dx+(x^2+2x)dx=0$

c. $3x^3y^2\frac{dy}{dx}+3x^2y^3-5x^4=0$

BAB 3 Persamaan Diferensial dengan Faktor Integrasi dan Persamaan Diferensial Bernouli

3.1. Persamaan Diferensial dengan Faktor Integrasi

Persamaan ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

Untuk menyelesaikan persamaan diferensial berikut, maka Langkah pertama penyelesaiannya adalah dengan mengubah persamaan di soal menjadi bentuk umum seperti diatas.

Langkah kedua adalah untuk membuat catatan mengenai nilai P dan Q pada persamaan diferensial diatas, lalu hitung faktor integrasinya. Untuk menghitung factor integrasinya adalah dengan menggunakan formula berikut:

$$IF = e^{\int P\,dx}$$

Terakhir, untuk menyelesaikan persamaan diferensialnya, maka dilakukan dengan mensubtitusi factor integrasi ke persamaan dibawah ini:

$$y = \frac{1}{IF}\int IF\,Q\,dx$$

Berikut adalah contoh soal penyelesaian persamaan diferensial dengan factor integrasi:

$$(x^2-9)\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{(x-3)(x+3)} = 0$$

$$IF: e^{\int P(x)\,dx}$$

$$= e^{\boxed{\int \frac{x}{(x^2-9)}\,dx}}$$

$$\int \frac{x}{(x^2-9)}\,dx$$

$$\int \frac{x}{(x-3)(x+3)}\,dx$$

$$\int \boxed{\frac{1/2}{(x+3)}} + \frac{1/2}{(x-3)}\,dx$$

$u = x+3$

$du = dx$

$$\int \frac{1/2}{u}\,du$$

$$\frac{1}{2}\ln u + c$$

$$\frac{\ln u + c \quad + \ln u + c}{2}$$

$$\frac{\ln(x-3) + \ln(x+3)}{2} + c = IF$$

$$y = \frac{1}{IF} \int Q \cdot IF \, dx$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{\ln(x-3) + \ln(x+3)}{2}}}$$

$$= \frac{1}{(x-3)^{1/2} \cdot (x+3)^{1/2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2-9)^{1/2}} + C$$

Latihan Soal:

a. $\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$

b. $(1+x)\frac{dy}{dx} - xy = x + x^2$

c. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$

d. $x^2\frac{dy}{dx} + x(x+2)y = e^x$

3.2. Persamaan Bernoulli

Persamaan Bernoulli adalah salah satu jenis persamaan diferensial biasa (ordinary differential equation, ODE) non-linier orde pertama yang dapat diubah menjadi persamaan diferensial linier melalui substitusi tertentu. Persamaan ini dinamai dari matematikawan Swiss, Jacob Bernoulli, yang mempelopori studi tentang persamaan ini pada abad ke-17.

Bentuk umum persamaan Bernoulli:

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

Dimana:

y adalah fungsi yang bergantung pada x

P dan Q adalah fungsi kontinu dari x

N adalah bilangan real, $n \neq 0,\ n \neq 1$

Jika $n = 0, dan\, n = 1$ maka persamaan tersebut menjadi persamaan diferensial linier orde pertama yang dapat diselesaikan dengan metode standar.

3.2.1. Metode Penyelesaian Persamaan Bernoulli

- Subtitusi variable

  Dengan memisalkan $u = y^{1-n}$

- Ketahui persamaan tersebut apakah persamaan Bernoulli atau bukan dengan memerhatikan pangkat dari y.

- Substitusi ke persamaan berikut

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{du}{dx} + Pu = Q$$

- Lalu cari factor integrasinya dengan persamaan factor integrasi:

$$IF = e^{\int P\, dx}$$

- Subtitusikan ke persamaan berikut

$$u = y^{1-n} = \frac{\int (1-n) IF\ Q\ dx}{IF}$$

  Selesai!

Contoh soal dan pembahasan:

Soal:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x} y = xy^2$$

Step 1 $\rightarrow$ Bernoulli / Bukan ? ya!

Step 2 $\rightarrow$ value n? 2

Step 3 $\rightarrow$ substitusi ke $\frac{1}{(1-n)} \frac{du}{dx} + Pu = Q$

$$= \frac{1}{1-2} \frac{du}{dx} - \frac{1}{x} u = x$$

$$= -\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} u = x$$

$$= -u' - \frac{1}{x} u = x$$

$$u' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{P} u = \underbrace{-x}_{Q}$$

Step 4 → cari IF !

$$IF = e^{\int P\,dx}$$

$$= e^{\int \frac{1}{x} dx}$$

$$= e^{\ln x}$$

$$= x$$

Step 5 → Substitusi ke persamaan

$$u = y^{1-n} = \frac{\int Q \,.\, IF\, dx}{IF}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\int -x \,.\, x \; dx}{IF}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{-\frac{x^3}{3} + C}{x}$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{x^2}{3} + \frac{C}{x}$$

$$y = \frac{3x}{-x^3 + C}$$

Latihan soal:

a. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$

BAB 4 Pemecahan Masalah Nyata dengan Penerapan Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial adalah alat analitik yang sangat penting untuk memodelkan dan menyelesaikan berbagai fenomena dalam dunia nyata, terutama yang melibatkan perubahan kontinu. Persamaan ini memungkinkan kita untuk memodelkan hubungan dinamis antara variabel yang berubah terhadap waktu atau ruang, serta menemukan solusi yang membantu memahami perilaku sistem tersebut. Dengan menggunakan persamaan ini, kita dapat memahami dinamika sistem, memprediksi perilaku, dan mengoptimalkan solusi di berbagai bidang seperti sains, teknik, ekonomi, dan lingkungan. Berikut adalah beberapa contoh aplikasi nyata yang melibatkan persamaan diferensial lengkap dengan rumus terkait.

4.1. Model Pertumbuhan Populasi

Deskripsi: Persamaan diferensial digunakan untuk menggambarkan dinamika pertumbuhan populasi, baik untuk manusia, hewan, maupun mikroorganisme. Ini penting dalam bidang ekologi, perencanaan perkotaan, dan pertanian untuk memprediksi pertumbuhan populasi dan kebutuhan sumber daya di masa depan.

a. Pertumbuhan Eksponensial

$$\frac{dP}{dt} = rP \quad \text{dengan solusi: } P(t) = P_0 e^{rt}$$

Model ini cocok untuk skenario dengan sumber daya yang melimpah, seperti pertumbuhan bakteri di laboratorium.

b. Pertumbuhan Logistik

Memperhitungkan batas lingkungan (carrying capacity):

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) \quad \text{dengan solusi: } P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K-P_0}{P_0}\right)e^{-rt}}$$

Model ini lebih realistis untuk populasi dalam ekosistem yang terbatas.

4.2. Penyebaran Penyakit

Model SIR (Susceptible-Infected-Recovered) menggunakan persamaan diferensial untuk memodelkan penyebaran penyakit menular. Hal ini berguna dalam epidemiologi untuk menentukan strategi mitigasi, seperti vaksinasi atau karantina.

Model SIR:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \quad \frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I, \quad \frac{dR}{dt} = \gamma I$$

Di mana:

- S: populasi rentan,
- I: populasi terinfeksi,
- R: populasi sembuh,
- β: laju infeksi,
- γ: laju pemulihan.

Model ini membantu memprediksi puncak infeksi dan waktu yang dibutuhkan untuk mengendalikan pandemi.

4.3. Sistem Pendingin dan Pengurangan Emisi

Persamaan panas (Heat Equation) digunakan untuk menganalisis distribusi suhu pada sistem pendingin seperti cold storage, bahan isolasi, atau perangkat elektronik. Aplikasi ini relevan untuk meningkatkan efisiensi energi dan mengurangi emisi karbon.

Persamaan Panas:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \nabla^2 u$$

Di mana:

- $u(x, t)$: suhu sebagai fungsi posisi dan waktu,
- α: difusivitas termal.

Aplikasi ini sering digabungkan dengan teknologi energi terbarukan, seperti photovoltaic, dan refrigeran low-GWP seperti R32, yang terbukti mengurangi emisi karbon hingga 20–25%.

4.4. Dinamika Keuangan

Dalam bidang keuangan, persamaan diferensial digunakan untuk memodelkan perubahan nilai investasi dan opsi keuangan, mendukung pengambilan keputusan yang berbasis data.

Persamaan Black-Scholes:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0$$

Di mana:

- V: nilai opsi,
- S: harga saham,
- r: tingkat bunga bebas risiko,
- σ: volatilitas saham.

Model ini membantu perusahaan keuangan mengelola risiko dan mengoptimalkan investasi.

4.5. Aliran Fluida (Persamaan Navier Stokes)

Persamaan Navier-Stokes digunakan untuk memahami perilaku fluida dalam berbagai aplikasi, seperti desain mesin jet, analisis cuaca, dan transportasi cairan.

Persamaan Navier-Stokes:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v}\right) = -\nabla p + \mu\nabla^2\mathbf{v} + \mathbf{f}$$

Di mana:

- ρ: densitas fluida,
- $\mathbf{v}$: kecepatan fluida,
- p: tekanan,
- μ: viskositas fluida.

4.6. Kesimpulan

Persamaan diferensial adalah alat yang sangat fleksibel dan kuat untuk menyelesaikan masalah nyata yang kompleks. Dengan pendekatan ini, kita dapat memecahkan tantangan di berbagai bidang seperti kesehatan, energi, keuangan, dan lingkungan. Kemajuan dalam teknologi komputasi juga memungkinkan simulasi berbasis persamaan diferensial menjadi lebih efisien dan akurat, memberikan solusi yang aplikatif untuk kebutuhan masa depan.

BAB 5 TRANSFORMASI LINIER

5.1. Definisi Transformasi Linier

Sebuah transformasi T disebut transformasi linier jika memenuhi dua sifat berikut untuk semua vektor u, v ∈ V dan semua skalar c ∈ R:

1. Preservasi Penjumlahan: T(u + v) = T(u) + T(v)
2. Preservasi Perkalian Skalar: T(cu) = cT(u)

5.2. Representasi Matriks dari Transformasi Linier

Setiap transformasi linier dapat direpresentasikan dalam bentuk matriks. Jika T: R^n → R^m adalah transformasi linier, maka:

T(x) = A x, di mana A adalah matriks m x n yang mewakili transformasi T.

Contoh: Matriks rotasi sudut θ:

[cos(θ) -sin(θ)]

[sin(θ)   cos(θ)]

5.3. Sifat-Sifat Transformasi Linier

1. Transformasi Nol: T(x) = 0 untuk semua x ∈ V.
2. Transformasi Identitas: T(x) = x untuk semua x ∈ V.
3. Komposisi Transformasi: (T2 ∘ T1)(x) = T2(T1(x)).
4. Invers Transformasi: T memiliki invers jika dan hanya jika T bersifat bijektif.

5.4. Jenis-Jenis Transformasi Linier

1. Refleksi: Memantulkan vektor terhadap sumbu atau bidang tertentu.

2. Rotasi: Memutar vektor dengan sudut tertentu.

3. Skalasi: Mengubah panjang vektor tanpa mengubah arah.

4. Shearing: Mengubah bentuk vektor dengan meregangkan satu arah.

5.5. Kernel dan Image Transformasi Linier

1. Kernel (Null Space): Himpunan semua vektor yang dipetakan ke 0. $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in V \mid T(x) = 0\}$.

2. Image (Range): Himpunan semua vektor di W yang merupakan hasil transformasi dari $x \in V$. $\mathrm{Im}(T) = \{T(x) \mid x \in V\}$.

5.6. Aplikasi Transformasi Linier

1. Grafik Komputer: Transformasi 2D dan 3D seperti rotasi, translasi, dan skalasi.

2. Pemrosesan Sinyal: Transformasi Fourier adalah contoh transformasi linier.

3. Ilmu Data: Reduksi dimensi seperti PCA (Principal Component Analysis).

4. Robotika dan Kontrol: Representasi dan manipulasi gerakan dalam ruang 3D.

5.7. Kesimpulan

Transformasi linier adalah konsep mendasar yang memberikan cara sistematis untuk mempelajari perubahan dalam ruang vektor. Dengan memahami sifat-

sifat, jenis, dan aplikasinya, transformasi linier dapat diterapkan untuk memecahkan berbagai masalah dalam matematika dan sains terapan.

5.8. Contoh Soal

- Diketahui bahwa sin x dan cos x merupakan solusi dari PD:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0.$$

Tunjukkan bahwa $c_1 \sin x + c_2 \cos x$ juga merupakan solusi PD untuk sebarang bilangan real c_1 dan c_2.

Jawab :

Karena

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2(c_1 \sin x + c_2 \cos x)}{dx^2} = -c_1 \sin x - c_2 \cos x$$

maka

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = (-c_1 \sin x - c_2 \cos x) + (c_1 \sin x + c_2 \cos x) = 0.$$

Terbukti

- Perhatikan bahwa e^x, e^{-x}, dan e^{2x} adalah solusi dari PD

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Tunjukkan bahwa kombinasi linearnya juga merupakan solusi.

Jawab :

Misalkan kombinasi linearnya adalah $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + c_3 e^{2x}$ untuk sebarang bilangan real c_1, c_2 dan c_3. Darisini diperoleh

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 2c_3 e^{2x}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + 4c_3 e^{2x}, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 8c_3 e^{2x}.
\end{aligned}$$

Darisini diperoleh bahwa

$$
\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dx^3} &- 2\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 2y \\
&= \{c_1e^x - c_2e^{-x} + 8c_3e^{2x}\} - 2\{c_1e^x + c_2e^{-x} + 4c_3e^{2x}\} \\
&- \{c_1e^x - c_2e^{-x} + 2c_3e^{2x}\} + 2\{c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{2x}\} \\
&= (c_1 - 2c_1 - c_1 + 2c_1)e^x + (-c_2 - 2c_2 + c_2 + 2c_2)e^{-x} \\
&+ (8c_3 - 8c_3 + 2c_3 + 2c_3)e^{2x} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Terbukti.

BAB 6 NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Modul ini membahas tentang nilai eigen dan vektor eigen. Untuk nilai eigen, pembahasan difokuskan pada nilai eigen riil, khususnya untuk matriks berordo 2×2, matriks berordo 3×3, matriks segitiga atas, dan matriks segitiga bawah. Sedangkan untuk vektor eigen, yang dibahas adalah vektor eigen untuk matriks berukuran 2×2 dan 3×3.

6.1. Definisi

Jika A adalah matriks berukuran $n \times n$, maka sebuah vektor tak nol x di $\mathbb{R}^n$ disebut vektor eigen dari A jika Ax adalah sebuah kelipatan skalar dari x, yaitu

$$Ax = \lambda x$$

Untuk beberapa skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A, dan x dikatakan menjadi vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ.

6.2. NILAI EIGEN RIIL

Cara memperoleh nilai eigen dari suatu matriks A yang berukuran 2×2 adalah sebagai berikut.

Diketahui bahwa

$$\begin{gathered} Ax = \lambda x \\ Ax = \lambda I x \\ (\lambda I - A)x = 0 \end{gathered}$$

Agar λ menjadi nilai eigen, maka harus terdapat satu solusi tak nol dari persamaan tersebut. Persamaan tersebut memiliki solusi tak nol jika dan hanya jika

$$|\lambda I - A| = 0$$

Persamaan diatas disebut persamaan karakteristik matriks A, skalar-skalar yang memenuhi persamaan ini adalah nilai-nilai eigen dari A.

Nilai Eigen dari Matriks 2×2

Misalkan

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks A adalah:

$$|\lambda I - A| = 0$$

$$\left|\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\left|\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = 0$$

$$(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0$$

$$(\lambda - a)(\lambda - d) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0$$

Untuk memperoleh akar karakteristik λ dapat menggunakan metode pemfaktoran, kuadrat sempurna atau rumus Khawarizmi (abc).