

Model Optimisasi Dinamis Pengelolaan Sumberdaya Alam



Sударsono Soedomo

Forcidev IPB

Model Optimisasi Dinamis Pengelolaan Sumberdaya Alam

Sudarsono Soedomo

Forcidev IPB

Model Optimisasi Dinami Pengelolaan Sumberdaya Alam
Sudarsono Soedomo
Hak Cipta © 2022 pada Forcidev IPB

Diterbitkan oleh Percetakan IPB Bogor

Buku ini saya persembahkan untuk:

Almarhum ayah dan bundaku
Victoria dan yang berikutnya

Kata Pengantar

Buku ini saya tulis sebagai perwujudan dari hobi pribadi. Pada saat yang sama, penulis juga prihatin dengan kecenderungan yang terjadi di dalam masyarakat, yakni gandrung gelar akademis tetapi menghindari materi yang dianggap rumit. Materi yang menggunakan notasi matematik langsung dianggap sebagai materi yang rumit, terlebih lagi materi yang mengandung notasi matematik yang merepresentasikan proses dinamis. Padahal, setiap insan pastilah hidup dalam proses dinamis dan harus mengambil keputusan dari waktu ke waktu. Dengan kata lain, setiap insan pastilah praktisi proses dinamis. Dengan demikian, memahami proses dinamis seharusnya menjadi proses alami yang harus tidak dihindari.

Sebenarnya sudah banyak buku semacam ini yang beredar di pasar, tetapi umumnya berbahasa asing. Tambah lagi satu alasan untuk menghindari. Semakin nyaman perasaan seseorang dalam kemendegannya.

Harapan penulis, mahasiswa undergraduate tingkat akhir atau graduate tahun pertama yang mengambil bidang yang berkaitan dengan sumberdaya alam dapat menguasai isi buku ini dengan baik.

Beberapa siswa tidak menyukai matematika, tetapi memahami bahwa matematika sangat penting dalam masyarakat modern. Siswa-siswa ini menganggap matematika sebagai semacam kejahatan yang diperlukan. Akibatnya, mereka hanya ingin tahu bagaimana menggunakan matematika, karena mereka menyadari bahwa pengetahuan ini mungkin berguna di kemudian hari. Ini, bagaimanapun, tidak cukup baik. Kita tidak hanya membutuhkan siswa yang ingin tahu bagaimana menggunakan matematika, kita juga membutuhkan beberapa siswa yang ingin tahu bagaimana atau mengapa matematika bekerja.

Daftar Tabel

2.1	Klasifikasi Nilai b	26
-----	---------------------------------	----

Daftar Gambar

2.1	Stabilitas Sistem	15
2.2	Stabilitas Titik Keseimbangan	17
2.3	Stabilitas Titik Keseimbangan	19
2.4	Analisis Stabilitas Sistem dengan Ekspansi di Sekitar Titik Keseimbangan	20
2.5	Dinamika Sistem	28
3.1	Contoh diagram fungsi pertumbuhan logistik	58
3.2	Tahap Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace	72
4.1	Dinamika Populasi dari Berbagai Model	78
4.2	Pertumbuhan Biomass Logistik	79
4.3	Laju Pertumbuhan dan Laju Panen	81
4.4	Laju Pertumbuhan dan Laju Panen Linear	82
5.1	Lintasan & maksimisasi fungsional	85
5.2	Kesetaraan kurva fungsional	87
5.3	Lemma	88
5.4	Admissible Comparison Control and Path	96

6.1	Perbandingan antara fungsi (kiri) dan fungsional (kanan)	104
6.2	Lintasan Terpendek	107
6.3	Analisis Lintasan Terpendek	111
7.1	Lintasan variabel costate	143
7.2	Lintasan variabel kontrol dan variabel state optimal . . .	145
7.3	a	149
7.4	Dua lintasan control variable akibat dari perbedaan horizon waktu	150
7.5	Lintasan optimal <i>control variable</i> (u^*) dan <i>state variable</i> (x^*)	156
7.6	Lintasan optimal <i>control variable</i> (u^*) dan <i>state variable</i> (x^*)	159
7.7	Problem Vertikal atau Titik Akhir Bebas	162
7.8	Garis Terminal Horisontal	168
7.9	Titik Terminal Tertentu	169
7.10	Kurva Terminal	169
7.11	Garis Terminal Vertikal Terpotong	171
7.12	Garis Terminal Horisontal Terpotong	171
8.1	Fungsi permintaan tipikal	180
8.2	Lintasan Ekstraksi dan Stok Optimal	188
8.3	Lintasan Ekstraksi dan Stok Optimal dengan Harga Maksimum	191

Daftar Isi

Kata Pengantar	v
Daftar Tabel	vii
Daftar Gambar	viii
Daftar Isi	x
1 Pendahuluan	1
2 Persamaan Perbedaan	11
2.1 Pengertian Dasar	12
2.2 Keseimbangan dan Stabilitas	14
2.3 Persamaan Perbedaan Order-Pertama	20
2.3.1 Metoda Iterasi	20
2.3.2 Metoda Umum	22
2.3.3 Dinamika Stabilitas Keseimbangan	25
2.3.3.1 Peran b	25
2.3.3.2 Peran A	29
2.3.4 Konvergensi Menuju Keseimbangan	29
2.4 Persamaan Perbedaan Linear Order Kedua	30

2.4.1	Integral Khusus	31
2.4.2	Fungsi Komplemen	32
2.4.2.1	Akar riil yang berbeda	33
2.4.2.2	Akar riil yang berulang	34
2.4.2.3	Akar kompleks	35
2.4.3	Konvergensi Lintasan Waktu	36
2.5	Persamaan Perbedaan Linear Order Lebih Tinggi	38
3	Persamaan Diferensial	41
3.1	Pengertian	42
3.2	Persamaan Linear Order Pertama	44
3.3	Persamaan Linear Order Kedua	50
3.3.1	Homogen	50
3.3.1.1	Akar Riil dan Beda	51
3.3.1.2	Akar Riil dan Sama	53
3.3.1.3	Akar Konjugat Kompleks	53
3.3.2	Tidak Homogen	54
3.4	Diagram Fase	56
3.5	Transformasi Laplace	59
3.5.1	Eksistensi Transform Laplace	61
3.5.2	Sifat Transform Laplace	63
3.5.3	Solusi Persamaan Diferensial Menggunakan Transform Laplace	65
3.5.4	Formula Inversi dari Transform Laplace	71
4	Sumberdaya	73
4.1	Sumberdaya Nonrenewable	74

4.2	Sumberdaya Renewable	76
4.2.1	Model Pertumbuhan	76
4.2.2	Pertumbuhan dan Panen	79
4.2.3	Steady State	80
5	Kalkulus Variasi	83
5.1	Pengantar	83
5.2	Persamaan Euler	86
5.3	Generalisasi Persamaan Euler	95
5.3.1	Kasus Beberapa Variabel	96
5.4	Syarat Harus & Syarat Cukup	97
5.4.1	Argumen Keharusan	97
5.4.2	Argumen Kecukupan.	99
6	Pemograman Dinamis	101
6.1	Konsep Fungsional	102
6.2	Teorem Optimalitas Bellman	104
6.2.1	Studi Contoh	106
6.2.2	Teorem Optimalitas	110
6.3	Model Diskrit	111
6.3.1	Horison Berhingga	111
6.3.1.1	Strategi Penyelesaian	112
6.3.1.2	Contoh Aplikasi	113
	Direct attack.	118
	Pemrograman dinamis.	118
6.3.2	Horison Takberhingga	120
6.4	Model Kontinyu	122

6.4.1	Horison Berhingga	122
6.4.2	Horison Takberhingga	131
6.4.2.1	Argumen Kecukupan	132
7	Prinsip Maksimum Pontryagin	133
7.1	Model Kontinyu	134
7.2	Model Diskrit	134
7.3	Variabel Kontrol Diskontinyu	140
	Langkah 1:	142
	Langkah 2:	143
	Langkah 3:	145
7.4	Kondisi Transversalitas atau Kondisi Terminal	149
7.4.1	Titik Akhir Pasti	149
7.4.2	Problem Vertikal atau Titik Akhir Bebas	161
7.4.3	Garis Akhir Horisontal	167
7.4.4	Titik Terminal Tertentu	167
7.4.5	Kurva Terminal	168
7.4.6	Garis Terminal Vertikal Terpotong	170
7.4.7	Garis Terminal Horisontal Terpotong	170
7.5	Nilai Sisa (<i>Salvage Value</i>)	171
8	Model Pengelolaan Sumberdaya Nonrenewable	177
8.1	Model Hotelling tentang Ekstraksi Optimal Secara Sosial	179
8.2	Kontrol Optimal	183
8.2.1	Kompetitif vs Monopoli: Seluruh Sumberdaya Ha- bis	183

8.2.2	Kompetitif vs Monopoli: Jangka Waktu Ekstraksi Tertentu	185
8.2.3	Beberapa Contoh	186
8.2.3.1	Kompetitif dan Stok Akhir Tertentu . . .	186

"An idea that is not dangerous is not worthy of being called an idea at all."

Oscar Wilde

"No grand idea was born in a conference, but a lot of foolish ideas have died there."

E. Scott Fitzgerald

"The difference between genius and stupidity is that genius has its limits."

Albert Einstein

1

Pendahuluan

Seorang anak yang berumur empat tahun sedang hendak menghirup segelas es sirup. Berapa laju terbaik untuk menikmati es sirup tersebut? Atau, bagaimana laju konsumsi optimal dari waktu ke waktu yang harus dipilihnya? Jawaban terhadap pertanyaan ini memerlukan lintasan optimal (*optimal path*) atau (*trajectory*). Kata 'terbaik' itu sendiri menunjukkan bahwa ada kriteria tertentu yang harus dipenuhi ketika memilih diantara berbagai lintasan yang mungkin. Ada beberapa cara untuk mempengaruhi atau mengendalikan situasi. Jika $x(t)$ adalah state dari situasi pada waktu t dan $u(t)$ merepresentasikan kendali

pada waktu t , maka problem *optimal control* adalah untuk mendapatkan suatu lintasan $x(t)$ dengan memilih suatu set $u(t)$ dari kendali untuk memaksimumkan atau meminimumkan tujuan yang telah ditetapkan. Problem ini masih sangat umum. Kita dapat menambah struktur kepada problem yang sedang dihadapi bocah yang berumur empat tahun tersebut, misalnya apakah gelasny bening atau tidak, jangka waktunya terbatas atau tidak, dan sebagainya.

Ada beberapa cara untuk memecahkan problem di atas, tiga cara yang banyak dijumpai dalam literatur adalah: **a) *Calculus of variation***; **b) *Dynamic programing***; **c) *Maximum principle***.

Sejarah calculus of variation lahir segera setelah penemuan atau formalisasi dari kalkulus oleh Newton dan Leibniz. Masalah utama dalam kalkulus adalah mendapatkan suatu argumen dari sebuah fungsi pada saat fungsi tersebut mencapai maksimum atau minimum. Perluasan dari problem ini yang dibebankan kepada calculus of variation adalah untuk mendapatkan suatu fungsi yang memaksimumkan atau meminimumkan nilai dari suatu integral atau fungsional dari fungsi tersebut. Sudah dapat ditebak, problem ekstremum dari calculus of variation adalah jauh lebih sulit dari pada problem ekstremum dari kalkulus. Euler dan Lagrange biasanya dipandang sebagai peletak dasar dari calculus of variation. Pakar lain yang berkontribusi banyak pada perkembangan awal dari calculus of variation mencakup pakar matematik seperti Newton, Legendre, serta Bernoulli bersaudara. Di abad 19 dan awal abad 20, banyak ahli matematik berkontribusi terhadap teori solusi dari masalah calculus of variation. Beberapa di antaranya adalah Hamilton, Jacobi, Bolza, Weierstrass, Carathéodory, dan Bliss.

Mengkonversi problem calculus of variation menjadi problem te-

ori kontrol membutuhkan satu lagi perluasan konsep - tambahan berupa variabel kontrol terhadap persamaan state. Waktu kelahiran dari teori kontrol modern adalah sekitar tahun 1957-1958. Pada saat yang hampir bersamaan terbit dua buku, yakni satu buku ditulis oleh Richard Bellman di tahun 1957 tentang pemrograman dinamis (*Dynamic Programming*) di Amerika Serikat dan satu buku yang lainnya ditulis oleh Pontryagin, Boltyanskii, Gambrelidze, dan Mischenko di tahun 1958 tentang prinsip maksimum (*Maximum Principle*). Oleh karena itu, dapat dimengerti mengapa publikasi awal tentang ekonomi sumberdaya alam menggunakan calculus of variation (lihat ?).

Kita akan lebih fokus pada aplikasi dari maximum principle yang merupakan karya Pontryagin. Cara manapun yang dipakai dari ketiganya, hasil terpenting yang harus diperoleh adalah persamaan Euler. Karena minimisasi fungsi tujuan pada dasarnya sama dengan maksimisasi nilai negatifnya, maka kita akan membatasi diri pada maksimisasi saja. Problem yang hendak dipecahkan dapat dinyatakan dalam bentuk model kontinu atau model diskret. Keduanya akan kita bahas.

Meskipun pengelolaan sumberdaya takterpulihkan dan terpulihkan, serta pengendalian polusi merupakan isu yang berciri berbeda, struktur utamanya sangatlah mirip. Hal itu pada dasarnya adalah problem pembuatan keputusan dimana waktu memainkan peran pokok. Teori kontrol dari sistem dinamis sangat sesuai untuk menangani situasi seperti itu dan untuk membangun model matematik dengan metoda analitik, algorithmik, dan/atau numerik. Pertama, pendekatan seperti itu jelas memperhitungkan evolusi dan mekanisme yang dinamis. Kedua, hal ini secara langsung bergelut dengan isu pembuatan keputusan, perencanaan, dan pengelolaan. Selanjutnya, teori kontrol membe-

rikan metoda berbeda untuk memperingkat dan memilih keputusan atau kontrol ketika stabilitas, viabilitas, atau optimalitas terlihat relevan bagi tujuan-tujuan lingkungan dan kelestarian.

State, kontrol, dan dinamika. Setiap keputusan mungkin memengaruhi apa yang disebut dengan state dari sistem: mekanisme seperti itu terutama mengacu kepada dinamika atau transisi, yang mencakup dinamika populasi, dinamika akumulasi kapital, dan siklus karbon, sekedar mengambil beberapa contoh.

Kendala. Dalam setiap tahap, mungkin terdapat kondisi admissibility, viability, desirability atau effectiveness yang harus dipenuhi, sesuai dengan kendala-kendala sistem yang bersangkutan. Konstrain tersebut mungkin mengacu kepada syarat ketidakkpunahan bagi populasi, baku polusi, tingkat konsumsi yang layak, tangkapan yang dijamin, jasa ekosistem minimal atau kebutuhan dasar.

Kriteria optimisasi. Suatu kriteria atau kinerja antar waktu dapat dioptimalkan untuk memilih di antara solusi yang fisibel. Nilai kini bersih dari biaya-manfaat atau rente, utiliti konsumsi terdiskonto, kebugaran atau kesejahteraan merupakan contoh yang umum.

Praktik yang berulang akan membangun ketrampilan otot dan ke-trampilan intuitif. Oleh karena itu, latihan dengan menggunakan variasi problem sangat dianjurkan. Berdasarkan pengalaman, contoh problem dan solusinya memberikan manfaat yang sangat besar. Dengan contoh tersebut, seseorang dapat mengukur tingkat pemahaman yang telah dibangunnya - dia dapat belajar dari kesalahan atau kekuranglengkapan pemahamannya. Semakin baik tingkat pemahamannya umumnya akan semakin tinggi juga rasa percaya dirinya, yang sangat penting bagi perkembangan selanjutnya. Untuk itu, buku ini tidak akan irit ter-

hadap ruang bila ada contoh problem yang relevan dan bermanfaat untuk latihan.

Frasa “model dinamis” sebagai bagian dari judul buku mungkin telah menimbulkan kecurigaan pembaca bahwa buku ini mengandung banyak model matematik. Kecurigaan itu tidak salah sama sekali. Kalau pun ada kesalahan, barangkali kesalahan tersebut adalah menganggap bahwa model bukan matematik lebih mudah dari model matematik. Bunyi ungkapan “sepuluh dikurangi sembilan tidak sama dengan seribu sembilan ratus limapuluh delapan” sama dengan bunyi ungkapan “ $10 - 9 \neq 1958$ ” tidak dapat disangkal. Juga tidak dapat disangkal bahwa ungkapan kedua jauh lebih sederhana dan lebih kompak, bila tanda \neq dipahami sebagai “tidak sama dengan” sebagaimana kesepakatan. Sebaliknya, ungkapan “25M” tanpa kesepakatan awal dapat membingungkan; bagi seseorang yang sedang menunggu pacar boleh jadi “25M” besar sekali karena bermakna bahwa dia masih harus menunggu duapuluh lima menit lagi sebelum berjumpa sang pacar, tetapi dapat bermakna kecil sekali bagi anggota DPR-RI karena “25M” bermakna duapuluh lima milyar saja.

Pemodelan matematika merupakan aplikasi dari matematik untuk menjelaskan problem dunia nyata dan menyelidiki pertanyaan penting yang timbul darinya. Menggunakan alat matematika, problem dunia nyata diterjemahkan menjadi suatu problem matematika, yang menirukan problem dunia nyata. Setelah suatu solusi terhadap problem matematika diperoleh, solusi ini perlu diinterpretasikan dalam bahasa problem dunia nyata untuk membuat prediksi tentang dunia nyata.

Challenges in mathematical modelling not to produ-

ce the most comprehensive descriptive model but to produce the simplest possible model that incorporates the major features of the phenomenon of interest. (Howard Emmons)

Sebagaimana telah disampaikan, bahwa suatu model matematika merupakan deskripsi matematika tentang suatu situasi kehidupan nyata. Oleh karena itu, jika suatu model matematika dapat merefleksikan atau menirukan perilaku dari suatu situasi kehidupan nyata, maka kita dapat memperoleh pengertian yang lebih baik tentang sistem yang bersangkutan melalui analisis yang tepat atas model tersebut dengan menggunakan alat matematika yang tepat. Selanjutnya, dalam proses membangun model tersebut, kita menemukan berbagai faktor yang mengatur sistem yang bersangkutan, faktor-faktor yang paling penting bagi sistem tersebut dan yang mengungkap bagaimana berbagai aspek yang berbeda dari sistem tersebut terangkai.

Terkadang walau model matematika yang digunakan diadaptasikan dengan baik terhadap situasi yang dihadapi, model tersebut mungkin saja memberikan hasil yang tidak diharapkan atau sederhananya gagal. Hal ini boleh jadi merupakan indikasi bahwa kita telah mencapai batas dari model matematika yang ada dan harus mencari suatu perbaikan atau terobosan teoritik yang baru.

Dalam pemodelan matematika, lebih banyak asumsi harus dibuat, bila informasi tentang sistem dunia nyata dipandang kurang teliti atau sulit diukur. Pemodelan menjadi upaya yang kurang tepat ketika bergerak dari sistem fisik ke sistem sosial. Sebagai contoh, pemodelan sirkuit listrik jauh lebih langsung ketimbang pemodelan pengambilan

keputusan oleh manusia atau pemodelan lingkungan. Karena sistem fisik biasanya tidak berubah, informasi sebelumnya yang masuk akal adalah sangat berguna dalam memodelkan kinerja di masa depan. Tetapi, baik sistem sosial maupun lingkungan sering berubah yang berbeda dari apa yang telah terjadi, dan bahkan informasi yang benar boleh jadi kurang bernilai dalam membangun asumsi. Jadi, untuk memahami keterbatasan suatu model, adalah penting untuk memahami asumsi dasar yang digunakan untuk membangun model tersebut.

Sistem dunia nyata adalah kompleks dan melibatkan sejumlah komponen yang saling terhubung. Karena model adalah abstraksi realitas, suatu model yang baik harus berusaha memasukan semua unsur kunci dan komponen yang saling terhubung dari sistem dunia nyata. Hal ini tidak selalu mungkin. Jadi, keterbatasan bawaan dari suatu model tercipta oleh apa yang tidak tercakup. Problem muncul bila aspek kunci dari sistem dunia nyata diperlakukan secara tidak memadai dalam suatu model atau diabaikan karena untuk menghindari komplikasi, yang dapat mengarah kepada model yang tidak lengkap. Keterbatasan lain dari suatu model matematika adalah model tersebut mengasumsikan bahwa pola yang akan datang masih sama dengan pola yang telah terjadi, data input mungkin tidak pasti atau kebergunaan suatu model terbatas oleh tujuan awalnya.

Ekstrapolasi model di luar wilayah kesesuaiannya harus dihindari sejauh mungkin. Suatu model sebaiknya tidak diaplikasikan kecuali orang yang hendak mengaplikasikan tersebut memahami asumsi penyederhanaan yang di atasnya model tersebut dibangun dan orang tersebut juga dapat menguji keterpakaian dari model yang hendak digunakan. Juga penting untuk memahami bahwa model yang bersang-

kutan bukan realitas dan kita tidak boleh mendistorsi realitas agar sesuai dengan model yang dibangun. Model yang tidak layak seharusnya tidak dipertahankan dan kita seharusnya tidak membatasi diri pada model tunggal, karena lebih dari satu model dapat berguna untuk memahami berbagai aspek yang berbeda tentang fenomena yang sama. Merupakan kewajiban untuk menyadari tentang keterbatasan yang melekat dalam model. Tidak ada model terbaik, yang ada hanya model yang lebih baik.

Bahan buku ini diambil dari berbagai sumber, bahkan ada yang langsung dicuplik dan diterjemahkan ke dalam bahasa Indonesia tanpa perubahan yang berarti. Tujuannya adalah untuk memfasilitasi pembaca yang ingin mengakses berbagai konsep model matematika, khususnya model yang berkenaan dengan pengelolaan sumberdaya alam dan lingkungan. Ada yang mengkritik bahwa menyediakan bahan terjemahan seperti ini adalah kurang mendidik, karena akan membuat orang tidak terpacu untuk belajar bahasa asing. Model di balik kritik tersebut jika diterapkan dalam perpajakan kira-kira berbunyi “agar setiap orang terdorong untuk mampu membayar pajak - dengan kata lain tidak miskin, maka besarnya pajak yang harus dibayar per kepala orang Indonesia seharusnya disamakan saja dan ditetapkan agak cukup tinggi.” Saya memilih tidak menggunakan model seperti ini. Rentetan dari menghindari alat matematika adalah menghindari artikel dan buku ilmiah yang banyak menggunakan model matematika sebagai alat analisis. Belum mampu, belum mengerti, belum menguasai dan seterusnya tidak sepatasnya dijadikan kendala permanen, atau bahkan tidak pantas dijadikan kendala sama sekali.

Jadi, saya bukan pengarang buku ini, karena apa yang saya lakukan

lebih banyak mencuplik, menterjemahkan, dan menyusun ulang berbagai bahan cuplikan tersebut. Kalaupun ada perubahan yang saya lakukan, maka perubahan tersebut sangat kecil. Misalnya, dalam naskah aslinya digunakan formulasi calculus of variation, saya mengubahnya menjadi menggunakan formulasi teori kontrol optimal, model diskrit menjadi model kontinyu atau sebaliknya. Dengan rujukan yang akan diberikan pada setiap bagian, pembaca dapat melacak ke sumber aslinya.

Untuk mencapai tujuan yang dimaksudkan, maka buku ini diorganisasi sebagai berikut. Bab 2 menyajikan persamaan perbedaan. Materi ini untuk memfasilitasi analisis dalam model diskrit. Adapun jantung dari model diskrit adalah persamaan transisi atau juga disebut dengan persamaan gerak yang berbentuk

$$x_{t+1} - x_t = f(x_t, u_t, z_t) \quad (1.1)$$

dimana x_t adalah variabel state, u_t adalah variabel kontrol, dan z_t adalah variabel eksogenus, yang semuanya pada waktu t . Berikutnya adalah Bab 3 yang mendiskusikan persamaan diferensial, yang sungguh sangat mirip dengan bab sebelumnya. Bab 3 untuk memfasilitasi analisis dalam model kontinyu. Notasi yang umum digunakan untuk persamaan transisi adalah

$$\dot{x} = f(x(t), u(t), z(t)) \quad (1.2)$$

dimana $\dot{x} = x'(t) = \frac{\partial x}{\partial t}$, yang tidak lain dari perubahan variabel state dari waktu ke waktu. Notasi seperti ini akan digunakan secara bergantian dan seharusnya tidak membuat rancu. Kedua bab tersebut merupakan ingredien dasar dalam analisis model dinamis.

Ingredien penting berikutnya adalah sumberdaya alam itu sendiri, yang dibahas dalam Bab 4, baik yang renewable maupun yang nonrenewable. Akan terlihat bahwa sumberdaya renewable memberi perspektif yang lebih kaya. Satu unsur pembeda dari keduanya adalah faktor pertumbuhan, yang umumnya dinyatakan sebagai fungsi dari biomas. Oleh karena itu, memahami pola pertumbuhan sumberdaya renewable sangat esensial.

Tiba saatnya untuk mendiskusikan teknik analisis model dinamis. Pertama adalah pemrograman dinamis yang disampaikan dalam Bab 6. Kunci dari pemrograman dinamis adalah prinsip optimalitas:

An optimal policy has the property that, whatever the initial state and initial decision are, the remaining decision must constitute an optimal policy with regard to the outcome resulting from the first decision. (Richard Bellman)

Teknik analisis model dinamis berikutnya adalah kontrol optimal yang didasarkan pada prinsip maksimum:

"Knowing others is wisdom. Knowing the self is enlightenment."

Lao Tzu

"Character is made by what you stand for; reputation, by what you fall for."

Robert Quillen

"Patience is a necessary ingredient of genius."

Benjamin Disraeli

2

Persamaan Perbedaan

Persamaan perbedaan (*difference equation*) biasanya mendeskripsikan evolusi dari fenomena atau variabel tertentu seiring berjalannya waktu. Hukum yang mengatur perilaku dari variabel tersebut biasanya dinyatakan dalam satu atau lebih persamaan. Jika waktunya adalah diskrit atau bulat dan persamaan yang bersangkutan menghubungkan nilai-nilai dari variabel tersebut pada titik waktu yang berbeda, maka kita berhadapan dengan persamaan perbedaan atau hubungan yang berulang (*recurrence relation*). Ada juga yang menyebutnya sebagai persamaan berulang (*recursive equation*). Disini kita sedang

tidak membicarakan isu agama dimana suatu perbedaan pemahaman atau perbedaan sebutan dapat menggiring kepada pertikaian yang saling membunuh. Bila bab ini menimbulkan kebencian di dalam hati pembaca, maka sebaiknya berhenti sampai disini karena kebencian hanya menunda datangnya kebijaksanaan sebagai buah dari banyak belajar.

2.1 Pengertian Dasar

Perubahan suatu fenomena atau variabel biasanya dilakukan pada interval waktu tertentu, misalnya setiap hari, minggu, bulan, atau tahun. Nilai yang diamati ditandai sesuai dengan periode nilai tersebut diamati. Persamaan yang menghubungkan nilai-nilai dengan waktu yang berbeda tersebut dinamakan persamaan perbedaan.

Misalnya $f(t, x)$ adalah fungsi yang didefinisikan untuk semua t integer positif dan semua angka riil x . Persamaan perbedaan berorder pertama adalah

$$x_t = f(t, x_{t-1}) \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (2.1)$$

Ini adalah persamaan perbedaan karena persamaan ini menghubungkan nilai dari suatu fungsi di setiap periode t dengan nilai dari fungsi yang sama di periode sebelumnya $t - 1$ saja. Sebagai catatan, beberapa pihak menyebut bentuk Persamaan (2.1) dengan hubungan berulang (*recurrence relation*) dan menyatakan bahwa suatu persamaan perbedaan merupakan persamaan dimana perbedaan $\Delta x_t = x_t - x_{t-1}$ dinyatakan sebagai fungsi dari t dan x_{t-1} . Tetapi Persamaan (2.1) ternyata setara dengan persamaan perbedaan $\Delta x_t = f(t, x_{t-1}) - x_{t-1}$. Oleh karena itu, dalam bab ini istilah persamaan perbedaan akan digunakan

untuk Ekspresi (2.1) maupun Ekspresi (2.2).

$$\Delta x_t = x_t - x_{t-1} = f(t, x_{t-1}) \quad (2.2)$$

Jika dinamika x_t tergantung hanya pada dinamika x_{t-1} tetapi independen dari t , maka sistem dinamika yang bersangkutan disebut sebagai sistem yang otonom. Jika faktor t juga ikut menentukan dinamika sistem, maka sistem yang bersangkutan adalah **non-otonom**. Sebagai contoh, $x_t = 4x_{t-1}$ adalah **otonom**, sementara $x_t = t^2 + 3x_{t-1}$ adalah non-otonom.

Bentuk tipikal dari persamaan perbedaan linear order-pertama **homogen** adalah

$$x_t = a_t x_{t-1} \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

dan persamaan **non-homogen** saudaranya adalah

$$x_t = a_t x_{t-1} + b_t \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (2.4)$$

Untuk kedua ekspresi tersebut diasumsikan bahwa $a_t \neq 0$ serta a_t dan b_t merupakan fungsi bernilai riil. Persamaan (2.4) disebut homogen karena jika suatu seri x_t memenuhi persamaan yang bersangkutan, maka demikian pula untuk seri kx_t .

Problem nilai awal (*initial value problem*) adalah syarat mengetahui nilai awal tertentu guna memecahkan sekuen nilai. Untuk $x_t f(x_{t-1})$, misalnya, kita dapat menulis $x_{t+2} = f(x_{t+1}) = f(f(x_t)) = f^2(x_t) = f^3(x_{t-1})$. Jadi, sekuen nilai ditentukan hanya untuk nilai awal tertentu x_{t-1} . Dalam kasus sekuen order-kedua, maka kita membutuhkan dua nilai awal. Hal ini disebabkan, jika $x_{t+1} = f(x_t, x_{t-1})$ maka

$$x_{t+2} = f(x_{t+1}, x_t) = f(f(x_t, x_{t-1}), x_t)$$

dan seterusnya. Oleh karena itu, setiap nilai dalam sekuen akhirnya tergantung pada dua nilai awal, x_t dan x_{t-1} .

2.2 Keseimbangan dan Stabilitas

Pengertian titik keseimbangan menjadi isu pokok dalam studi tentang dinamika setiap sistem fisik. Dalam banyak aplikasi, ada kecenderungan bahwa semua solusi dari sistem tertentu menuju kepada titik keseimbangannya. Ini merupakan isu utama studi teori stabilitas.

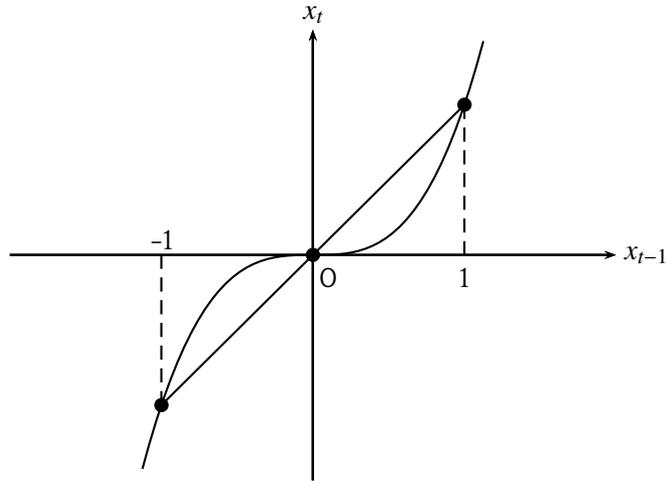
Definisi 1. Jika $x_t = f(x_{t-1})$ adalah sistem dinamis diskrit, maka x^* adalah titik tetap (*fixed point*) atau titik keseimbangan dari sistem yang bersangkutan jika

$$f(x_{t-1}) = x^* \quad \forall t \quad (2.5)$$

Definisi 2. Suatu titik x^* dalam domain dari f disebut suatu titik keseimbangan dari Ekspresi (2.1) jika titik tersebut merupakan titik tetap dari f , yakni $f(x^*) = x^*$.

Dengan kata lain, x^* adalah suatu solusi konstan dari Ekspresi (2.1), karena jika $x(0) = x^*$ adalah suatu titik awal, maka $x(1) = f(x^*) = x^*$, dan $x(2) = f(x^*) = x^*$. Secara grafik, suatu titik keseimbangan adalah koordinat- x dari titik tersebut dimana grafik dari f memotong garis diagonal $y = x$. Sebagai contoh, ada tiga titik keseimbangan bagi persamaan $x_{t+1} = x_t^3$, yakni -1, 0, dan 1 (Gambar 2.1).

Ada suatu fenomena yang unik bagi persamaan perbedaan dan tidak dapat terjadi dalam persamaan diferensial. Adalah mungkin dalam persamaan perbedaan bahwa suatu solusi boleh jadi bukan keseimbangan tetapi dapat mencapai keseimbangan setelah beberapa kali



Gambar 2.1: Stabilitas Sistem

iterasi. Dengan kata lain, suatu state yang bukan keseimbangan dapat menuju keseimbangan dalam waktu tertentu. Hal ini menggiring kepada definisi berikut:

Definisi 3. Misalnya x adalah suatu titik dalam domain dari f . Jika ada bilangan bulat positif r dan suatu titik keseimbangan x^* dari Ekspresi (2.1) sehingga $f^r(x) = x^*$, $f^{r-1}(x) \neq x^*$, maka x akhirnya merupakan titik keseimbangan (tetap).

Salah satu tujuan dari mempelajari suatu sistem dinamis adalah untuk menganalisis perilaku dari solusinya di sekitar titik keseimbangan. Studi ini sebagai bagian dari teori stabilitas. Berikut adalah definisi dasar dari stabilitas:

Definisi 4. (a) Titik keseimbangan x^* dari Ekspresi (2.1) adalah stabil jika untuk $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sehingga $|x_0 - x^*| < \delta$ berimplikasi $|f^n(x_0) - x^*| < \varepsilon$ bagi semua $n > 0$, (b) titik keseimbangan x^* disebut titik tetap

yang menolak (*repelling fixed point*) jika ada $\varepsilon > 0$ sehingga $|x(0) - x^*| < \varepsilon$ berimplikasi $|f(x_0 - x^*)| > |x_0 - x^*|$, (c) Titik x^* adalah titik keseimbangan stabil secara asimtot jika titik tersebut stabil dan penarik, yakni ada $\eta > 0$ sehingga $|x_0 - x^*| < \eta$ berimplikasi $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = x^*$. Jika $\eta = \infty$, x^* disebut stabil secara asimtot secara global (*globally asymptotically stable*).

Sebagai contoh, persamaan $x_t = ax_{t-1} + b$ mempunyai solusi

$$x_t = a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \frac{b}{1-a} \quad (a \neq 1) \quad (2.6)$$

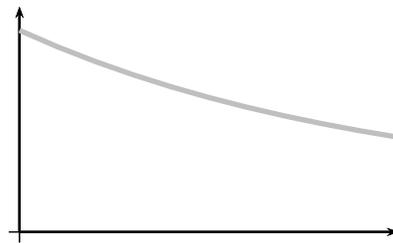
Jika $x_0 = \frac{b}{1-a}$, maka $x_t = \frac{b}{1-a}$ untuk semua t . Bila pada suatu waktu tertentu x menjadi sama dengan $\frac{b}{1-a}$ maka selamanya dia akan tetap pada level $\frac{b}{1-a}$. Jadi,

$$x^* = \frac{b}{1-a} \quad (2.7)$$

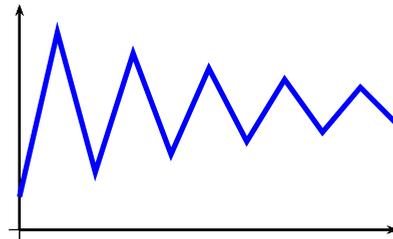
disebut sebagai suatu tingkat keseimbangan (atau *stationary*) bagi $x_t = ax_{t-1} + b$ untuk $a \neq 1$.

Selanjutnya, kita akan melihat bagaimana dinamika dari x_t dipengaruhi oleh nilai dari a . Misalnya jika $|a| < 1$ atau $-1 < a < 1$, nilai absolut dari a kurang dari satu, maka $a^t \rightarrow 0$ bila $t \rightarrow \infty$. Akibatnya $x_t \rightarrow x^* = \frac{b}{1-a}$. Oleh karena itu, jika $|a| < 1$, solusi dalam Ekspresi (2.6) mengerucut kepada tingkat keseimbangan bila $t \rightarrow \infty$. Persamaan yang bersangkutan kemudian disebut sebagai **stabil**. Gambar 2.2(a) dan 2.2(b) memperlihatkan stabilitas dengan ciri yang berbeda; yang pertama mengerucut secara monotonik menuju ke tingkat keseimbangan, sedangkan yang kedua mengerucut secara osilasi (*damped oscillations*).

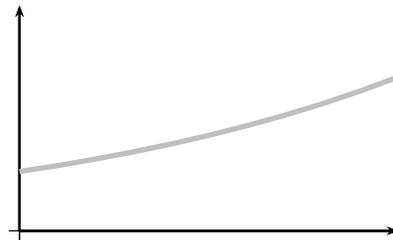
Jika $|a| > 1$, maka nilai mutlak dari a^t akan mendekati ∞ bila $t \rightarrow \infty$. Artinya, x_t akan bergerak semakin menjauh dari keseimbangan, kecu-



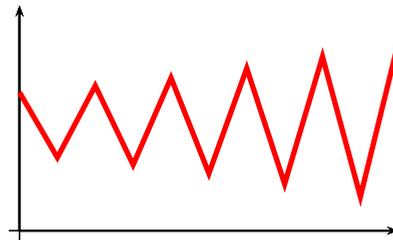
(a) Stabil



(b) Menuju stabil



(c) Eksplosif



(d) Tidak stabil

Gambar 2.2: Stabilitas Titik Keseimbangan

ali $x_0 = \frac{b}{1-a}$. Ada dua kasus disini, yakni semakin menjauh dari level keseimbangan secara monotonik (Gambar 2.2(c)) dan semakin meningkatnya fluktuasi di sekitar level equilibrium (Gambar 2.2(d)). Kasus kedua ini sering dinamakan oscilasi eksplosif.

Definisi 5. Jika suatu sekuen $\{x_t\}$ mempunyai dua nilai berulang x_1 dan x_2 , maka x_1 dan x_2 disebut titik-titik periode, dan set $\{x_1, x_2\}$ disebut suatu orbit periodik.

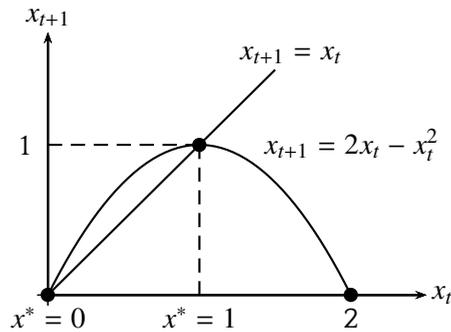
Secara geometri, suatu titik periodik- n bagi sistem diskrit $x_t = f(x_{t-1})$ merupakan koordinat- y dari titik tersebut dimana grafik f^n bertemu garis diagonal $x_t = f(x_{t-1})$. Jadi, siklus periode-3 adalah tempat $f^3(x)$ bertemu garis $x_t = x_{t-1}$.

Dalam menurunkan stabilitas dari suatu titik periodik kita perlu menghitung $[f^n(x)]'$ dan untuk melakukannya kita menggunakan kaedah berantai:

$$[f^n(x)]' = f'(x_1^*)f'(x_2^*) \cdots f'(x_n^*) \quad (2.8)$$

dimana $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ adalah titik-titik periodik- n . Apakah ada satu atau lebih titik keseimbangan, pertanyaan pentingnya adalah apakah titik tetap tersebut stabil atau tidak stabil. Sebagai contoh adalah persamaan $x_{t+1} = 2x_t - x_t^2$. Persamaan ini mempunyai dua titik keseimbangan, yakni $x^* = 0$ dan $x^* = 1$ (Gambar 2.3). Mudah dilihat bahwa $x^* = 1$ merupakan penarik, sedangkan $x^* = 0$ merupakan penolak.

Stabilitas keseimbangan dapat didekati dari perspektif yang sedikit berbeda. Misalnya persamaan perbedaan order-pertama $x_t = f(x_{t-1})$ dengan titik tetap yang memenuhi $a = f(a)$. Agar tidak membingungkan, mari kita catat x_t dengan y dan x_{t-1} dengan x sehingga kita mempunyai $y = f(x)$. Ekspansi persamaan ini sekitar titik keseimbangan

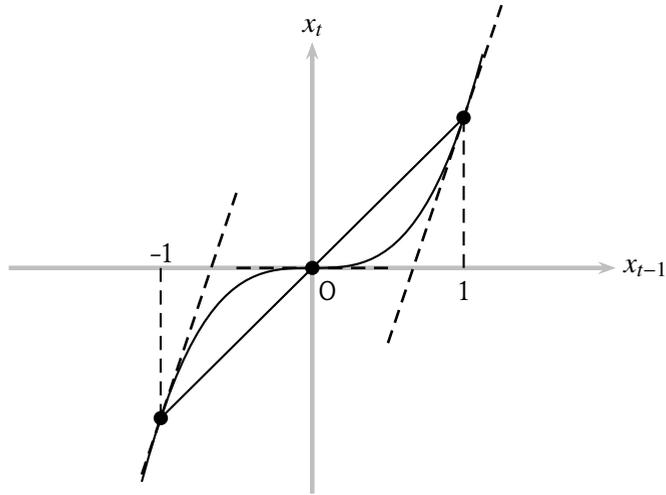


Gambar 2.3: Stabilitas Titik Keseimbangan

(a, a) memberikan $y - a = f'(a)(x - a)$ atau $y = f'(a)x + (1 - f'(a))a$ yang pada dasarnya merupakan persamaan linear dengan kemiringan $f'(a)$. Prosedur ini menyederhanakan problem stabilitas menjadi problem model linear. Jika kemiringan absolut dari $f(x)$ adalah kurang dari garis-45°, maka keadaan tersebut adalah stabil. Ringkasnya:

1. Jika $|f'(a)| < 1$ maka a adalah suatu penarik atau stabil.
2. Jika $|f'(a)| > 1$ maka a adalah suatu penolak atau tidak stabil.
3. Jika $|f'(a)| = 1$ maka situasinya tidak inkonklusif.

Kita lihat kembali persamaan $x_t = x_{t-1}^3$ yang dapat kita tulis sebagai $y = x^3$ dengan tiga titik keseimbangan $x^* = -1$, $x^* = 0$, dan $x^* = 1$ (Gambar 2.4). Selanjutnya, kemiringan pada ketiga titik keseimbangan tersebut adalah $f'(-1) > 1$, $f'(0) < 1$, dan $f'(1) > 1$. Titik keseimbangan pada $x^* = -1$ dan $x^* = 1$ adalah tidak stabil, sedang titik keseimbangan pada $x^* = 0$ adalah stabil.



Gambar 2.4: Analisis Stabilitas Sistem dengan Ekspansi di Sekitar Titik Keseimbangan

2.3 Persamaan Perbedaan Order-Pertama

2.3.1 Metoda Iterasi

Perhatikan persamaan perbedaan berikut:

$$x_t = ax_{t-1} + b_t \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (2.9)$$

Dengan menggunakan beberapa nilai t , kita dapat mempelajari pola dari persamaan ini:

$$x_1 = ax_0 + b_1$$

$$x_2 = ax_1 + b_2 = a(ax_0 + b_1) + b_2 = a^2x_0 + ab_1 + b_2$$

$$x_3 = ax_2 + b_3 = a(ax_1 + b_2) + b_3 = a(a(ax_0 + b_1) + b_2) + b_3 = a^3x_0 + a^2b_1 + ab_2 + b_3$$

Dari pola yang ada ini, kita dapat menduga bagi x_4 dan x_5 sebagai berikut:

$$\begin{aligned}x_4 &= a^4 x_0 + a^3 b_1 + a^2 b_2 + a b_3 + b_4 \\x_5 &= a^5 x_0 + a^4 b_1 + a^3 b_2 + a^2 b_3 + a b_4 + b_5\end{aligned}$$

Maka untuk sembarang t kita dapat merumuskan solusi bagi Ekspresi (2.9) sebagai berikut:

$$x_t = a x_{t-1} + b_t \quad (t = 1, 2, \dots) \implies x_t = a^t x_0 + \sum_{s=1}^t a^{t-s} b_s \quad (2.10)$$

Untuk kasus $b_t = b$ maka Ekspresi (2.10) menjadi

$$x_t = a x_{t-1} + b \quad (t = 1, 2, \dots) \implies x_t = a^t x_0 + \sum_{s=1}^t a^{t-s} b \quad (2.11)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan deret geometrik kita akan mendapatkan

$$x_t = a x_{t-1} + b \quad (t = 1, 2, \dots) \implies x_t = \begin{cases} a^t \left(x_0 - \frac{b}{1-a} \right) + \left(\frac{b}{1-a} \right), & \text{jika } a \neq 1 \\ x_0 + b t, & \text{jika } a = 1 \end{cases} \quad (2.12)$$

Sekarang mari kita kembali memperhatikan Ekspresi (2.4) untuk mencari solusinya. Melalui iterasi sebagaimana dilakukan untuk Ekspresi (2.9) dengan perbedaan koefisien yang tidak konstan akan diperoleh solusi sebagai berikut:

$$x_t = a_t x_{t-1} + b_t \quad (t = 1, 2, \dots) \implies x_t = \left(\prod_{s=1}^t a_s \right) x_0 + \sum_{r=1}^t \left(\prod_{s=r+1}^t a_s \right) b_r \quad (2.13)$$

Contoh 1. Dapatkan solusi dari $x_t = 2x_{t-1} + 3^t$, jika diketahui $x_1 = 0.5$. Pembatas $x_1 = 0.5$ berimplikasi $0.5 = 2x_0 + 3$ sehingga $x_0 = -1.25$. Menggunakan Ekspresi (2.10) diperoleh:

$$\begin{aligned} x_t &= 2^t(-1.25) + \sum_{s=1}^t 2^{t-s} 3^s \\ &= 2^t(-1.25) + 2^t \sum_{s=1}^t \left(\frac{3}{2}\right)^s \\ &= 2^t(-1.25) + 2^t \left(\frac{3}{2}\right) \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^t}{1 - \left(\frac{3}{2}\right)} \right) \\ &= -4.25(2^t) + 3^{t+1} \end{aligned}$$

Contoh 2. Dapatkan solusi bagi persamaan perbedaan homogen $px_t - qx_{t-1} = 0$. Persamaan ini dapat ditulis sebagai $x_t = \left(\frac{q}{p}\right)x_{t-1}$. Melalui iterasi kita akan memperoleh $x_t = \left(\frac{q}{p}\right)^t x_0$. Jika kita gunakan $b = \left(\frac{q}{p}\right)$ dan konstanta multiplikatif umum A (untuk x_0), maka solusi persamaan perbedaan homogen secara umum dapat ditulis sebagai:

$$x_t = Ab^t \tag{2.14}$$

Kita akan melihat bahwa ekspresi Ab^t akan memainkan peran yang sama pentingnya dengan peran Ae^{rt} dalam persamaan diferensial.

2.3.2 Metoda Umum

Misalnya kita mencari solusi untuk persamaan perbedaan order-pertama sebagai berikut:

$$x_t + ax_{t-1} = c \tag{2.15}$$

dimana a dan c adalah konstanta. Solusi umum terdiri dari jumlah dua komponen: **integral khusus** x_p , yakni solusi sembarang dari Persamaan non-homogen (2.15), dan **fungsi komplementer** x_c , yaitu solusi umum dari Persamaan (2.15) yang tereduksi:

$$x_t + ax_{t-1} = 0 \quad (2.16)$$

Komponen x_p merepresentasikan tingkat keseimbangan antar waktu dari x , sedangkan komponen x_c merupakan penyimpangan lintasan waktu dari keseimbangan itu. Jumlah x_c dan x_p membentuk solusi umum, karena keberadaan konstanta sembarang. Untuk menetapkan solusi yang pasti diperlukan kondisi awal.

Mari kita bahas fungsi komplementer lebih dahulu. Contoh 2 memberi pelajaran bahwa kita dapat mencoba suatu solusi dalam bentuk $x_t = Ab^t$ (dengan catatan $Ab^t \neq 0$). Mengingat $x_t = Ab^t$ berlaku untuk semua t , maka kita juga mempunyai $x_{t-1} = Ab^{t-1}$. Menggunakan Ekspresi (2.16) diperoleh:

$$Ab^t + aAb^{t-1} = 0 \quad (2.17)$$

yang setelah menghilangkan faktor umum yang tidak bernilai nol menghasilkan:

$$b + a = 0 \quad \text{atau} \quad b = -a \quad (2.18)$$

Sekarang mari mencari integral khususnya, yang berkaitan dengan Persamaan (2.15) selengkapnya. Untuk x_p kita dapat memilih sembarang solusi dari Ekspresi (2.15); jadi, jika solusi percobaan dalam bentuk paling sederhana $x_t = k$ memadai, maka tidak akan ada kesulitan apapun yang akan dihadapi. Jika $x_t = k$ maka kita juga akan mempunyai $x_{t+1} = k$. Melakukan substitusi nilai-nilai tersebut ke dalam Ekspresi

(2.15) menghasilkan:

$$k = \frac{c}{1+a}$$

Karena nilai k ini memenuhi persamaan yang bersangkutan, integral khusus dapat ditulis sebagai:

$$x_p = \frac{c}{(1+a)}, \quad (a \neq -1)$$

Jika $a = -1$, integral khusus $\frac{c}{(1+a)}$ tidak terdefinisi, dan solusi bagi persamaan nonhomogen harus ditemukan. Dalam hal seperti ini, kita memanfaatkan trik yang umum digunakan dengan mencoba suatu solusi yang berbentuk $x_t = kt$. Karena bentuk ini berlaku untuk semua nilai t , maka kita juga mempunyai $x_{t+1} = k(t+1)$. Setelah disubstitusikan ke dalam Persamaan (2.15) kita mendapatkan:

$$k = \frac{c}{(t+1+at)} = c, \quad (\text{karena } a = -1)$$

Jadi, $x_t = ct$. Bentuk integral khusus ini adalah fungsi tidak konstan dari t . Ini menunjukkan suatu keseimbangan yang bergerak.

Dengan menjumlahkan x_c dan x_p , kita dapat menuliskan solusi umum sebagai berikut:

$$x_t = \begin{cases} A(-a)^t + \frac{c}{(1+a)}, & \text{jika } a \neq -1 \\ A(-a)^t + ct = A + ct, & \text{jika } a = -1 \end{cases} \quad (2.19)$$

Karena ada konstanta sembarang A , kedua solusi tersebut tidak sepenuhnya dapat ditentukan. Untuk menghilangkan konstanta sembarang tersebut, kita menyandarkan pada kondisi awal, yakni $x_t = x_0$ ketika $t = 0$. Pada $t = 0$ maka kita mendapatkan $A = x_0 - \frac{c}{(1+a)}$ untuk kasus

$a \neq -1$ dan $A = x_0$ untuk kasus $a = -1$. Jadi, solusi definitif dari problem di atas adalah

$$x_t = \begin{cases} \left(x_0 - \frac{c}{(1+a)}\right)(-a)^t + \frac{c}{(1+a)}, & \text{jika } a \neq -1 \\ x_0 + ct, & \text{jika } a = -1 \end{cases} \quad (2.20)$$

Contoh 3. Carilah solusi bagi $x_t - 3x_{t-1} = 1$ bila $x_0 = 1$. Menggunakan formula Ekspresi (2.20) untuk kasus $a \neq -1$ akan diperoleh:

$$x_t = \left(1 - \frac{1}{1-3}\right)(3)^t + \frac{1}{1-3} = \frac{1}{2}(-1 + 3^{t+1})$$

Mengikuti prosedur yang telah diuraikan, kita dapat mendapatkan x_c dengan mencoba solusi $x_t = Ab^t$ (yang berimplikasi $x_{t+1} = Ab^{t+1}$). Setelah melalui substitusi nilai ini ke dalam versi homogen $x_t - 3x_{t-1} = 0$ dan menghilangkan faktor umum Ab^t , kita mendapatkan $b = 3$. Jadi, $x_c = A(3)^t$. Untuk mendapatkan x_p kita coba solusi $x_t = k$ yang berimplikasi $x_{t+1} = k$. Menyubstitusikan nilai-nilai ini ke dalam persamaan perbedaan lengkap menghasilkan $k = -\frac{1}{2}$. Oleh karena itu, $x_p = -\frac{1}{2}$. Dengan demikian solusi umumnya adalah $x_t = A3^t - \frac{1}{2}$. Memberikan $t = 0$ dan menggunakan kondisi awal $x_0 = 1$ akan diperoleh $A = \frac{3}{2}$.

2.3.3 Dinamika Stabilitas Keseimbangan

Dinamika stabilitas keseimbangan ditentukan oleh Ab^t dalam fungsi komplementer. Interpretasi bagian ini agak sedikit lebih pelik dibandingkan saudara kandungnya Ae^{rt} dalam kasus waktu kontinyu.

2.3.3.1 Peran b

Apakah keseimbangan secara dinamis stabil merupakan suatu pertanyaan apakah fungsi komplementer akan cenderung menuju nol ke-

tika $t \rightarrow \infty$ atau tidak. Pada dasarnya, kita harus menganalisis lintasan dari Ab^t ketika t ditingkatkan secara tidak terbatas. Sudah barang tentu, nilai b adalah sangat penting. Kita fokus pada peran nilai b semata dengan mengabaikan koefisien A , yakni dengan menganggap $A = 1$.

Untuk tujuan analitik, kisaran nilai b yang mungkin, $(-\infty, +\infty)$, dibagi menjadi tujuh segmen yang berbeda, sebagaimana ditampilkan pada dua kolom pertama dari Tabel 2.1. Segmen ini juga ditandai di Gambar 2.5 pada skala b vertikal, dengan titik-titik $+1$, 0 , dan -1 sebagai titik demarkasi. Ketiga titik ini membentuk segmen II, IV, dan VI. Segmen III dan V, di sisi lain, secara berturut-turut berkaitan dengan set pecahan positif dan set pecahan negatif. Dua segmen sisanya, I dan VII, adalah dimana nilai numerik b lebih besar dari 1.

Tabel 2.1: Klasifikasi Nilai b

Segmen	Nilai b		Nilai b^t	Nilai b^t menurut periode waktu				
				$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	$t = 4$
I	$b > 1$	$(b > 1)$	$(2)^t$	1	2	4	8	16
II	$b = 1$	$(b = 1)$	$(1)^t$	1	1	1	1	1
III	$0 < b < 1$	$(b < 1)$	$(\frac{1}{2})^t$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
IV	$b = 0$	$(b = 0)$	$(0)^t$	0	0	0	0	0
V	$-1 < b < 0$	$(b < 1)$	$(-\frac{1}{2})^t$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
VI	$b = -1$	$(b = 1)$	$(-1)^t$	1	-1	1	-1	1
VII	$b < -1$	$(b > 1)$	$(-2)^t$	1	-2	4	-8	16

Di setiap segmen, ekspresi eksponensial b^t membangkitkan tipe lintasan waktu yang berbeda. Di segmen I, b^t harus meningkat dengan t dengan kecepatan yang meningkat. Konfigurasi umum dari lintasan waktu akan menampilkan bentuk grafik paling atas dalam Gambar 2.5. Grafik ditunjukkan sebagai fungsi tangga ketimbang kurva mulus;

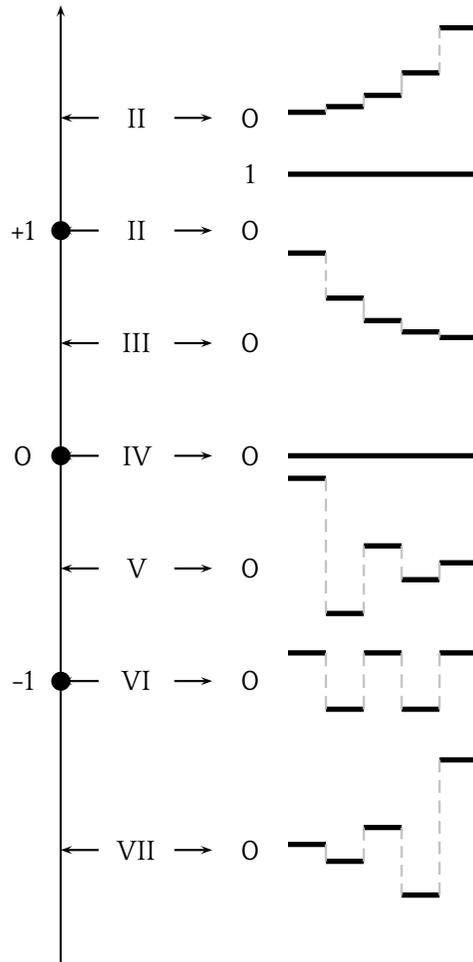
hal ini karena kita berkecimpung dengan analisis periode. Dalam segmen II, b^t akan tetap pada nilai 1 untuk semua nilai t . Bentuk grafiknya dengan demikian adalah garis lurus horisontal. Berikutnya, dalam segmen III, b^t mewakili suatu fraksi positif yang dipangkatkan dengan pangkat bilangan bulat. Ketika pangkatnya ditingkatkan, b^t harus menurun, walau nilainya akan selalu tetap positif. Kasus berikutnya adalah $b^t = 0$ di segmen IV. Kasus ini sangat mirip dengan kasus $b = 1$; tetapi kita mempunyai $b^t = 0$ ketimbang $b^t = 1$, sehingga grafik ini akan berimpit dengan sumbu horisontal. Tetapi, kasus ini tidak menarik, karena kita telah mengadopsi asumsi bahwa $Ab^t \neq 0$, yang berimplikasi $b \neq 0$.

Hal yang mengejutkan adalah bahwa fluktuasi dapat dibangkitkan oleh b^t saja; dalam model kontinyu fluktuasi tidak mungkin timbul hanya dari Ae^{rt} . Tetapi perlu dicatat bahwa karakter dari fluktuasi agak berbeda; tidak seperti pola fungsi sirkuler, fluktuasi yang disajikan pada Gambar 2.5 adalah tidak mulus. Untuk itu, istilah yang umum digunakan adalah osilasi ketimbang fluktuasi. Tetapi banyak penulis yang menggunakan kedua istilah tersebut secara bergantian.

Pada intinya, uraian di atas dapat diringkas menjadi sebuah pernyataan umum bahwa lintasan waktu dari b^t ($b \neq 0$) akan mengikuti pola:

1. Nonoscilatori jika $b > 0$
2. Oscilatori jika $b < 0$
3. Divergen jika $|b| > 1$
4. Convergen jika $|b| < 1$

Sebagai bahan perbandingan dengan kasus persamaan diferensial, ada-



Gambar 2.5: Dinamika Sistem

lah penting untuk dicatat bahwa konvergensi ekspresi e^{rt} dalam persamaan diferensial adalah tergantung pada *tanda* dari r , sementara konvergensi dari ekspresi b^t dalam persamaan perbedaan adalah tergant-

tung pada nilai absolut dari b .

2.3.3.2 Peran A

Pengaruh konstanta multiplikatif A relatif mudah dipahami. Pertama, besaran A dapat membantu untuk membesarkan atau mengecilkan nilai dari b^t . Yakni, nilai A dapat menghasilkan efek skala tanpa mengubah konfigurasi dasar dari lintasan waktu. Kedua, tanda dari A , di pihak lain, berpengaruh nyata pada bentuk dari lintasan karena, jika b^t dikalikan dengan $A = -1$, maka masing-masing lintasan waktu yang ditunjukkan dalam Gambar 2.5 akan diganti dengan bayangan cerminnya sendiri dengan acuan sumbu horisontal.

2.3.4 Konvergensi Menuju Keseimbangan

Uraian di atas menyajikan interpretasi dari terma Ab^t dalam fungsi komplementer, yang merepresentasikan deviasi dari level keseimbangan antar waktu. Jika suatu terma (misalnya) $y_p = 5$ ditambahkan ke terma Ab^t , lintasan waktu harus digeser ke atas secara vertikal dengan nilai konstan 5. Hal ini tidak akan mempengaruhi konvergensi atau divergensi dari lintasan waktu, tetapi terma ini akan mengubah level acuan untuk mengukur konvergensi atau divergensi. Apa yang diperlihatkan oleh Gambar 2.5 adalah konvergensi dari ekspresi Ab^t menuju nol. Bila y_p dimasukkan, ini menjadi pertanyaan konvergensi dari lintasan waktu $y_t = y_c + y_p$ ke level keseimbangan y_p .

Dalam kaitan ini, tampaknya perlu ada penjelasan tambahan bagi kasus khusus $b = 1$ (segmen II). Lintasan waktu seperti

$$y_t = A(1)^t + y_p = A + y_p$$

memberi impresi bahwa fungsi ini konvergen, karena terma multiplikatif $(1)^t = 1$ menghasilkan efek yang tidak eksplosif. Namun, amati bahwa y_t akan mengambil nilai $(A + y_p)$ ketimbang nilai keseimbangan y_p ; dalam kenyataannya, hal ini tidak akan pernah mencapai y_p (kecuali $A = 0$). Sebagai suatu ilustrasi dari situasi tipe ini, kita dapat melihat pada $y_p = ct$. Lintasan waktu ini dipandang divergen, bukan karena kemunculan t dalam integral khusus tetapi karena, dengan $A \neq 0$, akan terdapat deviasi tetap dari keseimbangan yang bergerak. Jadi, dalam memaksakan syarat bagi konvergensi lintasan waktu y_t ke keseimbangan y_p , kita harus menyingkirkan kasus $b = 1$.

Ringkasnya, solusi

$$y_t = Ab^t + y_p$$

adalah lintasan konvergen jika dan hanya jika $|b| < 1$.

2.4 Persamaan Perbedaan Linear Order Kedua

Persamaan perbedaan order-kedua paling sederhana adalah berbentuk sebagai berikut:

$$x_{t+2} + a_1x_{t+1} + a_2x_t = c \quad (2.21)$$

Kita mengenal persamaan dengan bentuk seperti ini mempunyai sifat linear, nonhomogen, dan memiliki koefisien konstan (a_1, a_2) dan terma konstan c . Konstan c dapat dinyatakan sebagai suatu sekuen fungsi dari t , yang disebut juga sebagai suku pemaksa, gaya eksternal, kontrol, atau input dari sistem. Sementara x_t adalah output. Jadi, memecahkan Persamaan (2.21) bermakna menentukan output x_t dengan input tertentu

c. Kita dapat memandang c sebagai suatu pengendali untuk memaksa sistem berperilaku tertentu.

2.4.1 Integral Khusus

Solusi terhadap Persamaan (2.21) dapat diharapkan memiliki dua komponen, yakni integral khusus x_p yang mewakili tingkat keseimbangan antar waktu dari x , dan suatu fungsi komplementer x_c yang menyatakan penyimpangan dari keseimbangan. Integral khusus, didefinisikan sebagai sembarang solusi bagi persamaan lengkap, terkadang dapat diperoleh secara sederhana dengan mencoba solusi yang berbentuk $x_t = k$. Melakukan substitusi $x_t = k$ ke dalam Persamaan (2.21) akan diperoleh:

$$k = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} \quad (2.22)$$

Jadi, selama $(1 + a_1 + a_2) \neq 0$, integral khusus adalah

$$x_p = \frac{c}{1 + a_1 + a_2} \quad (2.23)$$

Contoh 4. Dapatkan integral khusus dari $x_{t+2} + 2x_{t+1} - 4x_t = -2$. Disini kita mempunyai $a_1 = 2$, $a_2 = -4$, dan $c = -2$. Oleh karena itu, integral khusus dari persamaan dimaksud adalah $x_p = \frac{-2}{1+2-4} = 2$.

Dalam kasus $a_1 + a_2 = -1$, maka solusi percobaan $x_t = k$ tidak berlaku, dan kita harus mencoba $x_t = kt$. Melakukan substitusi ekspresi ini ke dalam Persamaan (2.21) dan tetap mengingat bahwa $x_{t+1} = k(t+1)$ dan $x_{t+2} = k(t+2)$, kita memperoleh bahwa

$$k(t+2) + a_1k(t+1) + a_2kt = c \implies k = \frac{c}{(1+a_1+a_2)t + a_1 + 2} = \frac{c}{a_1 + 2}$$

Jadi kita dapat menulis integral khusus sebagai

$$x_p = \frac{c}{a_1 + 2}t \quad [\text{kasus } a_1 + a_2 = -1; a_1 \neq -2] \quad (2.24)$$

Contoh 5. Dapatkan integral khusus dari $x_{t+2} + 2x_{t+1} - 3x_t = -2$. Disini kita mempunyai $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, dan $c = -2$. Solusi dalam bentuk Ekspresi (2.22) jelas tidak dapat digunakan sehingga kita harus mencoba dengan $k = \frac{c}{a_1 + 2} = \frac{-2}{2+2} = -\frac{1}{2}$. Jadi, integral khusus dari persamaan yang dimaksud adalah $x_p = -\frac{1}{2}t$. Bentuk integral khusus seperti ini menunjukkan keseimbangan yang bergerak.

Jika $a_1 + a_2 = -1$ dan $a_1 = -2$, maka kita harus menggunakan solusi percobaan yang berbentuk $x_t = kt^2$ yang berarti pula $x_{t+1} = k(t+1)^2$. Dengan menggunakan Persamaan (2.21) kita akan memperoleh

$$x_p = kt^2 = \frac{c}{2}t^2 \quad (2.25)$$

Contoh 6. Dapatkan integral khusus dari $x_{t+2} - 2x_{t+1} + x_t = -2$. Disini kita mempunyai $a_1 = -2$, $a_2 = 1$, dan $c = -2$. Solusi dalam bentuk Ekspresi (2.22) dan (2.24) jelas tidak dapat digunakan sehingga kita harus mencoba dengan $k = \frac{c}{2}$. Jadi, integral khusus dari persamaan yang dimaksud adalah $x_p = -\frac{2}{2}t^2 = -t^2$.

2.4.2 Fungsi Komplemen

Fungsi komplemen dapat diperoleh dari persamaan tereduksi berikut ini:

$$x_{t+2} + a_1x_{t+1} + a_2x_t = 0 \quad (2.26)$$

Berdasarkan pengalaman, ekspresi dalam bentuk Ab' memainkan peran penting dalam solusi umum bagi Persamaan (2.26). Mari kita coba

suatu solusi dalam bentuk $x_t = Ab^t$ yang berarti juga $x_{t+1} = Ab^{t+1}$, dan seterusnya. Tugas kita sekarang adalah menentukan nilai A dan b .

Setelah melakukan substitusi solusi percobaan ke dalam Persamaan (2.26), kita memperoleh:

$$Ab^{t+2} + a_1Ab^{t+1} + a_2Ab^t = 0 \implies b^2 + a_1b + a_2 = 0 \quad (2.27)$$

dengan solusi sebagai berikut:

$$b_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2} \quad (2.28)$$

yang masing-masing dapat diterima dalam solusi Ab^t . Kenyataannya, kedua b_1 dan b_2 harus muncul dalam solusi umum persamaan perbedaan homogen (2.26) karena, seperti halnya dalam kasus persamaan diferensial, solusi umum ini harus terdiri dari dua bagian yang *bebas linear*, masing-masing dengan konstanta sembarang multiplikatifnya.

Tiga situasi yang mungkin terjadi, yakni (1) akar riil yang berbeda, (2) akar riil yang sama, dan (3) akar kompleks:

2.4.2.1 Akar riil yang berbeda

Kasus ini terjadi ketika $a_1^2 > 4a_2$ sehingga akar kuadrat dari $a_1^2 - 4a_2$ adalah bilangan riil dengan implikasi b_1 dan b_2 adalah riil dan berbeda. Dalam kasus seperti ini, b_1^t dan b_2^t adalah bebas secara linear, dan fungsi komplemen dapat dituliskan sebagai suatu kombinasi linear dari ekspresi tersebut; yaitu

$$x_c = A_1b_1^t + A_2b_2^t \quad (2.29)$$

Jika b_1 dan b_2 adalah akar riil yang berbeda, maka $x_{t1} = b_1^t$ dan $x_{t2} = b_2^t$ adalah dua solusi yang bebas linear bagi problem (2.26). Ji-

ka $|b_1| > |b_2|$, maka kita menyebut x_{t1} sebagai solusi dominan, dan b_1 sebagai akar ciri dominan. Jika sebaliknya, maka y_{t2} adalah solusi dominan dan b_2 sebagai akar ciri dominan. Sekarang kita akan menunjukkan bahwa perilaku membatasi dari solusi umum $x_t = A_1 b_1^t + A_2 b_2^t$ ditentukan oleh perilaku dari solusi dominan. Kita asumsikan bahwa $|b_1| > |b_2|$. Kemudian

$$x_t = b_1^t \left[A_1 + A_2 \left(\frac{b_2}{b_1} \right)^t \right]$$

Karena $\left| \frac{b_2}{b_1} \right| < 1$ maka $\left(\frac{b_2}{b_1} \right)^t \Rightarrow 0$ ketika $t \Rightarrow \infty$

Contoh 7. Dapatkan solusi bagi $x_{t+2} + 2x_{t+1} - 3x_t = -2$. Dari Contoh 5 kita tahu bahwa $x_p = -\frac{1}{2}t$. Dengan menggunakan (2.28) kita mendapatkan $b_1 = 1$ dan $b_2 = -3$. Jadi, $x_c = A_1 + A_2(-3)^t$ dan $x_t = -\frac{1}{2}t + A_1 + A_2(-3)^t$. Untuk mendapatkan A_1 dan A_2 definitif, kita membutuhkan dua kondisi awal sebagai keharusan. Misalnya $x_0 = 4$ dan $x_1 = 5$ maka $4 = A_1 + A_2$ dan $5 = -\frac{1}{2} + A_1 + A_2(-3)$ sehingga akan diperoleh $A_1 = 4\frac{3}{8}$ dan $A_2 = -\frac{3}{8}$. Jadi, solusi definitifnya adalah $x_t = -\frac{1}{2}t + 4\frac{3}{8} - \frac{3}{8}(-3)^t$.

2.4.2.2 Akar riil yang berulang

Bila $a_1^2 = 4a_2$, maka akar kuadrat dari Ekspresi (2.28) hilang dan akar cirinya berulang:

$$b_1 = b_2 = -\frac{a_1}{2} \quad (2.30)$$

Akibatnya, fungsi komplemen dalam bentuk Ekspresi (2.29) akan menjadi:

$$A_1 b_1^t + A_2 b_2^t = (A_1 + A_2) b^t \equiv A_3 b^t \quad (2.31)$$

Tetapi cara ini tidak memberikan hasil karena kita kekurangan satu konstanta. Untuk memenuhi komponen yang hilang -harus bebas li-

near dari A_3b^t - kita menggunakan cara lama dengan menggandakan b^t dengan t . Terma komponen baru ini berbentuk A_4tb^t , yang bebas linear dari A_3b^t , karena kita tidak mungkin memperoleh A_4tb^t dengan cara menggandakan A_3b^t dengan suatu konstanta. Ekspresi A_4tb^t memenuhi sebagai solusi persamaan homogen (2.26). Substitusi A_4tb^t ke dalam Ekspresi (2.26) akan diperoleh

$$A_4(t+2)b^{t+2} + a_1A_4(t+1)b^{t+1} + a_2A_4tb^t = 0 \quad (2.32)$$

Fungsi komplementer untuk kasus akar berulang menjadi

$$x_c = A_3b^t + A_4tb^t \quad (2.33)$$

Contoh 8. Dapatkan solusi bagi persamaan $x_{t+2} + 2x_{t+1} + x_t = 8$. Fungsi komplementernya adalah $x_c = A_3(-1)^t + A_4t(-1)^t$. Fungsi khususnya adalah $x_p = 2$. Dengan demikian solusi yang kita cari adalah $x_t = A_3(-1)^t + A_4t(-1)^t + 2$.

2.4.2.3 Akar kompleks

Dengan kemungkinan $a_1^2 < 4a_2$, akar ciri adalah kompleks konjugat. Secara spesifik, akar-akar tersebut akan berbentuk $b_1, b_2 = h \pm vi$, dimana

$$h = -\frac{a_1}{2} \quad \text{dan} \quad v = \frac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{2} \quad (2.34)$$

Fungsi komplementer menjadi

$$x_c = A_1b_1^t + A_2b_2^t = A_1(h+vi)^t + A_2(h-vi)^t \quad (2.35)$$

Terlihat x_c adalah tidak mudah diinterpretasikan. Tetapi untungnya, fungsi komplementer ini dapat dengan mudah ditransformasikan menjadi terma trigonometri.

Menurut teori, kita dapat menuliskan

$$(h \pm vi)^t = R^t(\cos(\theta)t \pm i \sin(\theta)t)$$

dimana nilai dari R (selalu positif) adalah

$$R = \sqrt{h^2 + v^2} = \sqrt{\frac{a_1^2 + 4a_2 - a_1^2}{4}} = \sqrt{a_2} \quad (2.36)$$

dan θ adalah ukuran radian dari sudut dalam interval $[0, 2\pi)$, yang memenuhi syarat berikut ini:

$$\cos(\theta) = \frac{h}{R} = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_2}} \quad \text{dan} \quad \sin(\theta) = \frac{v}{R} = \sqrt{1 - \frac{a_1^2}{4a_2}} \quad (2.37)$$

Dengan demikian, fungsi komplementer dapat ditransformasi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} x_c &= A_2 R^t (\cos(\theta)t + i \sin(\theta)t) + A_2 R^t (\cos(\theta)t - i \sin(\theta)t) \\ &= R^t [(A_1 + A_2) \cos(\theta)t + (A_1 - A_2)i \sin(\theta)t] \end{aligned} \quad (2.38)$$

$$= R^t (A_5 \cos(\theta)t + A_6 \sin(\theta)t) \quad (2.39)$$

dimana $A_5 = A_1 + A_2$ dan $A_6 = (A_1 - A_2)i$

2.4.3 Konvergensi Lintasan Waktu

Sebagaimana dalam kasus persamaan perbedaan order-pertama, konvergensi lintasan waktu x_t tergantung sepenuhnya apakah x_c cenderung menuju nol ketika $t \rightarrow \infty$. Apa yang telah kita pelajari tentang berbagai konfigurasi ekspresi b^t adalah masih berlaku, walaupun dalam konteks saat ini kita harus mempertimbangkan dua akar ciri ke-timbang hanya satu.

Pertama perhatikan kasus akar riil berbeda: $b_1 \neq b_2$. Jika $|b_1| > 1$ dan $|b_2| > 1$, maka kedua komponen dalam fungsi komplementer (2.26) - $A_1b_1^t$ dan $A_2b_2^t$ - akan eksplisif, dan dengan demikian x_c harus divergen. Dalam kasus sebaliknya, $|b_1| < 1$ dan $|b_2| < 1$, kedua bagian dalam x_c akan konvergen menuju nol bila t ditingkatkan terus, demikian pula x_c akan konvergen. Apa yang terjadi bila $|b_1| > 1$ tetapi $|b_2| < 1$? Dalam kasus ini, bagian $A_2b_2^t$ cenderung melemah, sementara bagian yang lain cenderung menyimpang lebih jauh dari nol. Selanjutnya suku $A_1b_1^t$ pada suatu ketika harus mendominasi pengaruh dan memberikan lintasan yang divergen.

Selanjutnya, akar dengan nilai absolut lebih besar kita sebut dengan *akar dominan*. Akan tampak kemudian bahwa akar dominan b_1 yang sesungguhnya mengatur lintasan waktu, paling tidak terkait dengan konvergensi atau divergensi akhirnya. Kita mungkin menyatakan bahwa suatu lintasan waktu akan konvergen-apapun kondisi awalnya - jika dan hanya jika akar dominan kurang dari 1 dalam nilai absolut. Kita dapat memverifikasi bahwa pernyataan ini sah untuk kasus-kasus dimana kedua akar adalah lebih besar atau kurang dari 1 dalam nilai absolut, dan dimana satu akar mempunyai nilai absolut 1. Namun perlu dicatat bahwa meski konvergensi yang akan terjadi tergantung pada akar dominan semata, akar tidak dominan akan memberi pengaruh pada lintasan waktu, paling tidak di periode awal. Jadi, konfigurasi pasti dari x_t masih tergantung pada kedua akar.

Beralih ke kasus akar berulang, kita mendapatkan fungsi komplementer terdiri dari suku A_3b^t dan A_4tb^t , sebagaimana ditunjukkan dalam (2.33). Bagian pertama sudah biasa, tetapi sedikit penjelasan masih diperlukan untuk bagian kedua, yang mengandung multiplikatif t . Jika

$|b| > 1$, b^t akan eksplosif, dan multiplikatif t akan membantu mengintensifkan keeksplosifan dengan meningkatnya t . Sebaliknya, bila $|b| < 1$, bagian b^t dan bagian t akan bekerja dengan arah yang berlawanan satu terhadap yang lain; yakni nilai t akan melawan ketimbang memperkuat b^t . Kekuatan mana yang lebih besar? Gaya b^t akan selalu menang atas gaya eksplosif dari t . Atas dasar ini, syarat dasar bagi konvergensi dalam kasus akar berulang adalah bahwa akar tersebut kurang dari 1 dalam nilai absolut.

2.5 Persamaan Perbedaan Linear Order Lebih Tinggi

Bentuk normal dari persamaan perbedaan linear homogen berorder- k adalah sebagai berikut:

$$x_{t+k} + a_1x_{t+k-1} + a_2x_{t+k-2} + \cdots + a_kx_t = c_t \quad (2.40)$$

dimana p_i dan c_t adalah fungsi bernilai riil yang didefinisikan untuk $t > t_0$ dan $p_t \neq 0$ untuk $t \geq t_0$. Jika c_t adalah secara identik nol, maka Ekspresi (2.40) disebut sebagai suatu persamaan homogen.

Teorem 1. Jika x_{1t} dan x_{2t} adalah solusi bagi (2.21), maka $x^* = x_{1t} - x_{2t}$ adalah solusi dari persamaan homogen terkait

$$x_{t+k} + a_1x_{t+k-1} + a_2x_{t+k-2} + \cdots + a_kx_t = 0 \quad (2.41)$$

Misalnya perkembangan suatu ekonomi mengikuti suatu persamaan perbedaan atau sistem persamaan perbedaan. Bila kondisi awalnya diketahui, maka solusi unik bagi sistem tersebut dapat diperoleh. Jika

kondisi awal tersebut berubah, maka solusi yang diperolehpun akan ikut berubah. Pertanyaannya adalah apakah gangguan kecil pada kondisi awal memiliki pengaruh pada perilaku solusi jangka panjang atau pengaruh tersebut semakin melemah seiring dengan berjalannya waktu, yakni $t \rightarrow \infty$. Bila pengaruh tersebut semakin melemah dengan berjalannya waktu, maka kita mengatakan bahwa sistem yang bersangkutan adalah stabil. Sebaliknya, bila pengaruh tersebut semakin membesar dengan berjalannya waktu, maka kita menyebut sistem tersebut tidak stabil.

"Only men who are not interested in women are interested in women's clothes; men who like women never notice what they wear."

Anatole France

"The best throw of the dice is to throw them away."

Justin O'Malley

*"Knowing trees, I understand the meaning of patience.
Knowing grass, I can appreciate persistence."*

Hal Borroland

3

Persamaan Diferensial

Persamaan diferensial sangat vital dalam menganalisis sistem yang dinamis. Dahulu bidang fisika yang banyak menggunakan persamaan diferensial. Sekarang, bidang ekonomi juga banyak menggunakan persamaan diferensial. Bab ini akan memperkenalkan persamaan diferensial secara ringkas. Kita akan membatasi diri sampai order-kedua, baik untuk persamaan diferensial yang homogen maupun persamaan diferensial yang tidak homogen. Beberapa contoh akan diberikan untuk memudahkan pemahaman.

3.1 Pengertian

Suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menghubungkan (1) derivatif dari fungsi yang tidak diketahui, (2) fungsi itu sendiri, (3) variable sebagai penentu fungsi, dan (4) konstanta. Ringkasnya, suatu persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang menghubungkan suatu fungsi yang tidak diketahui dengan derivatifnya. Bentuk umum persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (3.1)$$

Persamaan diferensial merupakan kendaraan penting untuk mempelajari dinamika suatu sistem. Kita membatasi diri pada sistem dinamis dengan satu variabel saja. Dengan fokus pada sistem dinamis, kita dapat membatasi persamaan diferensial sebagai hubungan antara fungsi waktu dan turunannya. Satu bentuk tipikal dari persamaan diferensial adalah

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = F(t, x) \quad (3.2)$$

Beberapa contoh persamaan diferensial adalah sebagai berikut:

$$\dot{x} = ax \quad (3.3)$$

$$\dot{x} + x = 2 - e^{2t} \quad (3.4)$$

$$\ddot{x} + 2t\dot{x} = -2t^2x \quad (3.5)$$

$$\dot{y} + \dot{x} = by \quad (3.6)$$

Dari empat contoh di atas, tiga contoh pertama menunjukkan persamaan dengan hanya satu variabel disamping waktu, yakni x . Sedangkan Persamaan (3.6) merupakan contoh persamaan diferensial dengan

dua variabel selain waktu. Contoh beberapa persamaan tersebut lazim disebut sebagai persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*). Bila fungsi mengandung beberapa variabel, seperti y dan x sebagaimana terlihat pada Persamaan (3.6), maka fungsi tersebut dinamakan persamaan diferensial partial (*partial differential equations*). Persamaan diferensial biasa diklasifikasikan sesuai dengan ordernya. Order suatu persamaan diferensial merupakan order dari derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan.

Tipe persamaan diferensial yang paling sederhana untuk dipecahkan adalah persamaan yang variabelnya dapat dipilah. Suatu persamaan diferensial order pertama $\frac{dx}{dt} = F(t, x)$ disebut dapat dipilah jika fungsi tersebut dapat ditulis dalam bentuk $\frac{dx}{dt} = f(t)g(x)$, dimana f adalah suatu fungsi dari variabel independen hanya t dan g adalah suatu fungsi variabel dependen hanya x . Sebagai contoh, fungsi $\frac{dx}{dt} = e^t x^a$ adalah dapat dipilah.

Persamaan diferensial diklasifikasikan menurut ordernya. Order suatu persamaan diferensial adalah order dari derivatif tertinggi yang muncul dalam persamaan yang bersangkutan. Persamaan (3.3) dan (3.4) adalah contoh persamaan diferensial order pertama, sedangkan Persamaan (3.5) adalah contoh persamaan diferensial order kedua.

Kita akan membatasi diri pada persamaan diferensial linear yang memiliki bentuk umum sebagai berikut:

$$a_0(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_n(t)x = g(t) \quad (3.7)$$

Jika $a_0(t), \cdots, a_n(t)$ adalah konstan sepenuhnya, dan oleh karenanya bebas dari t , maka Persamaan (3.7) merupakan persamaan diferensial ber-order n dengan koefisien konstan. Setiap persamaan diferensial yang

tidak sesuai dengan Persamaan (3.7) disebut sebagai persamaan diferensial non-linear. Persamaan (3.7) disebut homogenus jika $g(t) = 0$ dan nonhomogenus jika $g(t) \neq 0$. Ada satu kategori lagi yang perlu dikenali, yakni persamaan diferensial otonom atau persamaan diferensial yang tidak berubah dengan waktu (*time-invariant differential equations*). Persamaan (3.2) adalah otonom jika $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$ dan tidak otonom jika $\frac{\partial F}{\partial t} \neq 0$.

3.2 Persamaan Linear Order Pertama

Bentuk umum persamaan diferensial order pertama linear adalah

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = g(t) \quad (3.8)$$

Perhatikan bahwa dalam formulasi ini p dan g merupakan fungsi waktu t . Juga dimungkinkan bahwa $p(t)$ dan $g(t)$ adalah konstan sehingga bentuknya menjadi

$$\frac{dx}{dt} + bx = a \quad (3.9)$$

Persamaan order pertama linear dapat dipecahkan dengan menempuh prosedur empat langkah sebagai berikut:

1. Menuliskan persamaan order pertama linear dalam bentuk baku:

$$\frac{dx}{dt} + p(t)x = g(t) \quad (3.10)$$

2. Menghitung faktor pengintegrasi

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} \quad (3.11)$$

3. Menggandakan secara menyeluruh dengan faktor pengintegrasi, mengintegrasikan kedua ruas dan menambahkan konstanta integrasi ke ruas sebelah kanan:

(a) Menggandakan

$$\mu(t) \left(\frac{dx}{dt} + p(t)x \right) = \mu(t)g(t) \quad (3.12)$$

atau

$$\frac{d}{dt}(\mu(t)x) = \mu(t)g(t) \quad (3.13)$$

(b) Mengintegrasikan

$$\int \frac{d}{dt}(\mu(t)x) dt = \int \mu(t)g(t) dt + c \quad (3.14)$$

4. Menuliskan hasil umumnya:

$$\mu(t)x = \int \mu(t)g(t) dt + c \quad (3.15)$$

Contoh 9. Dapatkan solusi bagi $\dot{x} = x + 2$

1. Formulasi baku:

$$\dot{x} - x = 2$$

2. Faktor pengintegrasi

$$\mu(t) = e^{\int -1 dt} = e^{-t+k_1}$$

3. Penggandaan dan pengintegrasian

(a) Penggandaan

$$e^{-t+k_1} (\dot{x} - x) = e^{-t+k_1} 2 \implies e^{-t} (\dot{x} - x) = e^{-t} 2 \implies \frac{d}{dt} (e^{-t} x) = 2e^{-t}$$

(b) Pengintegrasian

$$\int \frac{d}{dt}(e^{-t}x) dt = \int 2e^{-t} dt \implies e^{-t}x = -2e^{-t} + k_2$$

4. Hasil umum

$$x = -2 + k_2e^t$$

Dengan menggunakan empat langkah tersebut, maka kita dapat dengan mudah mendapatkan solusi persamaan diferensial order satu. Solusi untuk persamaan:

$$a\dot{x} + bx = c \quad (3.16)$$

adalah

$$x = \frac{c}{b} + ke^{-\frac{b}{a}t} \quad (3.17)$$

dimana k adalah konstanta yang tergantung pada kondisi pembatas atau problemnya.

Contoh 10. Dapatkan solusi untuk $3\dot{x} - 3x = 6$. Dengan menggunakan Persamaan (3.17) akan diperoleh

$$x = \frac{6}{-3} + ke^{-\frac{-3}{3}t} = -2 + ke^t$$

Hasil yang diperoleh identik dengan hasil dari contoh sebelumnya. Hal ini seharusnya tidak mengagetkan karena problem yang dihadapi pada dasarnya identik, yakni kedua ruas dari problem sebelumnya digandakan dengan 3.

Bila diperhatikan, solusi terhadap persamaan diferensial nonhomogen order pertama terdiri dari jumlah dua terma, yakni fungsi komplementer (dicatat dengan x_c) dan integral khusus (dicatat dengan x_p).

Sebagaimana akan ditunjukkan, masing-masing komponen tersebut memiliki nilai interpretasi yang signifikan.

Meskipun tujuan kita adalah untuk memecahkan persamaan non-homogen, seringkali kita harus mengacu kepada versi homogenya. Demi kemudahan, kita sebut versi homogen tersebut dengan persamaan tereduksi dari persamaan nonhomogen. Sementara persamaan nonhomogenya disebut sebagai persamaan lengkap. Ternyata fungsi komplementer x_c tidak lebih dari solusi umum dari persamaan tereduksi, sementara integral khusus x_p adalah sembarang solusi khusus dari persamaan lengkap.

Misalnya kita menghadapi persamaan $a\dot{x} + bx = c$ yang ekuivalen bila ditulis dalam bentuk $\dot{x} + \frac{b}{a}x = \frac{c}{a}$. Persamaan tereduksinya adalah $\dot{x} + \frac{b}{a}x = 0$. Belajar dari persamaan homogen, solusi dari persamaan tereduksi ini adalah

$$x_c = ke^{-\frac{b}{a}t}$$

Bagaimana dengan integral khusus? Mengingat integral khusus adalah sembarang solusi khusus dari persamaan lengkap, kita dapat mencoba tipe solusi yang paling sederhana, katakanlah, x adalah konstan. Jika x konstan, maka hal ini berakibat $\dot{x} = 0$ dan persamaan $a\dot{x} + bx = c$ akan menjadi $bx = c$, sehingga $x = \frac{c}{b}$. Dengan demikian, solusi konstan akan dapat digunakan sepanjang $b \neq 0$. Dalam kasus seperti ini kita mendapatkan

$$x_p = \frac{c}{b}, \quad (b \neq 0)$$

Jumlah dari fungsi komplementer dan integral khusus membentuk solusi umum dari persamaan lengkap $a\dot{x} + bx = c$:

$$x(t) = x_c + x_p = ke^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b} \quad (3.18)$$

Apa yang membuat persamaan ini solusi umum adalah kehadiran sembarang konstan k . Kita dapat menetapkan konstanta ini dengan menggunakan kondisi asal. Misalnya x bernilai x_0 bila $t = 0$. Maka dengan memasukkan $t = 0$ ke dalam Persamaan (3.18) akan diperoleh

$$x(0) = x_0 = k + \frac{c}{b} \quad \text{dan} \quad k = x_0 - \frac{c}{b}$$

Jadi, solusi yang dicari adalah

$$x_t = \left[x_0 - \frac{c}{b} \right] e^{-\frac{b}{a}t} + \frac{c}{b} \quad (3.19)$$

Perlu diingat bahwa penggunaan kondisi awal untuk menetapkan konstanta sembarang adalah - dan harus - dilakukan sebagai langkah terakhir, setelah kita mendapatkan solusi umum bagi persamaan lengkap. Karena nilai dari x_c dan x_p adalah terkait dengan nilai $x(0) = x_0$, kedua komponen tersebut harus dipertimbangkan dalam menetapkan konstanta k .

Contoh 11. Carilah solusi bagi persamaan $\dot{x} + 2x = 6$ yang bernilai awal $x(0) = 10$. Fungsi komplementernya adalah $x_c = ke^{-2t}$ dan integral khususnya adalah $x_p = \frac{6}{2} = 3$. Menggunakan kondisi awal diperoleh $10 = k + 3$, sehingga $k = 7$. Jadi solusi yang dicari adalah $x(t) = 7e^{-2t} + 3$.

Contoh 12 (Hukum Pendinginan Newton). Satu gelas kopi, yang pada awalnya bersuhu 100°C , ditempatkan di suatu ruang yang dipertahankan pada suhu konstan 25°C . Setelah 1 menit, kopi tersebut mendingin menjadi 95°C . Jika kita ingin tahu suhu kopi 15 menit kemudian, kita dapat menggunakan Hukum Pendinginan Newton, yang menyatakan bahwa laju perubahan suhu suatu obyek adalah proporsional dengan

perbedaan antara suhunya sendiri dan suhu ambien (yakni suhu di sekitarnya). Secara matematika, hal ini berarti

$$\dot{s} = k(R - s(t)) \quad (3.20)$$

dimana $s(t)$ adalah suhu kopi setelah t menit, R adalah suhu ruangan, dan k adalah konstanta proporsioanlitas.

Kita dapat menyusun ulang persamaan pendinginan menjadi sebagai berikut:

$$\dot{s} + ks(t) = kR \quad (3.21)$$

Dari teknik yang sudah kita pelajari, solusi dari persamaan ini adalah

$$s(t) = r + ce^{-kt} \quad (3.22)$$

dimana c adalah konstanta. Menggunakan informasi yang diberikan tentang suhu kopi awal ($t = 0$) 100°C kita mendapatkan

$$100 = 25 + c \implies c = 75 \quad (3.23)$$

Selanjutnya, dengan menggunakan informasi $s(1) = 95^\circ\text{C}$ diperoleh

$$95 = 25 + 75e^{-k} \implies k = \ln\left(\frac{75}{70}\right) = 0.069 \quad (3.24)$$

Dengan demikian, suhu kopi setelah 15 menit adalah

$$s(15) = 25 + 75e^{-0.069 \times 15} \quad (3.25)$$

yang menghasilkan $s(15) \approx 52^\circ\text{C}$. Selanjutnya, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0.069t} = 0$, sehingga dengan berjalannya waktu, suhu kopi akan semakin mendekati suhu ruangan.

3.3 Persamaan Linear Order Kedua

3.3.1 Homogen

Suatu persamaan diferensial homogen linear order-kedua dengan koefisien konstan mempunyai bentuk umum sebagai berikut:

$$a \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = 0 \quad \text{atau} \quad a\ddot{x} + b\dot{x} + cx = 0 \quad (3.26)$$

Bila kita dapat memperoleh dua solusi x_1 dan x_2 yang bebas linear maka solusi umum akan berbentuk

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 \quad (3.27)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstan. Misalnya $x = e^{rt}$. Melalui substitusi kita memperoleh

$$ar^2 e^{rt} + bre^{rt} + ce^{rt} = 0 \quad (3.28)$$

Oleh karena itu, $x = e^{rt}$ merupakan suatu solusi jika dan hanya jika

$$ar^2 + br + c = 0 \quad (3.29)$$

yang diacu sebagai persamaan *auxiliary* atau persamaan ciri (*characteristic equation*) dari persamaan homogen. Suatu persamaan kuadrat memiliki solusi

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.30)$$

yang lazim disebut sebagai akar atau nilai ciri atau dalam Bahasa Jerman disebut dengan *eigenvalues*. Jika $b^2 > 4ac$ maka akar r_1 dan r_2 adalah riil dan berbeda; jika $b^2 = 4ac$ maka akarnya riil dan sama; sementara bila $b^2 < 4ac$ maka akarnya adalah konjugat kompleks.

Sekedar mengingatkan pelajaran di Sekolah Menengah Tingkat Pertama (SMPT) dahulu dari mana Formula (3.30) di atas diperoleh. Mengalikan kedua ruas dari Persamaan (3.29) dengan $\frac{1}{a}$ dan melakukan penyusunan ulang akan diperoleh

$$r^2 + \frac{b}{a}r = -\frac{c}{a}$$

Ruas sebelah kiri dari persamaan ini dapat ditulis sebagai $(r + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2}$.
Jadi

$$\begin{aligned} \left(r + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} &\implies \left(r + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \implies \\ \left(r + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \end{aligned} \quad (3.31)$$

Menarik akar kuadrat dari ekspresi ini akan diperoleh

$$r + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.32)$$

Sampailah kita pada Formula (3.30) di atas.

3.3.1.1 Akar Riil dan Beda

Jika persamaan auxiliary memiliki akar riil yang berbeda, maka $e^{r_1 t}$ dan $e^{r_2 t}$ merupakan solusi yang secara linear independen bagi persamaan homogen linear order-kedua. Solusi umumnya adalah sebagai berikut:

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3.33)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta.

Bila $x(0)$ dan $\dot{x}(0)$ adalah kondisi awal pada $t = 0$, maka kita dapat menentukan c_1 dan c_2 sebagai berikut:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 \\ \dot{x}(0) &= c_1 r_1 + c_2 r_2 \end{aligned} \right\} c_1 = \frac{\dot{x}(0) - r_2 x(0)}{r_1 - r_2} \text{ dan} \\ c_2 = \frac{x'(0) - r_1 x(0)}{r_2 - r_1} \quad (3.34)$$

Dengan demikian solusi bagi $x(t)$ adalah

$$x(t) = \left(\frac{\dot{x}(0) - r_2 x(0)}{r_1 - r_2} \right) e^{r_1 t} + \left(\frac{\dot{x}(0) - r_1 x(0)}{r_2 - r_1} \right) e^{r_2 t} \quad (3.35)$$

Contoh 13. Dapatkan suatu solusi bagi $\ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) = 0$ bila $x(0) = -2$ dan $\dot{x}(0) = 1$. Dengan cepat kita dapat menuliskan solusi umumnya sebagai $x(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{2t}$. Dengan menggunakan Ekspresi (3.34) akan segera diperoleh $c_1 = 5$ dan $c_2 = -7$. Dengan demikian, solusi khusus bagi problem ini adalah $x(t) = 5e^{3t} - 7e^{2t}$.

Contoh 14. Tunjukkan bahwa $x(t) = -\pi e^{3t} + \frac{2}{3} e^{2t}$ merupakan suatu solusi bagi $\ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) = 0$. Problem ini dapat diselesaikan secara langsung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) &= \overbrace{-9\pi e^{3t} + \frac{8}{3} e^{2t}}^{\ddot{x}} - 5 \overbrace{(-3\pi e^{3t} + \frac{4}{3} e^{2t})}^{\dot{x}} + 6 \overbrace{(-\pi e^{3t} + \frac{2}{3} e^{2t})}^x \\ &= -9\pi e^{3t} + \frac{8}{3} e^{2t} + 15\pi e^{3t} - \frac{20}{3} e^{2t} - 6\pi e^{3t} + \frac{12}{3} e^{2t} = 0 \end{aligned}$$

Jadi, benar bahwa $x(t) = -\pi e^{3t} + \frac{2}{3} e^{2t}$ merupakan suatu solusi bagi $\ddot{x}(t) - 5\dot{x}(t) + 6x(t) = 0$.

3.3.1.2 Akar Riil dan Sama

Hal ini terjadi jika $b^2 = 4ac$. Jika r adalah akar riil berulang bagi persamaan diferensial berikut:

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + c = 0$$

maka solusi umumnya adalah

$$x(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta. Jika $x(0)$ dan $\dot{x}(0)$ adalah dua kondisi awal, maka

$$\left. \begin{array}{l} x(0) = c_1 \\ \dot{x}(0) = rc_1 + c_2 \end{array} \right\} c_1 = x(0) \quad \text{dan} \quad c_2 = \dot{x}(0) - rx(0) \quad (3.36)$$

Dengan demikian solusi khususnya adalah

$$x(t) = x(0)e^{rt} + [\dot{x}(0) - rx(0)] te^{rt}$$

Contoh 15. Dapatkan solusi bagi $\ddot{x}(t) + 2\dot{x} + x(t) = 0$ Persamaan *auxiliary* dari problem tersebut adalah $x^2 + 2x + 1 = 0$, yang ekuivalen dengan $(x + 1)^2 = 0$. Oleh karena itu, $r = -1$ dan solusi umumnya adalah $x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Selanjutnya, jika $x(0)$ dan $\dot{x}(0)$ diketahui, maka c_1 dan c_2 dapat diketahui sehingga solusi khusus dari problem di atas dapat ditemukan.

3.3.1.3 Akar Konjugat Kompleks

Hal ini terjadi jika $b^2 < 4ac$. Bila persamaan *auxiliary* memiliki akar konjugat kompleks r_1 dan r_2 dimana $r_1 = \alpha + i\beta$ dan $r_2 = \alpha - i\beta$ maka

$e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ dan $e^{\beta t} \sin(\beta t)$ adalah solusi yang secara linear independen bagi persamaan homogen order-kedua. Solusi umumnya adalah

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (3.37)$$

dimana c_1 dan c_2 adalah konstanta. Selanjutnya, jika $x(0)$ dan $\dot{x}(0)$ diketahui, maka c_1 dan c_2 dapat diketahui:

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \\ \dot{x}(t) &= (\alpha c_1 + \beta c_2) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + (\alpha c_2 - \beta c_1) e^{\alpha t} \sin(\beta t) \\ \dot{x}(0) &= (\alpha c_1 + \beta c_2) e^0 \cos(0) + (\alpha c_2 - \beta c_1) e^0 \sin(0) \\ \dot{x}(0) &= \alpha c_1 + \beta c_2 \end{aligned} \right\} c_1 = x(0) \text{ dan}$$

$$c_2 = \frac{\dot{x}(0) - \alpha x(0)}{\beta} \quad (3.38)$$

Oleh karena itu, solusi khususnya adalah

$$x(t) = x(0) e^{\alpha t} \cos(\beta t) + \left[\frac{\dot{x}(0) - \alpha x(0)}{\beta} \right] e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (3.39)$$

3.3.2 Tidak Homogen

Persamaan nonhomogen linear order-kedua dengan koefisien konstan memiliki bentuk sebagai berikut:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = g(t) \quad (3.40)$$

Bila $L(x) = a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t)$ maka Persamaan (3.40) dapat dinyatakan sebagai $L(x) = g(t)$. Solusi terhadap persamaan ini dapat dibayangkan dalam dua bagian. Pertama, ada komponen homogen, $L(x) = 0$. Sebagaimana telah ditunjukkan di bagian terdahulu, jika akar-akarnya adalah riil dan berbeda maka

$$x_c = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3.41)$$

Alasan bagi penyebutan x_c akan terlihat semakin jelas seiring dengan berjalannya diskusi. Kedua, adalah mungkin mendapatkan solusi khusus, dicatat dengan x_p , yang memenuhi $L(x_p) = g(t)$. Jika x_c diacu sebagai solusi komplementer yang memenuhi $L(x) = 0$, maka x_p adalah solusi khusus yang memenuhi $L(x_p) = g(t)$. Bila x_c dan x_p adalah solusi, maka jumlahnya juga merupakan solusi, $x = x_c + x_p$, yang disebut sebagai solusi umum bagi persamaan diferensial nonhomogen linear. Oleh karena itu, solusi umum bagi Persamaan (3.40) jika akar-akarnya adalah riil dan berbeda mempunyai bentuk

$$x(t) = x_c + x_p = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + x_p \quad (3.42)$$

Solusi umum $x(t) = x_c + x_p$ berlaku bahkan bila akar-akarnya adalah tidak riil atau berbeda. Intinya adalah bahwa solusi komplementer muncul dari solusi terhadap $L(x) = 0$. Sebagaimana dalam seksi sebelumnya ada tiga kemungkinan kasus

1. Akar riil dan berbeda

$$x_c = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (3.43)$$

2. Akar riil dan sama

$$x_c = c_1 e^{r_1 t} + c_2 t e^{r_1 t} \quad (3.44)$$

3. Akar konjugat kompleks

$$x_c = c_1 e^{\alpha t} \cos(\beta t) + c_2 e^{\alpha t} \sin(\beta t) \quad (3.45)$$

Ada empat tahap dalam menemukan suatu solusi bagi persamaan nonhomogen linear, yakni:

1. Mendapatkan solusi komplementer x_c .
2. Mendapatkan solusi umum x_h dengan memecahkan persamaan berorder lebih tinggi $L_h(x_h) = 0$, dimana x_h ditentukan dari $L(x)$ dan $g(t)$.
3. Mendapatkan $x_q = x_h - x_c$.
4. Menentukan konstanta yang tidak diketahui, koefisien yang belum ditentukan, dalam solusi x_q dengan mensyaratkan $L(x_q) = g(t)$ dan menyubstitusikannya ke dalam x_q , yang memberikan solusi khusus x_p .

3.4 Diagram Fase

Diagram fase membantu memahami sifat dinamis dari persamaan diferensial. Misalnya, x adalah variabel kontinu sebagai fungsi dari waktu t . Misalnya $\dot{x}(t)$ adalah otonom, sehingga $\dot{x}(t)$ hanya fungsi dari x dan bebas dari waktu t . Maka pada sembarang titik waktu kita memiliki suatu nilai bagi $\dot{x}(t)$. Dengan beragamnya t maka kita mendapatkan lintasan solusi yang disebut *trajectory*, lintasan, atau *orbit*. Sumbu- x yang mengandung trajectory disebut dengan garis fase (*phase line*).

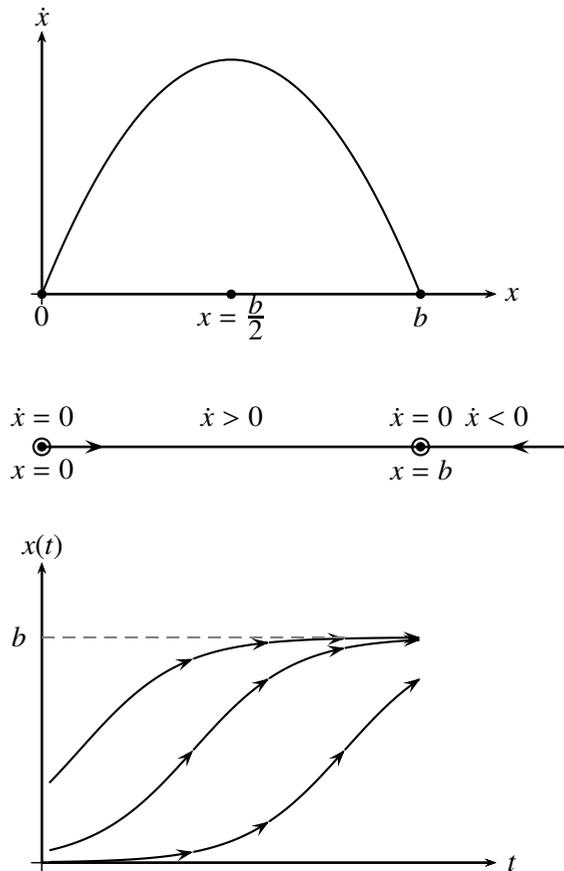
Jika $\dot{x}(t) = 0$ maka sistem sedang berhenti. Ini harus terjadi pada titik waktu tertentu, misalnya t_0 . Nilai solusinya akan menjadi $x(t_0) = x^*$. Titik x^* akan disebut dengan berbagai nama seperti titik henti, titik tetap, titik kritis, titik keseimbangan atau solusi *steady-state*.

Sebagai contoh persamaan pertumbuhan logistik $\dot{x}(t) = ax(b - x)$ berikut ini. Gambar 3.1a memperlihatkan persamaan diferensial, Gam-

bar 3.1b menunjukkan garis fase, dan Gambar 3.1c menunjukkan lintasan $x(t)$ menurut waktu. Titik stasioner pada garis fase ditandai dengan lingkaran kecil. Tanda arah panah pada garis fase menunjukkan arah perubahan dari $x(t)$ ketika t meningkat. Secara umum, $x^* = 0$ adalah kurang menarik, dan bagi setiap nilai awal dari x yang tidak sama dengan nol, sistem akan bergerak ke arah $x^* = b$. Ini menunjukkan bahwa $x^* = b$ merupakan penarik.

Jika sembarang trajectory yang bermula dekat dengan titik tetap terus bertahan dekat dengan titik tetap tersebut selamanya, maka titik tetap tersebut disebut mantap. Suatu titik tetap adalah mantap secara asimtotik jika titik tetap tersebut adalah mantap sebagaimana baru saja didefinisikan, dan juga jika sembarang trajectory yang mulai dekat dengan titik tetap mendekati titik tetap ketika $t \rightarrow \infty$. Dengan memperhatikan contoh persamaan diferensial logistik sebagaimana ditampilkan pada Gambar 3.1a, jelas bahwa titik $x = b$ merupakan titik yang secara asimtotik mantap.

Ada beberapa karakteristik lain yang diberikan oleh Gambar 3.1. Titik awal, $x^* = 0$, merupakan suatu penolak sementara titik $x^* = b$ merupakan penarik. Di sekitar titik awal, persamaan diferensial mempunyai kemiringan positif; sementara di sekitar titik penarik, persamaan diferensial memiliki kemiringan negatif. Inilah gambaran tipikal dari kemantapan atau ketidakmantapan. Suatu titik tetap adalah tidak mantap jika kemiringan dari persamaan diferensial di sekitar titik yang bersangkutan adalah positif; titik tersebut mantap jika kemiringan persamaan diferensial di sekitar titik ini adalah negatif. Jika terdapat hanya satu titik tetap di dalam suatu sistem dinamis, maka titik tetap seperti itu boleh jadi mantap secara global atau tidak mantap secara global.



Gambar 3.1: Contoh diagram fungsi pertumbuhan logistik

Dalam kasus sistem yang mantap secara global, untuk sembarang nilai awal yang tidak sama dengan titik tetap, maka sistem tersebut akan konvergen pada titik tetap. Bagi sistem yang tidak mantap secara global, bagi sembarang nilai awal yang tidak sama dengan nilai tetap, maka

sistem akan bergerak menjauh dari titik tetap.

3.5 Transformasi Laplace

Transform integral berbentuk

$$\mathcal{T}[f(x)] = \int_I K(x, k)f(x) dx$$

dimana I adalah interval pada garis riil, $K(x, k)$ adalah kernel dari transform dan k adalah variabel transform, merupakan alat yang berguna untuk memecahkan persamaan diferensial linear. Dalam seksi ini kita akan mempelajari transform Laplace, dimana notasi umum untuk variabel awal adalah t dan untuk variabel transform adalah s , kernel adalah e^{-st} , dan $I = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$. Mencari solusi persamaan diferensial berorder 3 atau lebih adalah lebih sulit. Tetapi memang tidak perlu mencari solusi problem berorder lebih tinggi secara manual karena sudah tersedia berbagai perangkat lunak yang dapat digunakan untuk mencari solusi yang dimaksud. Namun, sebagai pengetahuan maka ada baiknya kita mengenal suatu metoda yang banyak digunakan dalam mencari solusi persamaan diferensial berorder tinggi, yakni transformasi Laplace. Ide dasar transformasi Laplace adalah bahwa menangani persamaan polinomial adalah lebih mudah daripada menangani persamaan diferensial. Transform Laplace memungkinkan persamaan diferensial yang rumit direduksi menjadi ekspresi aljabar yang sederhana. Kemudian, transform kebalikan dari solusi aljabar menjadi solusi dari persamaan diferensial. Jadi, tahap mendapatkan solusi dari persamaan diferensial berorder tinggi dengan transformasi Laplace adalah sebagai berikut:

1. Mentransformasi persamaan diferensial menjadi persamaan aljabar, yang disebut transform,
2. Mencari solusi persamaan aljabar yang diperoleh,
3. Membalikkan solusi yang diperoleh untuk mendapatkan persamaan state.

Hubungan antara suatu transform Laplace dan kebalikannya adalah mirip dengan hubungan antara suatu logaritma dan antilogaritmanya atau antara derivatif dan antiderivatifnya. Transform Laplace merupakan teknik pilihan untuk memecahkan persamaan diferensial linear dengan koefisien konstan.

Transformasi Laplace dari $f(t)$ adalah

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (3.46)$$

Kita akan melihat lebih detail untuk nilai s seperti apa integral yang bersangkutan konvergen.

Perhatikan $f(t) = e^{kt}$, dimana k adalah suatu konstan. Mensubstitusikan ekspresi ini ke dalam (3.46) akan diperoleh

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{kt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-k)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)} \right|_0^{\infty}$$

Perhatikan, agar $e^{-(s-k)t} \rightarrow 0$ ketika $t \rightarrow \infty$, dan oleh karenanya integral yang bersangkutan konvergen, kita membutuhkan $s > k$. Jika s adalah suatu variabel bernilai kompleks, yang diperlukan dalam memperkirakan s ketika kita menggunakan formula inversi, kita membutuhkan

$Re(s) > Re(k)$.¹ Hal ini menunjukkan bahwa

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \frac{1}{s-k} \quad \text{untuk} \quad Re(s) > Re(k)$$

Untuk menggunakan transform Laplace, kita perlu mengetahui bagaimana membalikkannya, sehingga kita dapat menentukan $f(t)$ dari fungsi tertentu $F(s)$. Inversi transform Laplace melibatkan suatu integral dalam bidang- s kompleks. Untuk sementara, kita akan menangani problem pembalikan transform Laplace dengan mencoba mengenali fungsi $f(t)$ dari bentuk $F(s)$. Sebagaimana akan kita saksikan, terdapat banyak teknik yang tersedia untuk membalik transform Laplace dalam cara yang sederhana.

3.5.1 Eksistensi Transform Laplace

Sejauh ini, kita agak mengabaikan pertanyaan tentang kapan transform Laplace dari suatu fungsi tertentu sesungguhnya ada. Telah disebutkan sepintas bahwa bagian riil dari s harus lebih besar dari nilai konstan dalam beberapa kasus. Kenyataannya definisi dari transform Laplace adalah integral improper² dan harus ditulis sebagai

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{-st} f(t) dt \quad (3.47)$$

Kita akan memperbaikinya dengan mendefinisikan suatu kelas fungsi dimana transform Laplace benar-benar ada. Kita mengatakan bahwa suatu fungsi $f(t)$ adalah suatu order eksponensial pada $0 \leq t < \infty$ jika ada konstan A dan b sehingga $|f(t)| < Ae^{bt}$ untuk $t \in [0, \infty)$.

¹ $s = \sigma + i\omega$, dimana σ dan ω adalah variabel riil dan $i = \sqrt{-1}$. $Re(s)$ menunjukkan bagian riil dari s , yakni σ .

²Suatu integral yang mengandung batas takberhingga

Teorem 2 (Lerch's teorem). *Suatu fungsi kontinyu piecewise order eksponensial pada $[0, \infty)$ memiliki suatu transform Laplace.*

Teorem 3. *Jika f adalah order eksponensial pada $[0, \infty)$, maka $\mathcal{L}[f] \rightarrow 0$ ketika $|s| \rightarrow \infty$.*

Bukti. Perhatikan definisi $\mathcal{L}[f(t)]$ dan modulusnya

$$|\mathcal{L}[f(t)]| = \left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt = \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt$$

yang menggunakan ketidaksamaan segitiga. Jika f adalah order eksponensial,

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)]| &< \int_0^{\infty} e^{-st} A e^{bt} dt = \int_0^{\infty} A e^{(b-s)t} dt = \frac{A}{b-s} e^{(b-s)t} \Big|_0^{\infty} \\ &= \lim_{Y \rightarrow \infty} \left[\frac{A}{b-s} e^{(b-s)Y} - \frac{A}{b-s} \right] \end{aligned}$$

Bila $s > b$, dengan demikian kita mempunyai

$$|\mathcal{L}[f(t)]| < \frac{A}{s-b}$$

dan oleh karena itu $|\mathcal{L}[f(t)]| \rightarrow 0$ ketika $|s| \rightarrow \infty$ □

Sebaliknya, jika $\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) \neq 0$, maka $F(s)$ bukan transform Laplace dari suatu fungsi order eksponensial. Sebagai contoh, $\frac{s^2}{(s^2+1)} \rightarrow 1$ ketika $s \rightarrow \infty$, dan oleh karenanya bukan transform Laplace dari suatu fungsi order eksponensial.

Sebaliknya, jika f bukan order eksponensial dan tumbuh sangat cepat ketika $t \rightarrow \infty$, integral yang bersangkutan tidak akan convergen. Sebagai contoh, perhatikan transform Laplace dari fungsi e^{t^2} ,

$$\mathcal{L}[e^{t^2}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N e^{t^2} e^{-st} dt \quad (3.48)$$

Adalah jelas bahwa e^{t^2} tumbuh lebih cepat dari e^{st} untuk semua nilai s , sehingga integral yang bersangkutan divergen, dan oleh karenanya transform Laplace dari e^{t^2} tidak ada.

3.5.2 Sifat Transform Laplace

Teorem 4 (Linearitas). *Transform Laplace dan kebalikan transform Laplace adalah operator linear.*

Bukti. Sesuai definisi,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^{\infty} e^{-st} (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt + \beta \int_0^{\infty} e^{-st} g(t) dt \\ &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]\end{aligned}$$

sehingga transform Laplace adalah suatu operator linear. Mengambil kebalikan transform Laplace kedua ruas memberikan

$$\alpha f(t) + \beta g(t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]]$$

Karena kita dapat menulis $f(t)$ sebagai $\mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]]$ dan demikian pula untuk $g(t)$, hal ini memberikan

$$\alpha \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[f(t)]] + \beta \mathcal{L}^{-1}[\mathcal{L}[g(t)]] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]]$$

Jika kita mendefinisikan $F(s) = \mathcal{L}[f]$ dan $G(s) = \mathcal{L}[g]$, kita memperoleh

$$\alpha \mathcal{L}^{-1}[F] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G] = \mathcal{L}^{-1}[\alpha F + \beta G]$$

maka inversi transform Laplace ada juga suatu operator linear. □

Hal ini sangat penting, karena kita dapat menghitung, misalnya $\mathcal{L}[2t^2 - t + 1]$ dan $[e^{3t} + \cos(2)t]$ dengan mudah dalam bentuk transform Laplace dari bagian pembentuknya.

Sebagaimana telah disebutkan sebelumnya, formula inversi Laplace melibatkan integrasi kompleks, sehingga kita memilih untuk menghindarinya bila dimungkinkan. Sering kita mengenali konstituen suatu ekspresi yang kebalikan transform Laplacinya kita cari. Sebagai contoh, misalnya $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right]$. Kita dapat melanjutkan dengan memecah fungsi rasional ini menjadi representasi bagian parsialnya dan mengeksplorasi linearitas dari kebalikan transform Laplace. Kita mempunyai

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2 - 5s + 6}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{s-2} + \frac{1}{s-3}\right] \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] \\ &= -e^{2t} + e^{3t}\end{aligned}$$

Kita berhenti sejenak di sini untuk memperhatikan bahwa inversi dari transform Laplace yang menggunakan bentuk standard hanya mungkin karena operasi yang bersangkutan adalah suatu bijeksi; untuk setiap fungsi $f(t)$ transform Laplace $\mathcal{L}[f(t)]$ terdefinisi secara unik dan sebaliknya. Ini merupakan konsekuensi langsung dari teorem Lerch.

Teorem 5 (Teorem pergeseran pertama). *Jika $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ untuk $\text{Re}(s) > b$, maka $\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a)$ untuk $\text{Re}(s) > a + b$.*

Bukti. Sesuai definisi,

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} f(t) dt = F(s-a)$$

bila $\text{Re}(s-a) > b$. □

Teorem 6 (Teorem pergeseran kedua). *Jika transform Laplace dari $f(t)$ adalah $F(s)$, maka transform Laplace dari fungsi $g(t) = H(t-a)f(t-a)$ adalah $e^{-sa}F(s)$, dimana H adalah fungsi tangga Heaviside.*

Bukti. Sesuai definisi,

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} f(t-a)e^{-st} dt$$

Dengan menuliskan $\tau = t - a$, persamaan ini menjadi

$$\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-s\tau} e^{-sa} d\tau = e^{-sa} F(s)$$

karena definisi dari transform Laplace, (3.46) dapat ditulis dalam sembarang variabel boneka dari integrasi. □

Sebagai contoh, untuk menentukan transform kebalikan dari fungsi $\frac{e^{-3s}}{s^3}$, kita terlebih dahulu memperhatikan bahwa $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$. Teorem pergeseran kedua segera memperlihatkan bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-3s}}{s^3}\right] = \frac{1}{2}H(t-3)(t-3)^2$$

3.5.3 Solusi Persamaan Diferensial Menggunakan Transform Laplace

Agar dapat mengambil transform Laplace dari suatu persamaan diferensial, kita harus dapat menghitung tranform Laplace dari derivatif

suatu fungsi. Menurut definisi,

$$\mathcal{L}[f'] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt$$

Setelah melakukan integrasi bagian per bagian, kita memperoleh

$$\mathcal{L}[f'] = e^{-st} f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -se^{-st} f(t) dt$$

Pada tahap ini, kita akan menganggap bahwa nilai s adalah dibatasi sehingga $e^{-st} f(t) \rightarrow 0$ ketika $t \rightarrow \infty$. Hal ini berarti bahwa

$$\mathcal{L}[f'] = s\mathcal{L}[f] - f(0) \quad (3.49)$$

Corollary dari (3.49) yang sangat berguna adalah bahwa, jika

$$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

sehingga, kecuali bila $f(t)$ adalah diskontinyus, $g'(t) = f(t)$, kita mempunyai $\mathcal{L}[f] = s\mathcal{L}[g] - g(0)$. Karena $g(0) = 0$ menurut definisi,

$$\mathcal{L}[g] = \mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f]$$

dan oleh karenanya

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}F(s)\right] = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

Hal ini dapat berguna untuk membalikkan transform Laplace, sebagai contoh,

$$F(s) = \frac{1}{s(s^2 + \omega^2)}$$

Kita tahu bahwa $\frac{\mathcal{L}[\sin(\omega t)]}{\omega} = \frac{1}{(s^2 + \omega^2)}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \frac{1}{(s^2 + \omega^2)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} \mathcal{L}\left[\frac{1}{\omega} \sin(\omega t)\right]\right] \\ &= \int_0^t \frac{1}{\omega} \sin(\omega\tau) d\tau = \frac{1}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) \end{aligned}$$

Sekarang mari kita coba pecahkan persamaan diferensial sederhana berikut ini

$$y'(t) - 2y = 0,$$

yang mengikuti kondisi awal $y(0) = 1$. Tentu saja, adalah mudah sekali memecahkan persamaan separable ini, tetapi hal ini sangat berguna sebagai contoh ilustratif. Kita mulai dengan mengambil transform Laplace dari persamaan diferensial, yang memberikan

$$\mathcal{L}[y'(t)] - 2\mathcal{L}[y] = sY(s) - y(0) - 2Y(s) = 0,$$

dimana $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)]$. Menggunakan kondisi awal dan memanipulasi persamaan yang diperoleh memberikan

$$Y(s) = \frac{1}{s-2}$$

yang dapat dibalik dengan mudah untuk menghasilkan $y(t) = e^{2t}$.

Banyak persamaan diferensial yang akan kita gunakan adalah ber-order dua, maka kita perlu menentukan $\mathcal{L}[f'']$. Jika kita introduksikan fungsi $g(t) = f'(t)$, (3.49) menunjukkan bahwa

$$\mathcal{L}[g'] = sG(s) - g(0)$$

dimana $G(s) = \mathcal{L}[g] = \mathcal{L}[f'] = sF(s) - f(0)$. Kita menyimpulkan bahwa

$$\mathcal{L}[f''] = \mathcal{L}[g'] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0) \quad (3.50)$$

Kita dapat memperoleh hasil yang sama dengan mengintegrasikan definisi dari transform dari f'' dua kali bagian per bagian. Ini juga langsung untuk menunjukkan melalui induksi bahwa

$$\mathcal{L}[f^{(n)}] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Sebagai contoh, kita dapat memecahkan persamaan diferensial

$$y''(t) - 5y'(t) + 6y = 0,$$

sesuai dengan kondisi awal $y(0) = 0$ dan $y'(0) = 1$ yang menggunakan transform Laplace. Kita memperoleh bahwa

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 5(sY(s) - y(0)) + 6Y = 0$$

Menggunakan kondisi awal menunjukkan bahwa

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 5s + 6}$$

Untuk membalikkan transform Laplace kita memisahkan pecahan ke dalam pecahan parsial penyusunnya,

$$Y(s) = \frac{1}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$

yang segera menunjukkan bahwa

$$y(t) = e^{3t} - e^{2t}$$

Sekarang kita akan mempelajari solusi sistem persamaan gabungan sebagai berikut

$$y_1' + y_1 = y_2, \quad y_2' - y_2 = y_1$$

dengan kondisi awal bahwa $y_1(0) = y_2(0) = 1$. Walaupun kita dapat mengkombinasikan dua persamaan order pertama ini untuk memperoleh suatu persamaan order kedua, kita akan memecahkan mereka secara langsung dengan menggunakan transform Laplace. Transform dari kedua persamaan ini adalah

$$sY_1 - 1 + Y_1 = Y_2, \quad sY_2 - 1 - Y_2 = Y_1,$$

yang dapat dibalik dengan mudah untuk menghasilkan

$$y_1(t) = \cosh(\sqrt{2}t), \quad y_2(t) = \cosh(\sqrt{2}t) + \sqrt{2} \sinh(\sqrt{2}t)$$

Karena ekspresi $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ dan $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ sering sekali muncul, maka keduanya diberi nama sebagai $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ dan $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$. Perlu dicatat bahwa reduksi dari suatu sistem persamaan diferensial menjadi suatu sistem persamaan aljabar merupakan keuntungan utama dari metoda transformasi ini. Kekuatan nyata dari metoda transform Laplace terletak dalam solusi problem dimana ketidak-homogenannya adalah tidak dalam bentuk yang sederhana, seperti misalnya

$$y'' + y' = \delta(t - 1)$$

Agar dapat mengambil transform Laplace dari persamaan ini, kita perlu mengetahui transform Laplace dari fungsi delta atau lengkapnya Dirac's delta function.³

Sifat penting dari fungsi delta adalah hubungan berikut

$$\int f(t)\delta(t) dt = 0$$

untuk sembarang fungsi $f(t)$. Hal ini mudah dilihat. Pertama, $\delta(t)$ lenyap di manapun kecuali $t = 0$. Oleh karena itu, tidak masalah nilai

³Dirac's delta function didefinisikan oleh sifat berikut ini

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

dengan

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1$$

jika $0 \in [t_1, t_2]$ (dan nol untuk selainnya). Fungsi ini mempunyai puncak takberhingga pada $t = 0$ dengan luas total sama dengan satu.

berapapun fungsi $f(t)$ mengambilnya kecuali pada $t = 0$. Kita kemudian dapat mengatakan bahwa $f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t)$. Kemudian $f(0)$ dapat dikeluarkan dari integral karena $f(0)$ tidak tergantung pada t , dan kita memperoleh ruas sebelah kanan. Persamaan ini dengan mudah dapat digeneralisasi menjadi

$$\int f(t)\delta(t - t_0) dt = f(t_0)$$

Kita dapat menghitung secara langsung, sebagai

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = \int_0^{\infty} \delta(t - a)e^{-st} dt = e^{-sa}$$

sehingga persamaan diferensial yang bersangkutan menjadi

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + sY(s) - y(0) = e^{-s}$$

dan oleh karenanya

$$Y(s) = \frac{e^{-s} + (s + 1)y(0) + y'(0)}{s(s + 1)}$$

dan, menggunakan teorem pergeseran pertama,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s + 1}\right] = e^{-t}$$

Hal ini berarti bahwa

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s + 1)}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + 1}\right] = 1 - e^{-t}$$

dan, menggunakan teorem pergeseran kedua,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-s}}{s(s + 1)}\right] = H(t - 1)(1 - e^{-(t-1)})$$

Mengkombinasikan semua hasil tersebut, dan menggunakan linearitas dari transform Laplace, menunjukkan bahwa

$$y(t) = y(0) + y'(0)(1 - e^{-t}) + H(t - 1)(1 - e^{-(t-1)})$$

3.5.4 Formula Inversi dari Transform Laplace

Kita telah menyaksikan bahwa banyak transform Laplace dapat dibalik dari pengetahuan tentang transform yang bersangkutan dari beberapa fungsi yang umum bersama dengan linearitas dari transform Laplace dan teorem pergeseran pertama dan kedua. Tetapi, teknik ini seringkali tidak memadai untuk membalik transform Laplace yang muncul sebagai solusi dari problem yang lebih rumit, khususnya problem dari persamaan diferensial partial. Oleh karena itu, kita membutuhkan suatu formula inversi. Kita akan menurunkan formula ini secara informal dengan menggunakan integral Fourier.

Misalnya $g(t)$ adalah suatu fungsi order eksponensial, khususnya dengan γ angka riil terkecil sehingga $e^{-\gamma t}g(t)$ adalah terbatas ketika $t \rightarrow \infty$. Sebagaimana kita saksikan, $g(t)$ dengan demikian mempunyai suatu transformasi Laplace $G(s)$, yang ada untuk $Re(s) > \gamma$. Sekarang kita definisikan $h(t) = e^{-\gamma t}g(t)H(t)$. Karena $h(t)$ adalah terbatas bila $t \rightarrow \infty$, integral Fourier ada, dan menunjukkan bahwa

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikT} h(T) dT dk$$

dan oleh karenanya bahwa

$$e^{-\gamma t}g(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{st} \int_0^{\infty} e^{-sT} g(T) dT ds$$



Gambar 3.2: Tahap Penyelesaian Persamaan Diferensial dengan Transformasi Laplace

"Genius does what it must, and talent does what it can."

Robert Bulwer-Lytton

"The man who can make others laugh secures more votes for a measure than the man who forces them to think."

Malcolm de Chazal

"The most wasted of all our days are those in which we have not laughed."

Sébastien Chamfort

4

Sumberdaya

Agar lebih intuitif, diskusi tentang sumberdaya ini akan menggunakan notasi model diskrit, namun disertai harapan bahwa untuk mengubahnya menjadi notasi kontinyu tidak ada kesulitan yang berarti. Istilah renewable (dapat pulih) dan nonrenewable (tidak dapat pulih) akan digunakan karena telah dikenal luas dan sudah sangat umum digunakan dalam pembicaraan sehari-hari.

4.1 Sumberdaya Nonrenewable

Kita akan mempelajari model ekonomi dasar bagi evaluasi dan pengelolaan suatu sumberdaya alam nonrenewable, seperti batubara, minyak, gas alam dan sebagainya. Modeling topik ini sering diturunkan dari ekonomi klasik “makan kue” yang pertama kali dipelajari oleh ?.

Perhatikan suatu ekonomi dimana satu-satunya komoditi adalah suatu sumberdaya alam nonrenewable. Dinamika sumberdaya secara sederhana dapat ditulis sebagai:

$$s_{t+1} = s_t - h_t \quad (4.1)$$

dimana s_t adalah stok sumberdaya pada awal periode $[t, t + 1]$ dan h_t adalah ekstraksi selama $[t, t + 1]$, yang berkaitan dengan konsumsi dalam ekonomi. Bila $T < \infty$, sekuen ekstraksi $\{h_t\} = h_{t_0}, \dots, h_{T-1}$ menghasilkan sekuen stok $\{s_t\} = s_{t_0}, s_{t_0+1}, \dots, s_T$. Bila kisaran waktu t adalah tidak dinyatakan secara spesifik, hal ini harus dipahami bahwa waktu berjalan dari t_0 ke $T - 1$ atau dari t_0 ke T .

Diasumsikan bahwa keputusan ekstraksi h_t adalah tidak dapat balik (irreversible) dalam pengertian bahwa pada setiap waktu t :

$$0 \leq h_t \quad (4.2)$$

Kendala fisik bermakna

$$h_t \leq s_t \quad (4.3)$$

dan

$$0 \leq s_t \quad (4.4)$$

Secara lebih umum, kita akan mempertimbangkan kendala konservasi

yang lebih kuat bagi sumberdaya sebagai berikut:

$$s^b \leq s_t \quad (4.5)$$

dimana s^b adalah standar sumberdaya minimum.

Suatu pertanyaan penting adalah terkait dengan keadilan antar generasi. Dapatkah kita memaksakan tingkat konsumsi tertentu yang dijamin sebesar h^b

$$0 < h^b \leq h_t \quad (4.6)$$

sepanjang generasi t ? Keperdulian akan keberlanjutan ini dapat ditulis dalam pengertian utiliti dalam bentuk yang mendekati kriteria Rawls. Tentu saja, bila $T = +\infty$, syarat seperti itu tidak dapat dipenuhi dengan sumberdaya yang terbatas s_0 .

Adapun tujuan yang hendak dicapai adalah mendapatkan nilai kini manfaat bersih maksimum, yang secara formal dirumuskan sebagai berikut:

$$\max_{\{h_t\}} \left\{ \sum_{t=0}^{T-1} \beta^t u(h_t) \right\}$$

dimana β adalah tingkat diskon sosial yang umumnya $0 \leq \beta \leq 1$.

Definition: Depletable resource. A resource is depletable if (1) its stock decreases over time whenever the resource is being used, (2) the stock never increases over time, (3) the rate of stock decrease is a monotonically increasing function of the rate of resource use, and (4) no use is possible without a positive stock. (Sweeney dalam handbook vol 3)

4.2 Sumberdaya Renewable

4.2.1 Model Pertumbuhan

Kebanyakan model bioekonomi yang membahas problem eksploitasi sumberdaya renewable (kehutanan, pertanian, perikanan, peternakan) adalah dibangun atas kerangka model biologi. Model seperti itu boleh jadi mempertimbangkan struktur demografik (umur, tahap atau kelas ukuran) dari stok yang dieksploitasi atau mungkin saja berupaya untuk menangani dimensi trofik dari ekosistem yang dieksploitasi. Tetapi, ahli biologi sering menemui pentingnya memperkenalkan berbagai derajat penyederhanaan untuk mengurangi kompleksitas yang analisis.

Dalam banyak model, stok, yang diukur melalui biomasnya, dipandang secara global sebagai satu unit tunggal tanpa pertimbangan struktur populasi. Pertumbuhannya diwujudkan melalui persamaan:

$$b_{t+1} = g(b_t) \quad (4.7)$$

dimana b_t adalah biomas sumberdaya dan $g : \mathfrak{R}_+ \implies \mathfrak{R}_+$ diambil untuk memenuhi $g(0) = 0$. Gambar 4.1 menampilkan berbagai bentuk kurva dalam waktu diskrit dari berbagai model biomas berikut ini:

1. Model linear

$$g(b) = (1 + r)b \quad (4.8)$$

dimana r adalah laju pertumbuhan per kapita.

2. Model logistik

$$g(b) = b + rb \left(1 - \frac{b}{K}\right) \quad (4.9)$$

dimana $r \geq 0$ adalah laju pertumbuhan per kapita, dan K adalah daya dukung dari habitat.

3. Model Ricker

$$g(b) = be^{r\left(1-\frac{b}{K}\right)} \quad (4.10)$$

seperti sebelumnya, r adalah laju pertumbuhan per kapita dan K adalah daya dukung habitat.

4. Model Beverton-Holt

$$g(b) = \frac{(1+r)b}{1+\beta b} \quad (4.11)$$

dimana daya dukung menjadi sama dengan $K = \frac{r}{\beta}$.

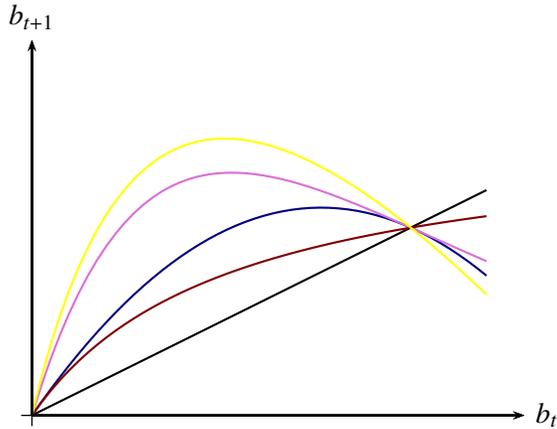
5. Model depensasi

$$g(b) = b + \alpha[f(b) - b][b - b^d] \quad (4.12)$$

dimana $\alpha > 0$ dan f adalah sembarang dinamika populasi sebelumnya, yang memenuhi $f(b) \geq b$ untuk $b \in [0, K]$, dan $b^d \in [0, K]$ menunjukkan ambang batas populasi minimum yang viabel. Sebenarnya, $g(b) < b$ bilamana $b < b^d$ dan efek Allee terjadi dalam pengertian bahwa populasi kecil menurun menuju kepunahan.

Pertumbuhan biomas model logistik sangat banyak digunakan dan oleh karena kiranya perlu dibahas lebih jauh. Solusi dari model logistik adalah sebagai berikut:

$$b_t = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - b_0}{b_0}\right)e^{-rt}} \quad (4.13)$$



Gambar 4.1: Dinamika Populasi dari Berbagai Model

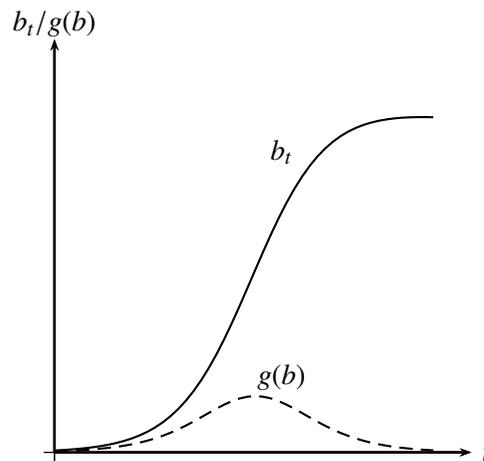
dimana b_0 adalah kondisi awal pada waktu $t = 0$. Jika kondisi awal adalah kecil, maka $\frac{K - b_0}{b_0}$ adalah besar. Puncak pertumbuhan terjadi pada $b_t = \frac{K}{2}$ pada waktu $t = T_p$

$$\left(\frac{K - b_0}{b_0}\right) e^{-rt} = 1 \quad (4.14)$$

sehingga

$$rT_p = \ln\left(\left(\frac{K}{b_0} - 1\right)\right) \quad (4.15)$$

Gambar 4.2 memperlihatkan pertumbuhan logistik dari b_t dengan waktu, mulai dengan lambat pada b_t rendah dan mendekati K dalam keadaan tidak ada pemanenan. Pertumbuhan tercepat terjadi di pertengahan trayektori, pada b_t pertengahan.



Gambar 4.2: Pertumbuhan Biomass Logistik

4.2.2 Pertumbuhan dan Panen

Dalam kasus sumberdaya nonrenewable, kita menghadapi hanya satu pertimbangan: laju menghabiskannya dan jangka waktu menghabiskannya. Menghabiskan di sini dapat bermakna habis secara “fisik” atau, yang lebih realistis, habis secara “ekonomi” yang artinya bahwa sumberdaya tidak dapat lagi diproduksi secara ekonomis - biaya produksi melebihi sumberdaya yang dieksploitasi. Ada pula, habis secara “politis”, yakni bila sumberdaya tidak dapat lagi diproduksi secara legal.

Sebaliknya, sistem hidup emnampilkan kemungkinan penggunaan sumberdaya secara berkelanjutan, dalam jangka waktu yang tidak terbatas. Selanjutnya kita akan bergelut dengan kemungkinan dari steady state, yang mencerminkan suatu keseimbangan antara alam dan ekonomi, dan stabilitas dari state tersebut. Kita akan mulai dengan suatu situasi sederhana dimana sistem kehidupan dicirikan oleh suatu pen-

jelas tunggal, yakni biomas.

Dinamika alami dasar bari sistem ini adalah

$$b_{t+1} = b_t + g(b_t) - h_t \quad (4.16)$$

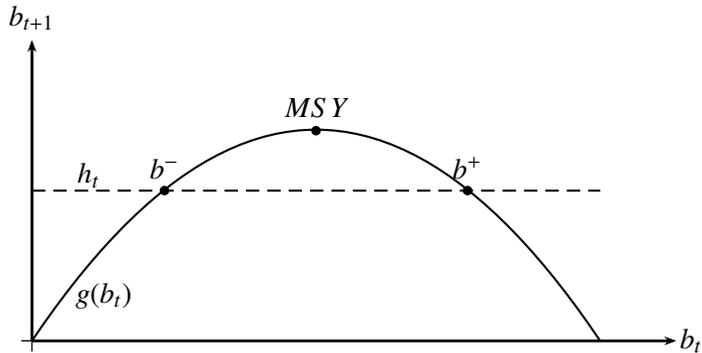
dimana h_t adalah laju panen pada waktu t .

4.2.3 Steady State

Untuk steady state, kita memerlukan $g(b_t) = h_t$. Panen tertinggi yang mungkin dapat tercapai terjadi pada $b = b^*$, dengan $h^* = g^* = \frac{rK}{4}$. Ini adalah hasil maksimum berkelanjutan (*the maximum sustainable yield*, MSY). Bagi setiap nilai panen tertentu $h < h^*$, terdapat dua keseimbangan, b^+ dan b^- , yang terletak secara simetrik di sekitar b^* (Gambar 4.3). Jika panen dirancang pada tingkat konstan, maka b^+ akan stabil terhadap penyimpangan (*perturbation*) kecil yang terjadi pada b_t ; sementara b^- adalah tidak stabil. Penyimpangan negatif sekitar b^- dapat berakibat kepunahan; penyimpangan positif akan menghasilkan pertumbuhan ke arah keseimbangan stabil pada b^+ . Panen yang melebihi h^* juga berakibat kepunahan, karena pertumbuhan tidak mampu mengimbangnya. Jadi, kita memiliki dua resep untuk menuju kepada kepunahan: beroperasi pada biomas rendah, $b_t < b^-$, atau memanen di atas MSY, $h_t > h^*$. Namun, ada dua kondisi bagi panen yang berkelanjutan dan stabil: panen di bawah MSY, dan menghindari kemungkinan penyimpangan negatif yang besar terhadap b_t , sehingga b_t menurun hingga di bawah b^- .

?

Dalam menghitung tingkat panen, kita perlu konsep upaya pemanen: jumlah pekerjaan, mesin, dan sebagainya yang terlibat dalam pe-



Gambar 4.3: Laju Pertumbuhan dan Laju Panen

manenan aktif dan jasa, aktivitas, atau pemanfaatan relatif mereka (misalnya jumlah hari per tahun yang digunakan dalam pemanenan). Semua faktor tersebut akan digandakan untuk membentuk satu variabel usaha E .

Panen tergantung pada usaha dan biomas dalam bentuk hubungan sederhana sebagai berikut:

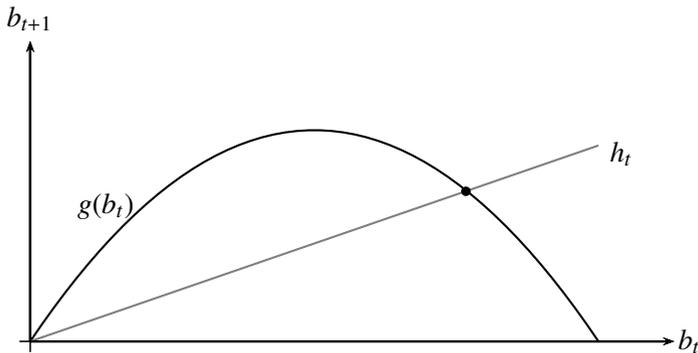
$$h_t = \theta E b_t \quad (4.17)$$

dimana θ merepresentasikan teknologi pemanenan. Meningkatnya usaha, biomas, atau teknologi akan meningkatkan panen, dalam kasus ini secara linear. Ketiadaan salah satu faktor sudah cukup untuk meniadakan panen.

$$\theta E b_t = r b_t \left(1 - \frac{b_t}{K}\right) \implies E = \frac{r}{\theta} \left(1 - \frac{b_t}{K}\right) \quad (4.18)$$

Jadi bagi sumberdaya renewable dalam steady state, E_t (jumlah pemanen misalnya) adalah linear dalam b_t . Kita dapat beroperasi pada

setiap kombinasi antara b_t dan E_t (biomas yang tersedia dan jumlah pemanen) pada garis ini; pada satu ekstrim, $(E_t, b_t) = (0, K)$, dan kita mempunyai daya dukung alami tanpa upaya apapun dan juga tidak ada pemanenan; sementara pada ekstrim yang lain, $(E_t, b_t) = (\frac{r}{h_t}, 0)$, kita mempunyai sistem pada biomas yang sangat kecil, pada dasarnya tanpa panen, dan banyak upaya diarahkan agar sistem tetap seperti itu. Di pertengahan, kita mempunyai titik MSY $(E_t, b_t) = (\frac{r}{2h_t}, \frac{K}{2})$ dengan $h_t = h^*$. Jika usaha dapat dikendalikan, kita dapat memilih salah satu keseimbangan tersebut atau memilih pasangan (E_t, b_t) lain sepanjang garis yang merepresentasikan Persamaan (4.18). Gambar 4.4 menampilkan pertumbuhan pola logistik dengan pemanenan yang mengikuti Persamaan (4.17).



Gambar 4.4: Laju Pertumbuhan dan Laju Panen Linear

"The only time people dislike gossip is when you gossip about them."

Will Rogers

"Skepticism: the mark and even the pose of the educated mind."

John Dewey

"Everything should be made as simple as possible, but not simpler."

Albert Einstein

5

Kalkulus Variasi

5.1 Pengantar

Kalkulus variasi (calculus of variation) adalah sebuah cabang matematika bagian dari teori optimisasi dinamis. Kalkulus variasi dilahirkan sebagai suatu disiplin di paruh kedua abad 17, ketika Johann Bernoulli mengangkat problem berikut kepada komunitas ilmiah: bayangkan suatu kabel yang dilengkungkan untuk membentuk suatu kurva yang menghubungkan dua titik di papan vertikal, sepanjang kabel tersebut sebuah kelereng dibiarkan meluncur tanpa friksi. Kurva seperti apa

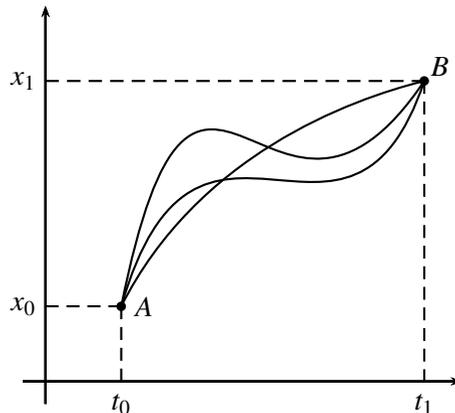
yang memberikan waktu terpendek? Kurva tersebut disebut *brachistocrone* (dari bahasa Yunani *brachistos*, pendek, dan *chronos*, waktu).

Obyek matematik yang harus dioptimalkan dalam kalkulus variasi (fungsi biaya atau profit) tidak dapat direduksi menjadi fungsi riil dari bilangan berhingga variabel riil. Umumnya, obyek tersebut adalah fungsi riil, yang argumennya sendiri adalah suatu fungsi (skalar atau vektor, satu atau lebih variabel). Obyek seperti ini dinamai fungsional riil. Lebih tepatnya, formulasi masalah dalam kalkulus variasi memerlukan, pertama-tama, spesifikasi dari suatu set U dari fungsi-fungsi, yang disebut fungsi yang diperkenankan (*admissible functions*). Pada set ini, suatu aplikasi $J : U \rightarrow \mathcal{R}$ didefinisikan, yang disebut fungsional dan merupakan obyek yang dimaksimumkan.

$$\max \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \right\} \quad \text{bila} \quad x(t_0), \quad x(t_1) = x_1 \quad (5.1)$$

di mana F adalah fungsi tertentu dengan perilaku baik yang terdiri dari tiga variabel dan t_0 , t_1 , x_0 , dan x_1 adalah bilangan tertentu. Lebih tepatnya: Di antara fungsi $x(t)$ yang berperilaku baik yang memenuhi $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$, dapatkan fungsi (bila ada) sehingga integral dalam (5.1) adalah maksimum. Secara geometrik, problem ini dapat diilustrasikan melalui Gambar 5.1: Titik A= (t_0, x_0) dan titik B= (t_1, x_1) dituangkan pada bidang- tx . Untuk masing-masing kurva halus yang menghubungkan titik A dan titik B, integral dalam 5.1 mempunyai nilai tertentu. Tugas kita adalah mendapatkan kurva yang membuat integral sebesar mungkin.

Sejauh ini kita mempersoalkan maksimisasi integral dalam 5.1. Mengingat meminimumkan integral $F(t, x, \dot{x})$ memberikan hasil yang sama



Gambar 5.1: Lintasan & maksimisasi fungsional

dengan memaksimalkan integral $-F(t, x, \dot{x})$, hubungan antara kedua problem dengan mudah dapat diselesaikan, dan kondisi yang mencirikan kasus maksimisasi dapat ditransfer secara langsung menjadi kondisi yang mencirikan kasus minimisasi.

Seperti halnya dalam kasus fungsi, pertambahan atau variasi suatu fungsional $J(x)$ adalah

$$\Delta J(x) = J(x + \delta x) - J(x) \quad (5.2)$$

Menggunakan sembarang $\delta x = h$, dan menggunakan ekspansi Taylor, diperoleh

$$\begin{aligned} \Delta J(h) &= J(x + h) - J(x) \\ &= \phi(h) + Q(h) + O\|h\|^2 \\ &= \delta J(h) + \delta^2 J(h) + O\|h\|^2 \end{aligned} \quad (5.3)$$

di mana $\phi(h)$ adalah terma linear dalam seri Taylor yang diacu sebagai

variasi pertama $\delta J(h)$, $Q(h)$ adalah terma kuadratik yang menunjukkan variasi kedua $\delta^2 J(h)$, dan $0 \parallel h \parallel^2 \rightarrow 0$ bila $h \rightarrow 0$. Seperti halnya fungsi $f(t)$ mencapai maksimum (minimum) relatif pada t^* bila $f(t^*) \geq f(t)$ ($f(t^*) \leq f(t)$) untuk semua t yang cukup dekat dengan t^* dan maksimum (minimum) global untuk semua $t \neq t^*$ yang lain, suatu fungsional $J(x)$ dikatakan mencapai suatu maksimum (minimum) relatif atau lokal sepanjang $x^*(t)$ bila $\Delta J(x^*) \geq 0$ (≤ 0), yakni $J(x^*) \geq J(x)$ ($J(x^*) \leq J(x)$) untuk semua fungsi tetangga yang cukup dekat dengan $x^*(t)$ dan maksimum (minimum) global bila $J(x^*) \geq J(x)$ ($J(x^*) \leq J(x)$) untuk semua fungsi $x(t) \neq x^*(t)$ yang lain.

5.2 Persamaan Euler

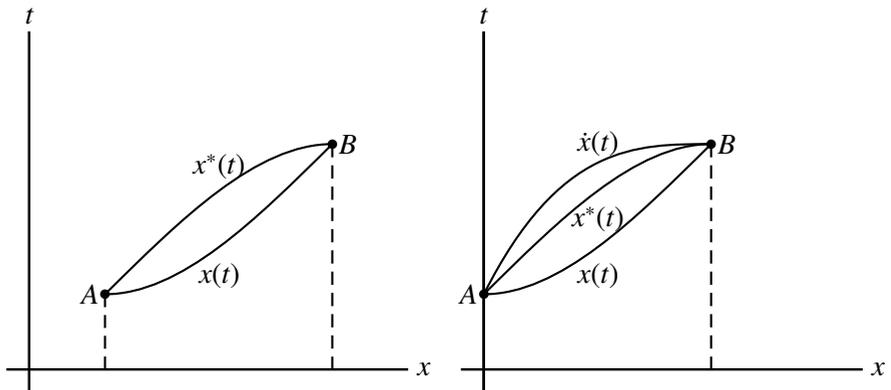
Misalnya $C[a, b]$ mewakili kelas fungsi kontinyu yang didefinisikan pada suatu interval $[a, b]$ dan $C^i[a, b]$ mewakili semua fungsi yang didefinisikan pada $[a, b]$ dan mempunyai turunan ke- i yang kontinyu ($1 \leq i \leq n$). Tidak ada pengurangan keberlakuan secara umum bila digunakan $a = 0$ dan $b = T$ sehingga $C[a, b] = C[0, T]$.

Sekarang perhatikan problem variasional dari bentuk paling sederhana berikut ini:

$$J(x) = \int_0^T v(t, x, \dot{x}) dt \quad (5.4)$$

di mana titik ujung $A(0, x(0))$ dan $B(T, x(T))$ adalah tertentu, $v(t, x, \dot{x}) \in C^2[0, T]$, $x(t) \in C^2[0, T]$, $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ dan x adalah sebuah fungsi skalar (Gambar 5.2).

Problemnya adalah memilih di antara semua fungsi yang admissible, yaitu semua fungsi $x(t) \in C^2[0, T]$ yang berawal di A dan berakhir di B, fungsi, misalnya $x^*(t)$, yang memberikan suatu maksimum atau mi-



Gambar 5.2: Kesetaraan kurva fungsional

nimum terhadap fungsioinal $J(x)$. Kita tahu bahwa syarat harus bagi suatu ekstrimum adalah $\delta J(x) = 0$. Misalnya

$$\delta J(x) = \int_0^T f(t)h(t) dt = 0 \quad (5.5)$$

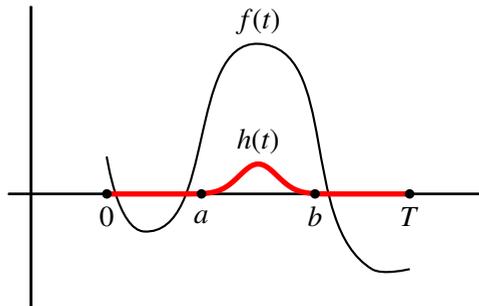
di mana $f(t) \in C[0, T]$ dan $h(t)$ adalah fungsi sembarang yang mengikuti $h(0) = h(T) = 0$ dalam Gambar 5.2 kanan. Apa yang dapat dikatakan tentang $f(t)$? Lemma fundamental berikut ini menyatakan bahwa $f(t) = 0$. Lebih tepatnya Lemma Fundamental adalah sebagai berikut:

Lemma 1. *Misalnya $f(t)$ fungsi kontinyu dalam $[0, T]$ dan S adalah set dari semua fungsi kontinyu dan dapat diturunkan $h(t)$ dalam $[0, T]$ sehingga $h(0) = h(T) = 0$ di mana T adalah tertentu. Jika*

$$\int_0^T f(t)h(t) dt = 0 \quad (5.6)$$

untuk semua $h \in S$ maka $f(t) = 0$ untuk semua $t \in [0, T]$

Lemma ini memainkan peran fundamental dalam pembuktian persamaan Euler dalam teorem berikut



Gambar 5.3: Lemma

Teorem 7. Misalnya $J(x) = \int_0^T v(t, x, \dot{x}) dt$ didefinisikan pada $C'[0, T]$ dan memenuhi kondisi batas $x(0) = x_0$, $x(T) = x_T$. Maka syarat harus bagi $J(x)$ agar memiliki suatu ekstrimum adalah bahwa $x(t)$ memenuhi persamaan Euler berikut ini:

$$v_x - \frac{d}{dt}v_{\dot{x}} = 0 \quad (5.7)$$

Bukti. Syarat harus bagi $J(x)$ agar ekstrimum adalah $\delta J(x) = 0$, yakni

$$\delta J = \int_0^T [v_x(t, x, \dot{x}) + v_{\dot{x}}(t, x, \dot{x})h] dt = 0 \quad (5.8)$$

di mana $v_x \equiv \frac{\partial v(t, x, \dot{x})}{\partial x}$, $v_{\dot{x}} \equiv \frac{\partial v(t, x, \dot{x})}{\partial \dot{x}}$, dan h adalah sebuah fungsi sembarang kontinu yang disebut fungsi penggeser sehingga $h(0) = h(T) = 0$. Integrasi bagian per bagian memberikan

$$\begin{aligned} \int_0^T h v_{\dot{x}} dt &= h v_{\dot{x}} \Big|_0^T - \int_0^T \left(\frac{d}{dt} v_{\dot{x}} \right) h dt \\ &= 0 - \int_0^T \left(\frac{d}{dt} v_{\dot{x}} \right) h dt \end{aligned} \quad (5.9)$$

mengingat $h(0) = h(T) = 0$. Catatan bahwa argumen fungsi dihilangkan. Mensubstitusikan ke dalam (5.8) memberikan

$$\delta J = \int_0^T \left(v_x - \frac{d}{dt} v_{\dot{x}} \right) dt = 0 \quad (5.10)$$

yang dengan Lemma Fundamental memberikan persamaan Euler berikut

$$v_x - \frac{d}{dt} v_{\dot{x}} = 0$$

□

Dituliskan secara penuh, dengan $v_{x\ddot{x}} \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \ddot{x}}$, Persamaan (5.7) menjadi

$$v_x - v_{\dot{x}t} - v_{x\ddot{x}}\ddot{x} - v_{\dot{x}\ddot{x}}\ddot{x} = 0 \quad (5.11)$$

Persamaan ini disebut Persamaan Euler atau Euler-Lagrange yang kurva integralnya adalah ekstremal dari fungsional. Solusinya akan, umumnya, tergantung pada dua konstanta; kedua konstanta ini biasanya ditentukan oleh kondisi batas $x(t_0) = x_0$ dan $x(t_1) = x_1$. Catat bahwa (5.11) berimplikasi bahwa $v(t, x, \dot{x})$ mempunyai turunan pertama dan kedua kontinu terhadap semua argumennya, pada semua titik (t, x) di mana $v_{\dot{x}\ddot{x}} \neq 0$. Jika $v_{\dot{x}\ddot{x}} = 0$, $J(x)$ disebut fungsional degenerate. Persamaan Euler hanya menunjukkan syarat harus, bukan syarat cukup.

Contoh 16. *Dapatkan output tingkat optimal $x(t)$ dari seorang produser yang menghadapi harga pasar konstan $p = 4$ dan biaya total $x^2 + \dot{x}^2$ yang didiskon dengan tingkat bunga pasar $r = 0.02$ dari tingkat output awal $x(0) = 0$ menjadi tingkat output akhir $x(1) = 10$. Problemnnya adalah memaksimumkan*

$$\int_0^1 (4x - \dot{x}^2 - x^2) e^{-0.02t} dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 10$$

Fungsi profit terdiskon adalah $v(t, x, \dot{x}) \equiv (4x - \dot{x}^2 - x^2)e^{-0.2t}$, sehingga Persamaan Euler menjadi

$$v_x - \frac{d}{dt}v_{\dot{x}} = e^{-0.2t}(4 - 2x) - \frac{d}{dt}e^{-0.2t}(-0.2\dot{x}) = 0$$

atau,

$$\ddot{x} - 0.2\dot{x} - x = 2$$

yang solusinya adalah

$$x(t) = c_1e^{k_1t} + c_2e^{k_2t} + 2$$

di mana $k_{1,2} = 0.1 \pm \sqrt{0.01 + 1}$, $k_1 = 1.105$ dan $k_2 = 0.905$, adalah akar persamaan auxiliary dari fungsi komplementer, 2 adalah integral khusus, dan c_1 serta c_2 adalah konstanta yang ditentukan oleh $x(0) = 0$ dan $x(1) = 10$, yakni $x(0) = c_1 + c_2 + 2 = 0$ dan $x(1) = c_1e^{k_1} + c_2e^{k_2} + 2 = 10$, yang memberikan $c_1 = 3.358$ dan $c_2 = -5.358$, sehingga solusi yang dicari adalah

$$x(t) = 3.358e^{1.105t} - 5.358e^{-0.905t} + 2$$

Contoh 17. Dapatkan solusi Persamaan Euler yang mungkin bila

$$J(x) = \int_0^1 (x^2 + \dot{x}^2) dt, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = e^2 - 1$$

di sini $v(t, x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}^2$, sehingga $v_x = 2x$, $v_{\dot{x}} = 2\dot{x}$ dan oleh karena itu $\frac{d}{dt}(v_{\dot{x}}) = 2\ddot{x}$. Catatan bahwa $v_{\dot{x}t} = 0$. Persamaan Euler dalam kasus ini adalah $\ddot{x} - x = 0$. Solusi yang diperoleh adalah $x(t) = c_1e^t + c_2e^{-t}$, di mana c_1 dan c_2 adalah konstanta. Karena kita ingin mendapatkan $x(0) = 0$ dan $x(1) = e^2 - 1$, kita memiliki persamaan berikut untuk menentukan c_1 dan c_2 : $0 = c_1 + c_2$ dan $e - 1 = c_1e + c_2e^{-1}$. Dengan demikian $c_1 = e$ dan $c_2 = -e$, sehingga

$$x(t) = e^{1+t} - e^{1-t}$$

sebagai satu-satunya solusi Persamaan Euler yang memenuhi kondisi batas yang ditentukan. Apa yang dapat dikatakan tentang hasil ini? Kita tahu bahwa jika ada suatu fungsi yang diperkenankan yang memaksimumkan atau meminimumkan $J(x)$, maka fungsi tersebut harus fungsi yang ditampilkan sebagai (17). Tidak ada fungsi lain yang dapat melakukannya. Fungsi ini sebenarnya memecahkan masalah minimisasi, sedangkan problem maksimisasinya tidak memiliki solusi.

Problem variasional tipe di atas tidak selalu mempunyai solusi. Fakta ini sudah diperlihatkan pada Contoh 17, di mana solusi terhadap problem maksimisasi tidak ada. Ternyata sulit untuk membuat kondisi yang menentukan apakah suatu problem variasional tertentu mempunyai sebuah solusi. Tetapi, sering kita menjumpai bahwa interpretasi ekonomi, fisik atau geometri dari problem akan memberikan petunjuk kuat ada tidaknya solusi.

Teorem 8 (Syarat harus Legendre). *Misalnya bahwa kondisi dalam teorem 1 terpenuhi. Suatu syarat harus bagi $J(x)$ yang diberikan oleh (6) memiliki maksimum pada $x^*(t)$ adalah bahwa*

$$v_{\dot{x}\dot{x}}(t, x, \dot{x}^*) \leq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (5.12)$$

Kondisi serupa bagi suatu minimum diperoleh dengan membalik ketidaksamaan dalam (5.12)

Secara umum, Persamaan Euler merupakan persamaan diferensial nonlinear order kedua yang sangat rumit. Hanya dalam kasus yang agak khusus persamaan seperti itu dapat dipecahkan secara eksplisit dalam pengertian bahwa solusi dapat diperoleh dalam bentuk fungsi

dan integralnya yang elementer. Beberapa kasus standar di mana Persamaan Euler dapat disederhanakan secara signifikan adalah sebagai berikut:

1. Fungsi v tidak tergantung pada \dot{x} : $v(t, x)$

$$J(x) = \int_0^T v(t, x) dt \quad (5.13)$$

Persamaan Euler memberikan

$$v_x = 0 \quad (5.14)$$

Persamaan ini bukan persamaan diferensial tetapi persamaan aljabar yang umumnya nonlinear. Secara umum, kondisi pembatas tidak dapat dipenuhi, karena tidak ada konstanta integrasi. Dengan kata lain, solusi ada hanya jika kurva $x(t)$ terjadi melewati titik batas yang ditentukan.

Contoh 18 (Maksimisasi revenue). *Perhatikan seorang pengusaha yang hendak memaksimumkan fungsional revenue total $\int_0^T R(x) dt$ di mana $R(x) \equiv xp(x)$ dan $p(x) = -ax + b$, kurva permintaan linear. Persamaan Euler memberikan*

$$R_x + \frac{d}{dt}R_{\dot{x}} = -2ax + b = 0$$

yakni $x^* = \frac{b}{2a}$ sebagai output optimal akan dipertahankan pada tingkat konstan $\frac{b}{2a}$. Jelas solusi ini tidak memenuhi kondisi batas jika kondisi batas tersebut bukan $x(0) = x(T) = \frac{b}{2a}$.

Contoh 19 (Maksimisasi profit). *Perhatikan fungsional profit $J(x) = \int_0^T \pi(t, x) dt$ di mana $\pi(x) = px - a_1x^2 - b_1x - c_1$. Persamaan Euler*

memberikan

$$\pi_x = p - 2a_1x - b_1 = 0$$

yakni *output optimal* merupakan *output* di mana *biaya marginal* adalah sama dengan *harga*, *kaidah optimisasi statik*

$$x^*(t) = \frac{(p - b_1)}{2a_1}$$

Ini bukan persamaan diferensial dan jelas kondisi batas secara umum tidak dapat dipenuhi. Hal ini dapat dilihat bahwa $x^ = 0$ untuk $p = b_1$, yakni ketika harga mencapai tingkat biaya variabel rata-rata, perusahaan akan berhenti berproduksi: produksi nol merupakan strategi optimal.*

2. Fungsi v tidak tergantung pada x : $v(t, \dot{x})$

Fungsional $J(x)$ adalah

$$J(x) = \int_0^T v(\dot{x}, t) dt \quad (5.15)$$

di mana v tidak mengandung x secara eksplisit. Persamaan Euler tereduksi menjadi

$$\frac{d}{dt}v_{\dot{x}} = 0 \quad (5.16)$$

yakni $v_{\dot{x}}$ adalah konstan. Ini adalah persamaan diferensial order pertama yang tidak mengandung x . Solusinya adalah

$$\dot{x} = g(t, x) \quad (5.17)$$

di mana c adalah konstanta. Solusi terhadap persamaan terakhir ini diperoleh melalui pengintegrasian terhadap \dot{x} .

Jika v tergantung hanya pada \dot{x} , yakni $J = \int_0^T v(\dot{x}) dt$, maka persamaan Euler adalah

$$\frac{d}{dt}v_{\dot{x}} = v_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x} = 0 \quad (5.18)$$

yakni, apakah $\ddot{x} = 0$, dalam kasus mana $\dot{c} = c$ (c adalah konstanta) dan $x(t) = c_1t + c_2$, atau $v_{\dot{x}\dot{x}} = 0$. Jika $v_{\dot{x}\dot{x}}$ memiliki akar riil, yakni $\dot{x}(t) = c$, solusinya adalah

$$x(t) = c_3t + c_4 \quad (5.19)$$

Dalam kasus manapun, solusi terhadap Persamaan (5.18) adalah $x(t) = at + b$ di mana a, b, c, c_1, c_2, c_3 , dan c_4 adalah konstanta, yakni solusi terhadap persamaan Euler adalah suatu keluarga garis lurus.

Contoh 20. Dapatkan ekstrimal dari $\int_0^T (\dot{x}^2 \frac{t}{2} + t^2) dt$. Persamaan Euler memberikan $v_{\dot{x}} = c = t\dot{x}$ di mana c adalah suatu konstanta. Jadi, $\dot{x} = \frac{c}{t}$ yang solusinya diberikan melalui integrasi adalah $x(t) = c \ln(t) + b$, di mana b adalah konstanta, yang bersama dengan c ditentukan oleh kondisi awal. Catatan bahwa mengintegrasikan persamaan Euler $0 - \frac{d}{dt}(t\dot{x}) = -(\dot{x} + t\ddot{x}) = 0$ akan memberikan hasil yang sama, tetapi dengan cara yang lebih banyak memakan tenaga.

3. Fungsi v tidak tergantung pada t : $v(x, \dot{x})$

$$J(x) = \int_0^T v(x, \dot{x}) dt \quad (5.20)$$

Persamaan Euler memberikan

$$v_x - \frac{d}{dt}v_{\dot{x}} = v_x - v_{\dot{x}\dot{x}}\dot{x} - v_{\dot{x}x}\ddot{x} \quad (5.21)$$

yang setelah dikalikan dengan \dot{x} memberikan

$$v_x \dot{x} - v_{\dot{x}\dot{x}} \dot{x}^2 - v_{\dot{x}\ddot{x}} \dot{x} \ddot{x} \equiv \frac{d}{dt} (v - \dot{x} v_{\dot{x}}) = 0 \quad (5.22)$$

yang integral pertamanya adalah

$$v - \dot{x} v_{\dot{x}} = c \quad (5.23)$$

di mana c adalah sebuah konstanta.

Contoh 21. $\max \left\{ J(k) = \int_0^T u(c) dt \right\}$

di mana $u(c)$ adalah utilitas konsumsi per kapita c di mana $c = f(k) - \dot{k}$, dengan fungsi produksi $f(k)$ concave meningkat dari kapital per pekerja k dan \dot{k} adalah investasi per kapita. Integran $u(c) \equiv u[f(k) - \dot{k}]$ tidak melibatkan t secara explicit. Persamaan Euler memberikan

$$u(c) - \dot{k} \left(\frac{\partial u}{\partial k} \right) = a \quad (\text{konstan})$$

$$\dot{k} = \frac{[a - u(c)]}{u'(c)}$$

di mana $\frac{\partial u}{\partial k} = \frac{u'(c)}{-1}$

5.3 Generalisasi Persamaan Euler

?



Gambar 5.4: Admissible Comparison Control and Path

5.3.1 Kasus Beberapa Variabel

Jika $J(x) = \int_0^T v(t, x, \dot{x}) dt$ dimana $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ dan $\dot{x} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n)$

$$\begin{aligned} \delta J &= \int_0^T \left(\sum_{i=1}^n h_i v_{x_i} + \sum_{i=1}^n \dot{h}_i v_{\dot{x}_i} \right) dt = 0 \\ &= \int_0^T \left(v_{x_i} + \frac{d}{dt} v_{\dot{x}_i} \right) h_i dt = 0 \quad \forall h_i(t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

melalui integrasi bagian per bagian, dengan mengingat bahwa $h_i(0) = h_i(T) = 0$ for all i . Dengan Lemma fundamental serta karena i adalah sembarang, ini memberikan:

$$v_{x_i} - \frac{d}{dt} v_{\dot{x}_i} = 0 \quad \forall i \quad (5.25)$$

5.4 Syarat Harus & Syarat Cukup

5.4.1 Argumen Keharusan

Misalnya kita mengetahui bahwa $x^*(t)$ dan $u^*(t)$ optimal adalah ada dan bersifat interior bagi setiap t . Kita menggunakan pendekatan variasional untuk mendapatkan syarat harus bagi optimalitas.

Ambil sembarang fungsi kontinyu $z(t)$ dan misalnya

$$u(t, \varepsilon) = u^*(t) + \varepsilon z(t)$$

Untuk mendapatkan versi terganggu dari x , pecahkan persamaan diferensial berikut:

$$\dot{x}(t, \varepsilon) = f(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) \quad (5.26)$$

dengan kondisi awal $x(0, \varepsilon) = x(0)$. Untuk $|\varepsilon|$ yang cukup kecil kedua $u(t, \varepsilon)$ dan $x(t, \varepsilon)$ adalah di dalam U dan X .

Optimalitas berimplikasi bahwa

$$W(\varepsilon) \equiv \int_0^T v(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) dt \leq \int_0^T v(t, x^*(t), u^*(t)) dt = W(0)$$

untuk semua ε di sekitar 0, dan, misalnya, W adalah dapat diturunkan ini berarti

$$W'(0) = 0$$

Selanjutnya, (5.26) berimplikasi bahwa

$$W(\varepsilon) = \int_0^T v(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) dt + \int_0^T \lambda(t) [f(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) - \dot{x}(t, \varepsilon)] dt$$

untuk sembarang fungsi kontinyu $\lambda(t)$. Mengintegrasikan bagian per

bagian, ekspresi ini dapat ditulis ulang sebagai

$$W(\varepsilon) = \int_0^T [v(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) + \lambda(t)f(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))] dt + \\ -\lambda(T)x(T, \varepsilon) + \lambda(0)x(0, \varepsilon) + \int_0^T \dot{\lambda}(t)x(t, \varepsilon) dt$$

Misalnya kita dapat mendiferensiasi $x(t, \varepsilon)$ dan $u(t, \varepsilon)$, kita memiliki

$$W'(\varepsilon) = \int_0^T [v_u(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) + \lambda(t)f_x(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) + \dot{\lambda}(t)]x_\varepsilon(t, \varepsilon) dt \\ + \int_0^T [v_u(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon)) + \lambda(t)f_u(t, x(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon))]u_\varepsilon(t, \varepsilon) dt \\ -\lambda(T)x_\varepsilon(T, \varepsilon)$$

(dengan catatan $x(0, \varepsilon) = x(0)$). Sekarang kita akan memilih fungsi λ sehingga seluruh turunan $x_\varepsilon(t, \varepsilon)$ (yang sulit untuk dihitung karena mereka melibatkan persamaan diferensial (5.26)) habis.

Utamanya tetapkan $\lambda(T) = 0$ dan upayakan $\lambda(t)$ memecahkan persamaan diferensial

$$\dot{\lambda}(t) = -v_x(t, x^*, u^*) - \lambda(t)f_x(t, x^*(t), u^*(t))$$

Selanjutnya $u_\varepsilon(t, \varepsilon) = z(t)$ sehingga menyatukan berbagai hasil di atas kita mendapatkan

$$W'(0) = \int_0^T [v_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)f_u(t, x^*(t), u^*(t))]z(t) dt = 0$$

Mengingat hal ini harus berlaku untuk sembarang pilihan dari $z(t)$ maka hal ini berimplikasi bahwa syarat harus yang harus dipenuhi adalah

$$v_u(t, x^*(t), u^*(t)) + \lambda(t)f_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0$$

Kita dapat meringkas hasil ini yang mendefinisikan Hamiltonian

$$H(t, x(t), u(t), \lambda(t)) = v(t, x(t), u(t)) + \lambda(t)f(t, x(t), u(t))$$

dan kita mendapatkan:

Teorem 9. *Jika x^* dan u^* optimal, kontinyu, dan interior maka ada fungsi $\lambda(t)$ yang dapat diturunkan secara kontinyu sehingga*

$$\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda(t))}{\partial u} = 0 \quad (5.27)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda(t))}{\partial x} \quad (5.28)$$

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H(t, x^*, u^*, \lambda(t))}{\partial \lambda} \quad (5.29)$$

dan $\lambda(T) = 0$.

5.4.2 Argumen Kecukupan.

Sekarang misalnya kita telah memperoleh potensial solusi x^* dan u^* yang memenuhi (5.27)–(5.29) untuk fungsi kontinyu $\lambda(t)$. Kita hendak memeriksa apakah kondisi ini cukup bagi suatu optimum. Untuk alasan ini, kita memerlukan suatu asumsi concavity tambahan.

$$J(t, x(t), \lambda(t)) = \max_u \{H(t, x(t), u(t), \lambda(t))\} \quad (5.30)$$

Lihat ?

"Religion has not civilized man, man has civilized religion."

Robert Green Ingersoll

"It is the test of a good religion whether you can joke about it."

Gilbert K. Chesterton

"In the country of the blind the one-eyed man is king."

Erasmus

6

Pemograman Dinamis

Pemrograman dinamis adalah suatu pendekatan untuk mengatasi problem optimisasi, yang didasarkan pada prinsip optimalitas yang disampaikan oleh Bellman: *"An optimal policy has the property that whatever the initial state and initial decision are, the remaining decisions must constitute an optimal policy with regard to the state resulting from the first decision."*

Prinsip ini berlaku untuk banyak ragam sistem, yang evolusi deterministik atau stokastiknya dipengaruhi oleh state kini semata, bebas dari histori masa lalu, dan yang biaya fungsionalnya adalah aditif ter-

hadap horison waktu. Untuk setiap $0 < t < T$,

$$J(u) = \int_0^T v(t, x, u) dt = \int_0^t v(t, x, u) dt + \int_t^T v(t, x, u) dt$$

untuk kasus kontinyu dan bagi setiap $m, 0 < m < N - 1$

$$\sum_{t=0}^{N-1} v(t, x_t, u_t) = \sum_{t=0}^{m-1} v(t, x_t, u_t) + \sum_{t=m}^{N-1} v(t, x_t, u_t)$$

untuk problem diskrit.

Setelah memperhatikan bentuk di atas, prinsip Bellman dapat dinyatakan dalam bentuk lain yang setara, dengan memotong lintasan optimal menjadi dua bagian, lintasan awal dan lintasan akhir: "The second part of an optimal trajectory is an optimal trajectory, as well."

6.1 Konsep Fungsional

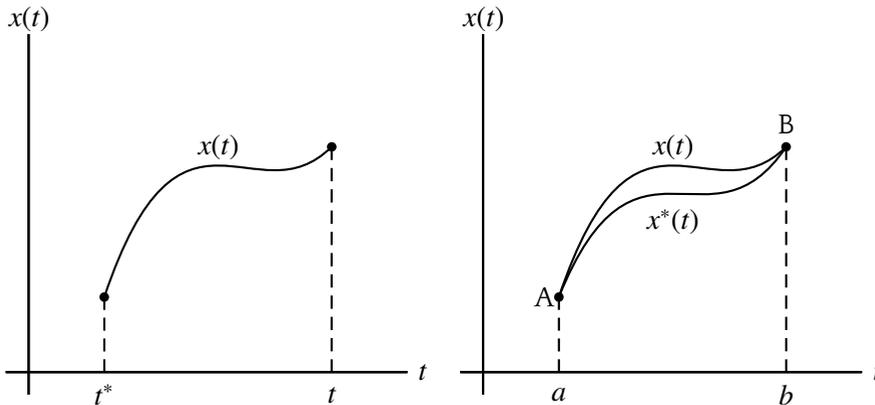
The relationship between paths and path values deserves our close attention, for it represents a special sort of mapping—not a mapping from real numbers to real numbers as in the usual function, but a mapping from paths (curves) to real numbers (performance indices). Let us think of the paths in question as time paths, and denote them by $yI(t)$, $yII(t)$, and so on. Then the mapping is as shown in Fig. 1.3, where VI, VII represent the associated path values. The general notation for the mapping should therefore be $V[y(t)]$. But it must be emphasized that this symbol fundamentally differs from the composite-function symbol $g[f(x)]$. In the latter, g is a function of f , and f is in turn a function of x ; thus, g is in the final analysis a function of x . In the symbol $V[y(t)]$, on the other hand, the $y(t)$ component comes as an integral unit—to in-

dicate time paths—and therefore we should not take V to be a function of t . Instead, V should be understood to be a function of “ $y(t)$ ” as such.

To make clear this difference, this type of mapping is given a distinct name: functional. To further avoid confusion, many writers omit the “(t)” part of the symbol, and write the functional as $V[y]$ or $V(y)$, thereby underscoring the fact that it is the change in the position of the entire y path—the variation in the y path—as against the change in t , that results in a change in path value V . The symbol we employ is $V[y]$. Note that when the symbol y is used to indicate a certain state, it is suffixed, and appears as, say, $y(0)$ for the initial state or $y(T)$ for the terminal state. In contrast, in the path connotation, the t in $y(t)$ is not assigned a specific value. In the following, when we want to stress the specific time interval involved in a path or a segment thereof, we shall use the notation $y[O, T]$ or $y[O, T]$. More often, however, we shall simply use the $y(t)$ symbol, or use the term “ y path”. The optimal time path is then denoted by $y^*(t)$, or the y^* path.

Argumen dari suatu fungsi adalah variabel, sementara argumen dari fungsional adalah fungsi. Sebagaimana suatu fungsi ditetapkan secara penuh bila variabel-variabelnya diberi nilai spesifik, suatu fungsional ditetapkan secara penuh oleh pilihan satu fungsi variabel tertentu dari set semua fungsi yang diperkenankan. Pertambahan argumen dari suatu fungsi adalah perbedaan $dt = t^* - t$, sementara variasi (δx) dari suatu fungsional adalah perbedaan $\delta x(t) = x^*(t) - x(t)$ antara dua fungsi dari kelas yang sama. Dalam studi suatu fungsi, seseorang berusaha mendapatkan titik-titik yang membuat suatu fungsi mencapai ekstrimum, sementara dalam kasus fungsional, seseorang tertarik mendapatkan fungsi yang **impart** suatu ekstrimum terhadap fungsio-

nal (Gambar 6.1).



Gambar 6.1: Perbandingan antara fungsi (kiri) dan fungsional (kanan)

6.2 Teorem Optimalitas Bellman

Prinsip dasar dari pemrograman dinamis, disebut prinsip optimalitas, dapat dinyatakan secara sederhana sebagai berikut. Suatu lintasan optimal memiliki sifat bahwa apapun kondisi dan nilai kontrol awal atas suatu periode awal, kontrol (atau variabel keputusan) atas periode tersisa harus optimal bagi problem sisa tersebut, dengan state hasil dari keputusan sebelumnya yang digunakan sebagai kondisi awal.

Fitur dasar yang mencirikan masalah pemrograman dinamis ini adalah sebagai berikut:

1. Masalah dapat dibagi menjadi tahap-tahap, dengan suatu keputusan strategi yang diperlukan pada setiap tahap.¹

¹Istilah strategi di sini digunakan untuk menggantikan kata policy yang umum digunakan dalam textbook. Hal ini dimaksudkan untuk menghindari kerancuan dengan policy sebagai hasil dari proses politik.

Problem pemrograman dinamis mensyaratkan pembuatan deret keputusan yang saling terkait, dimana setiap keputusan berhubungan dengan satu tahap dari masalah yang bersangkutan.

2. Setiap tahap mempunyai sejumlah state yang berkaitan dengan awal dari tahap tersebut. Secara umum, state adalah berbagai kondisi yang mungkin dimana sistem yang bersangkutan ada kemungkinan pada tahap problem tersebut. Jumlah state dapat berhingga maupun takberhingga.
3. Efek dari keputusan strategi pada setiap tahap adalah mentransformasi state berjalan ke suatu state yang berasosiasi dengan permulaan dari tahap selanjutnya (mungkin mengikuti suatu distribusi peluang). Dalam kebanyakan kasus, tujuan berkaitan dengan mendapatkan lintasan terpendek atau terpanjang melalui network.
4. Prosedur solusi adalah dirancang untuk mendapatkan suatu strategi optimal bagi keseluruhan problem, yakni, suatu resep keputusan kebijakan optimal pada setiap tahap bagi masing-masing state yang mungkin. Untuk sembarang problem, pemograman dinamis memberikan resep strategi tentang apa yang harus dilakukan untuk setiap kondisi yang mungkin.
5. Dengan state yang sedang berlangsung, suatu strategi optimal bagi tahap sisa adalah bebas dari keputusan strategi yang diadopsi dalam tahap sebelumnya. Dengan demikian, keputusan optimal berikutnya adalah tergantung hanya pada state berjalan dan tidak pada bagaimana kita sampai di sana. Ini adalah prinsip optimali-

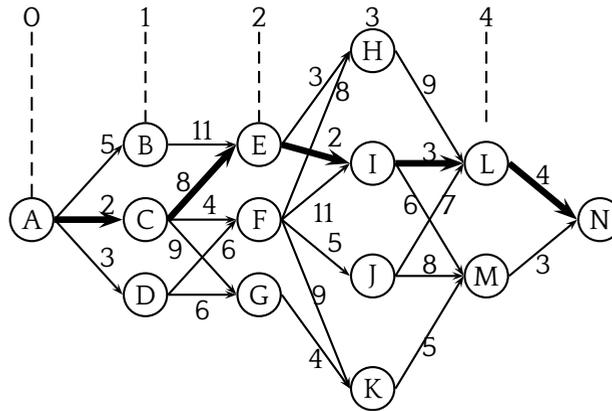
tas bagi pemrograman dinamis. Bagi problem pemrograman dinamis secara umum, pengetahuan tentang state berjalan membawa semua informasi tentang perilaku sebelumnya yang perlu bagi penentuan kebijakan optimal selanjutnya.

6. Prosedur solusi mulai dengan mendapatkan strategi optimal bagi tahap paling akhir. Strategi optimal bagi tahap paling akhir memberi resep keputusan strategi optimal bagi masing-masing dari state yang mungkin pada tahap tersebut. Solusi dari masalah satu tahap ini biasanya tidak penting.
7. Suatu hubungan rekursif yang mengidentifikasi strategi optimal untuk tahap t , bila strategi optimal untuk tahap $t + 1$, adalah tersedia.

6.2.1 Studi Contoh

Pemrograman dinamis merupakan suatu metoda untuk optimisasi atau representasi matematik dari sistem di mana seseorang bekerja melalui tahapan atau sekuen. Landasan dari metoda ini adalah teorem optimalitas yang dapat dibuktikan untuk banyak sekali kasus. Untuk memperkenalkan teorem ini, kita gunakan problem tahap ganda sebagai contoh. Gambar 6.2 memperlihatkan proses pengambilan keputusan.

Pada Tahap 0, mulai dengan titik A, seseorang dapat memilih B, C, atau D, sebagaimana diperlihatkan pada Tahap 1; demikian juga, pada Tahap 1 seseorang dapat memilih E, F, atau G, jika lintasan antara kedua tahap tersebut tersedia, dan selanjutnya melalui Tahap 3 dan 4, untuk akhirnya tiba pada N. Terhadap setiap keputusan yang mungkin diser-



Gambar 6.2: Lintasan Terpendek

takan biaya: sebagai contoh, untuk melintas dari C ke F memerlukan biaya 4; dari J ke M memerlukan biaya 8, dan seterusnya.

Setiap rute dari A ke N disebut strategi.² Jadi, (ADFILN) adalah suatu strategi. Suatu penggalan rute yang kontinu akan disebut substrategi. Sebagai contoh, (DFK), (CEIM), (HL), dan (CGKMN) adalah substrategi.

Dalam menghitung semua strategi yang mungkin seseorang memahami bahwa strategi (ACEILN) adalah strategi yang memiliki biaya total minimal, yakni 19. Jika seseorang hendak meminimumkan biaya, orang tersebut akan memilih strategi ini, yang akan disebut optimal. Mari kita lihat semua rute parsial atau substrategi dikandung dalam (ACEILN), yakni (ACEIL), (CEILN), (ACEI), (CEIL), (EILN), (ACE), (CEI), (EIL), (ILN), (AC), (CE), (EI), (IL), dan (LN). Bila kita perhatikan masing-masing dari substrategi kita dapat memverifikasi bahwa adalah optimal dari

²Sekali lagi, istilah asli yang banyak digunakan dalam textbook adalah policy.

titik dimana rute parsial berawal ke titik dimana rute parsial berakhir; sebagai contoh, dari C ke L lintasan optimal adalah (CEIL); dari A ke I, lintasan optimal adalah (ACEI); dari E ke L, lintasan optimalnya adalah (EIL) (Gambar 6.2).

Bagaimana pendekatan optimisasi dinamis bekerja, berikut alasannya. Kita tidak tahu apakah dari titik A harus menuju B, C, atau D, tetapi bila kita mengetahui tiga nilai tambahan - misalnya, total upaya yang dibutuhkan dari B ke N, C ke N, dan D ke N - kita dapat membuat pilihan terbaik pada titik A. Dengan mencatat upaya minimum dari B ke N dengan v_B , upaya minimum dari C ke N dengan v_C , dan upaya minimum dari D ke N dengan v_D . Sayangnya, nilai v_B , v_C , dan v_D belum diketahui. Tetapi, satu dari dua ide kunci pemrograman dinamis telah mulai tampak, yakni observasi bahwa hanya upaya terbaik sepanjang lintasan dari B, C, dan dari D ke N yang relevan bagi perhitungan di atas. Observasi ini sering disebut sebagai prinsip optimalitas dan dinyatakan sebagai berikut: "Lintasan terbaik dari A ke N memiliki sifat bahwa, apapun keputusan awal pada titik A, lintasan sisa menuju B, yang mulai dari titik berikutnya setelah A, haruslah lintasan terbaik dari titik tersebut menuju B."

Setelah mendefinisikan v_B , v_C , dan v_D di atas, kita dapat mensitir prinsip optimalitas sebagai justifikasi bagi formula berikut

$$v_A = \min \{5 + v_B, 2 + v_C, 3 + v_D\}$$

dimana v_A adalah upaya minimum untuk menempuh dari A ke N.

Sekarang untuk ide kunci kedua. Sementara tiga nilai v_B , v_C , dan v_D adalah tidak diketahui pada awalnya, kita dapat menghitungnya jika kita tahu nilai v_E , v_F , dan v_G , yakni

$$v_B = 11 + v_E$$

$$v_C = \min \{8 + v_E, 4 + v_F, 9 + v_G\}$$

$$v_D = \min \{6 + v_F, 6 + v_G\}$$

Seperti sebelumnya, v_E , v_G , dan v_H pada awalnya tidak diketahui, tetapi ketiganya dapat dihitung bila v_H , v_I , v_J , dan v_K tersedia. Keempat angka ini tergantung pada v_L dan v_M . Oleh karena itu, kita dapat menggunakan formula di atas untuk menghitung semua v jika kita tahu v_L dan v_M , yakni upaya minimum dari L dan dari M ke N. Dua angka terakhir ini adalah sederhana sekali, yakni 4 (v_L) dan 3 (v_M).

$$v_H = 9 + v_L = 13$$

$$v_I = \min \{3 + v_L, 6 + v_M\} = 7$$

$$v_J = \min \{7 + v_L, 8 + v_M\} = 11$$

$$v_K = 5 + v_M = 8$$

Dengan menggunakan hasil ini, kita dapat mundur selangkah untuk mendapatkan

$$v_E = \min \{3 + v_H, 2 + v_I\} = 9$$

$$v_F = \min \{8 + v_H, 11 + v_I, 5 + v_J, 9 + v_K\} = 16$$

$$v_G = 4 + v_K = 12$$

dan mundur selangkah lagi untuk mendapatkan

$$v_B = 20$$

$$v_C = 17$$

$$v_D = 18$$

akhirnya kita sampai pada tahap akhir dari langkah mundur dan memperoleh

$$v_A = 19$$

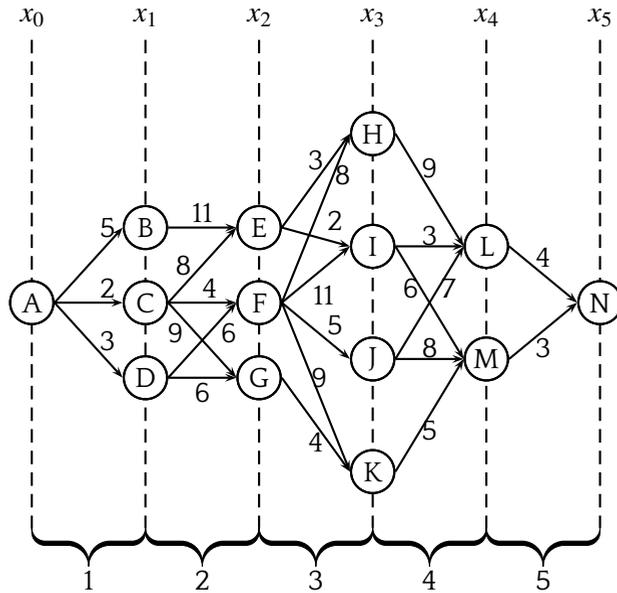
sebagai upaya minimal perpindahan dari titik A menuju ke titik N.

6.2.2 Teorem Optimalitas

Mari kita mulai dengan suatu sistem yang dapat mengalami perubahan state pada setiap tahap k sebagai hasil dari suatu keputusan dimana state yang mungkin dalam setiap tahap k ($k = 0, 1, 2, \dots, N$) adalah berhingga atau tidak berhingga dalam jumlah. Jika himpunan tersebut *denumerable*, istilah strategi diterapkan pada sekuen tertentu dari keputusan-keputusan dari $k = 0$ sampai $k = N$, dan istilah *substrategi* terhadap suatu sekuen dari keputusan-keputusan yang terkoneksi yang membentuk bagian dari suatu strategi. Dengan demikian jika seseorang memilih suatu fungsi kriteria yang berkaitan dengan perubahan state ini dan memutuskan untuk mengoptimalkan fungsi ini, teorem berikut berlaku

Teorem 10. *Suatu strategi optimal harus mengandung hanya substrategi-substrategi yang optimal*

Bukti. Mari kita perhatikan suatu substrategi yang diekstrak dari suatu strategi optimal. Jika substrategi seperti itu tidak optimal, maka akan ada suatu substrategi yang lebih baik yang, jika ditambahkan kepada posisi strategi yang tersisa, akan memperbaiki strategi tersisa tersebut, suatu deduksi yang berlawanan dengan hipotesis awal. \square



Gambar 6.3: Analisis Lintasan Terpendek

6.3 Model Diskrit

6.3.1 Horison Berhingga

Problem pemrograman dinamis berbentuk sebagai berikut

$$V(\mathbf{x}_0) = \max \left\{ \sum_{t=0}^T v(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t) \right\} \quad (6.1)$$

dengan kendala persamaan transisi:

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t), \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (6.2)$$

dan kondisi lain sebagai berikut:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}^0, \quad \mathbf{x}_t \in \mathfrak{R}^n, \quad \mathbf{u}_t \in U \subset \mathfrak{R}^u, \quad t = 0, \dots, T \quad (6.3)$$

$V(\mathbf{x}_0)$ disebut sebagai “fungsi nilai” dan menunjukkan nilai optimal dari fungsi tujuan bila state yang terjadi adalah \mathbf{x}_0 pada waktu nol. Di sini $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ dan \mathbf{x}^0 adalah suatu vektor tetap di dalam \mathfrak{R}^n , \mathbf{x}_t adalah vektor variabel state, dan \mathbf{u}_t adalah vektor variabel kontrol. Persamaan Bellman dari problem di atas adalah sebagai berikut:

$$V_t(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \{[v(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + V_{t+1}(\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}))]\} \quad (6.4)$$

Kondisi ini mengatakan bahwa pada sembarang waktu t kontrol optimal adalah kontrol yang memaksimalkan fungsi tujuan (suku pertama) ditambah nilai maksimum dari fungsi tujuan yang dimulai pada $t + 1$ dan seterusnya yang diberikan oleh fungsi nilai pada waktu $t + 1$. Prinsip optimalitas berimplikasi bahwa memaksimalkan persamaan ini pada sembarang waktu t memberikan ciri sepenuhnya lintasan kontrol optimal.

$$\frac{\partial v(t, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_{i,t}} + \frac{\partial V_{t+1}}{\partial x_{j,t+1}} \frac{\partial x_{j,t+1}}{\partial u_{i,t}} = 0 \quad (6.5)$$

6.3.1.1 Strategi Penyelesaian

Bagi fungsi nilai dimana pilihan adalah “mulus” - yakni kontrol adalah tidak terkendala, atau jika terkendala, kendala tersebut tidak pernah mengikat dan tidak mempengaruhi masalah, pendekatan berikut seringkali berguna:

1. Perhatikan problemnya, lalu putuskan mana yang variabel state dan mana yang variabel kontrol.
2. Tuliskan Persamaan Bellman (adalah baik menuliskannya sedemikian rupa sehingga kita memilih state periode yang akan da-

tang ketimbang kontrol saat ini).

3. Lakukan derivasi terhadap variabel pilihan (apakah variabel kontrol atau variabel state periode berikutnya yang tergantung pada bagaimana problem diformulasikan) dan dibuat sama dengan nol.
4. Lakukan derivasi V terhadap variabel state dan lakukan substitusi untuk menghilangkan suku yang mengandung V .

Di akhir beberapa langkah ini, kita harus mendapatkan Persamaan Euler yang tunduk pada interpretasi baku.

6.3.1.2 Contoh Aplikasi

Contoh 22 (Irigasi Tanaman). Seorang petani menanam tiga jenis tanaman musiman secara berturut-turut dalam satu tahun seluas 100 ha. Setiap jenis tanaman membutuhkan empat bulan, atau satu musim, untuk mencapai siap panen dari waktu tanam. Hasil dari setiap jenis tanaman (dalam ratusan ton per 100 ha) adalah sebagai berikut:

$$y_i = w_i - 0.1w_i^2 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (6.6)$$

dimana w_i adalah kedalaman air dalam cm yang diterima oleh tanaman yang ditanam dalam musim ke- i . Kedalaman air yang diterima adalah tergantung pada ketinggian dari air yang dilepaskan dari penyimpanan pada awal setiap musim (u_i dalam meter) dan curah hujan yang diterima selama musim tersebut (q_i dalam cm). Luas bendungan adalah 1 ha, sehingga

$$w_i = u_i + q_i \quad (6.7)$$

Bendungan adalah dalam keadaan penuh pada awal musim pertama dengan ketinggian air 3 m. Jumlah air yang dapat dilepaskan pada awal setiap musim adalah dibatasi pada nilai bulat dari ketinggian air, dan oleh jumlah yang tersimpan. Hujan meningkatkan air yang tersimpan di dalam bendungan. Daerah tangkapan adalah 100 ha, sehingga 1 cm curah hujan meningkatkan muka air dalam bendungan (x_i) sebesar 1 m, bila bendungan tersebut sedang tidak penuh.

Tujuan petani adalah memaksimumkan nilai kini dari penerimaan penjualan hasil tanaman dengan memilih nilai u_i yang bulat. Harga (dalam puluhan ribu rupiah per ton) yang diterima untuk tanaman musim ke- i adalah b_i . Problem ini dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\max_{\{u_i\}} \left\{ \sum_{i=1}^3 \beta^{i-1} b_i (w_i - 0.1w_i^2) \right\}$$

dengan kendala

$$0 \leq u_i \leq x_i \leq 3, \quad u_i, x_i \text{ bilangan bulat}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_{i+1} = \min \{ \{ \} x_i - u_i + q_i, 3 \}$$

dan dengan data

$$b = [50 \quad 100 \quad 150]$$

$$q = [2 \quad 1 \quad 1]$$

$$\beta = 0.95$$

Persamaan Bellman yang umum digunakan untuk memecahkan problem ini adalah

$$V_i(x_i) = \max_{\{0 \leq u_i \leq x_i\}} \left\{ [b_i(w_i - 0.1w_i^2) + \beta V_{i+1}(x_i - u_i + q_i)] \right\} \quad (6.8)$$

dengan

$$w_i = u_i + q_i$$

$$V_4(x_4) = 0$$

Periode terakhir adalah

$$V_3(x_3) = \max_{\{0 \leq u_3 \leq x_3\}} \{[150(w_3 - 0.1w_3^2)]\}$$

Dalam periode terakhir ini, seluruh cadangan air yang ada akan dimanfaatkan. Dengan kata lain, $u_3 = x_3$.

$$\begin{aligned} u_3 &= x_3 \\ &= x_2 - u_2 + 1 \\ &= x_1 - u_1 + 2 - u_2 + 1 \\ &= 3 - u_1 + 2 - u_2 + 1 \end{aligned}$$

Ciri alokasi u_i optimal adalah $u_1^* + u_2^* + u_3^* = 6$. Syarat keharusan bagi optimal adalah

$$b_i(1 - 0.2w_i) = \beta b_{i+1}(1 - 0.2w_{i+1}) \quad (6.9)$$

Untuk sementara syarat u_i dalam bilangan bulat dan kapasitas dam yang hanya mampu menampung tinggi air 3 m kita abaikan dahulu. Alokasi pelepasan air optimal yang diperoleh adalah $u = (0.362, 2.612, 3.026)$. Jadi ada kecenderungan untuk menunda pelepasan air ke musim tanam yang lebih akhir. Hal ini disebabkan oleh peningkatan harga yang jauh lebih tinggi dari tingkat diskon. Alokasi $u = (0.362, 2.612, 3.026)$ memenuhi Persamaan (6.9), dengan nilai marginal terdiskonto sebesar 2637.6 untuk masing-masing musim tanam, dan $\sum_{i=1}^3 u_i = 6$, tetapi melanggar syarat pelepasan air yang harus dalam bilangan bulat dan kapasitas dam.

Jika syarat kapasitas dam diberlakukan, maka tinggi air yang harus dilepaskan di musim pertama adalah diusahakan paling dekat dengan 0.362 tetapi sudah cukup untuk menghindari terjadinya pembuangan air secara percuma. Hasil yang diperoleh adalah 2 m, karena jika hanya 1 m air dam yang digunakan maka akan terjadi pembuangan air sebesar 1 m. Memanfaatkan air yang berpotensi terbang percuma ini selalu lebih baik selama $u_1 + q_1 \leq 5$. Lagi pula, memanfaatkan air yang berpotensi terbang percuma ini tidak mengganggu alokasi pelepasan air di musim tanam selanjutnya. Sisa tinggi air sebesar 4 m harus dialokasi untuk musim tanam 2 dan musim tanam 3. Sekali lagi kecenderungan menunda pelepasan air juga masih terjadi di musim tanam 2. Bila syarat bilangan bulat tidak diberlakukan, maka alokasi optimalnya adalah $u_2 = 1.649$ dan $u_3 = 2.351$ yang memenuhi Persamaan (6.9), yakni 4465.98.

Untuk periode ke-2, bilangan bulat yang memenuhi adalah 2 atau 3. Karena solusi optimal dalam bilangan riil adalah 2.612, maka peningkatan nilai produk marginal yang dihasilkan dari peningkatan irigasi dari 2.612 menjadi 3.000 adalah lebih kecil dibandingkan penurunan nilai produk marginal yang akan terjadi dalam periode 3. Oleh karena itu, memilih $u_2 = 2$ akan memberikan penerimaan terdiskonto total yang lebih tinggi. Akibatnya, $u_3 = 2$. Jadi, sekuen pelepasan air optimal adalah $u^* = (2, 2, 2)$, sedangkan sekuen tinggi air dalam dam optimal adalah $x^* = (3, 3, 2)$.

Dengan solusi yang diperoleh tersebut, maka kondisi (6.9) tidak terpenuhi. Kondisi ini dapat terpenuhi oleh solusi interior yang dalam kasus ini tidak dalam bilangan bulat. Hal semacam ini lazim dalam problem dengan solusi pojok. Kendala lain yang juga membuat kondisi

(6.9) tidak terpenuhi adalah kapasitas dam, yang merupakan kendala fisik. Meskipun demikian, kondisi (6.9) dapat digunakan sebagai panduan ke arah mana kita harus melakukan penyesuaian sehingga tujuan yang hendak dicapai dapat dihampiri sedekat mungkin, sementara kendala yang tidak mungkin dapat dilanggar masih dapat terpenuhi.

Contoh 23 (Konsumsi optimal).

$$\max \left\{ \sum_{t=1}^3 \ln(c_t) \right\}$$

dengan kendala

$$s_{t+1} = 1.1s_t - c_t$$

dan

$$s_1 = 1, \text{ dan } s_4 = 1.21$$

Di sini, c_t bertindak sebagai variabel kontrol, sedangkan s_t bertindak sebagai variabel state. Dalam notasi pemrograman dinamis, problem ini dapat ditulis sebagai berikut:

$$f(t, c_t, s_t) = \ln(c_t)$$

$$g(t, c_t, s_t) = 1.1s_t - c_t$$

$$V_t(s_t) = \max_{\{c_t\}} \left\{ \sum_{t=1}^3 \ln(c_t) \right\}$$

dengan $s_1 = 1$ dan $s_4 = 1.21$.

Problem ini dapat diselesaikan secara langsung (*direct attack*) maupun dengan menggunakan pendekatan pemrograman dinamis.

Direct attack. Pendekatan ini dilakukan dengan membentuk persamaan Lagrange sebagai berikut:

$$L = \sum_{t=1}^3 \ln(c_t) + \lambda_t[1.1s_t - c_t - s_{t+1}]$$

Syarat keharusan bagi optimalitas adalah

$$\frac{1}{c_t} = \lambda_t$$

dan

$$1.1\lambda_{t+1} = \lambda_t$$

Dari keduanya akan diperoleh

$$c_{t+1} = 1.1c_t$$

Iterasi kendala dan dengan menggunakan kondisi terminal $s_4 = 1.21$ akan diperoleh

$$1.21 = 1.1s_3 - c_3 = 1.1(1.1s_2 - c_2) - c_3 = 1.1(1.1(1.1s_1 - c_1) - c_2) - c_3$$

$$1.21 = 1.1^3s_1 - 1.1^2c_1 - 1.1c_2 - c_3 = 1.1^3s_1 - 3(1.1^2)c_1$$

Karena $s_1 = 1$, maka dengan mudah kita mendapatkan sekuen konsumsi optimal $c_1^* = 0.033$, $c_2^* = 0.037$, dan $c_3^* = 0.040$. Demikian pula, sekuen stok optimal dapat dihitung dengan mudah.

Pemrograman dinamis. Persamaan Bellman dari problem ini adalah sebagai berikut:

$$V_t(s_t) = \max_{\{c_t\}} \{\ln(c_t) + V_{t+1}(s_{t+1})\}$$

Kita mulai dengan periode terakhir, ketika kita memiliki:

$$V_3(s_3) = \max_{\{c_3\}} \{\ln(c_3)\}$$

dengan kendala $s_4 = 1.1s_3 - c_3$, s_3 tertentu, dan $s_4 = 1.21$. Karena hanya ada satu titik dalam set pilihan, maka kita harus memiliki:

$$c_3^* = 1.1s_3 - 1.21$$

Oleh karena itu, $V_3(s_3) = \ln((1.1s_3 - 1.21))$

Sekarang kita berurusan dengan satu periode sebelumnya

$$V_2(s_2) = \max_{\{c_2\}} \{\ln(c_2) + V_3(s_3)\}$$

dengan kendala

$$s_3 = 1.1s_2 - c_2, \quad s_2 \text{ tertentu}$$

Substitusi bagi V_3 diperoleh

$$\begin{aligned} V_2(s_2) &= \max_{\{c_2\}} \{\ln(c_2) + \ln(1.1s_3 - 1.21)\} \\ &= \max_{\{c_2\}} \{\ln(c_2) + \ln(1.1(1.1s_2 - c_2) - 1.21)\} \end{aligned}$$

FOC dari problem ini adalah

$$c_2^* = 0.55(s_2 - 1)$$

dan dengan substitusi akan diperoleh

$$V_2(s_2) = \ln(0.33275) + 2 \ln(s_2 - 1)$$

Berikutnya adalah

$$V_1(s_1) = \max_{\{c_1\}} \{\ln(c_1) + V_2(s_2)\}$$

dengan kendala

$$s_2 = 1.21s_1 - c_1, \quad s_2 \text{ tertentu}$$

Melalui substitusi bagi $V_2(s_2)$ dan s_2 dihasilkan

$$V_1(s_1) = \max_{\{c_1\}} \{ \ln((c_1)) + \ln(0.33275) + 2 \ln(1.21s_1 - c_1 - 1) \}$$

Kondisi optimalitas memberikan

$$c_1^* = \frac{1}{3}(1.1s_1 - 1)$$

Menggunakan $s_1 = 1$ dan ekspresi yang diperoleh tentang c_1^* , c_2^* , c_3^* , dan persamaan transisi, kita bekerja ke depan mengikuti waktu untuk mendapatkan solusi optimal $c_1^* = 0.0333$, $s_2^* = 1.0667$, $c_2^* = 0.0367$, $s_3^* = 1.1367$, dan $c_3^* = 0.0403$. Jadi, kita melihat bahwa metoda induksi mundur terdiri dari pemecahan periode terakhir lebih dahulu, memperlakukan nilai variabel state sebagai tetap dan bekerja mundur sampai periode pertama, bila kita mengetahui nilai dari variabel state. Kemudian kita mendapatkan solusi optimal dengan mengurut kembali langkah-langkah kita.

Cake eating direct attact vs pemrograman dinamis, lihat ?

6.3.2 Horison Takberhingga

Contoh 24 (Model Pertumbuhan Ekonomi). Dalam model ini, konsumen hendak memaksimumkan

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

dengan kendala

$$k_{t+1} = k_t(1 - \delta) + k_t^\alpha - c_t$$

Perhatikan notasi yang digunakan; $u(c_t)$ adalah fungsi utiliti yang ditentukan oleh konsumsi c_t (variabel kontrol). Adapun variabel state adalah k , yakni kapital.

Persamaan Bellman dari problem ini adalah

$$V(k_t) = \max_{\{c_t\}} \{u(c_t) + \beta V(k_{t+1})\} \quad (6.10)$$

Persamaan ini dapat diubah menjadi persamaan berikut dengan substitusi c_t :

$$V(k_t) = \max_{\{k_{t+1}\}} \{u(k_t(1 - \delta) + k_t^\alpha - k_{t+1}) + \beta V(k_{t+1})\} \quad (6.11)$$

Perhatikan bahwa variabel state menjadi variabel keputusan di sini. Syarat keharusan yang harus dipenuhi bagi maksimum adalah

$$-u'(c_t) + \beta \frac{\partial V}{\partial k_{t+1}} = 0 \quad (6.12)$$

dan derivatif dari fungsi nilai adalah

$$\frac{\partial V}{\partial k_t} = u'(c_t)[(1 - \delta) + \alpha k_t^{\alpha-1}] \quad (6.13)$$

Karena persamaan ini juga berlaku untuk waktu $t + 1$, maka suku yang mengandung V dapat dihilangkan untuk mendapatkan:

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[(1 - \delta) + \alpha k_{t+1}^{\alpha-1}] \quad (6.14)$$

yang tidak lebih dari persamaan Euler baku bagi model pertumbuhan ekonomi.

6.4 Model Kontinyu

6.4.1 Horison Berhingga

Aplikasi prinsip Bellman pada problem keputusan optimal mengarah kepada suatu persamaan penting, yang menyatakan syarat harus dan syarat cukup bagi optimalitas, yang diuraikan dalam Teorem 11 dan 12. Kita kembali kepada maksimisasi fungsional

$$J(u) = \int_0^T v(t, x, u) dt + \psi(x(T))$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, u) & 0 < t < T \\ x(0) &= x_0, T \text{ tertentu, } x(T) \text{ bebas} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Seperti biasanya, kita mengasumsikan bahwa fungsi v , f dan ψ adalah kontinyu dan dapat diturunkan terhadap argumen-argumennya. Klas $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{[0, T]}$ dari kontrol yang diperkenankan diberikan oleh fungsi

$$u : [0, T] \rightarrow U$$

kontinyu sepenggal (piecewise continuous) dalam $[0, T]$, dan dengan demikian problem Cauchy (6.15) mempunyai solusi dalam semua $[0, T]$.

Untuk mendapatkan kondisi optimalitas, kita menggunakan prinsip Bellman. Kita angkat lagi bahwa ide dasar dalam metoda ini adalah bahwa, apapun kondisi awal dan nilai kontrol optimal dalam interval awal $[0, t_0]$, lintasan sisanya adalah nilai optimal dari J terhadap kondisi awal $x(t_0) = x_0$, yakni

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &= \max_{u \in \mathcal{A}_{[0, T]}} \left\{ \int_{t_0}^T f(t, x, u) dt + \psi(x(T)) \right\} \\ &= \int_{t_0}^T f(t, x^*, u^*) dt + \psi(x^*(T)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

dengan dinamika yang sama $\dot{x} = f(t, x, u)$, dan dimana maksimumnya dicari di antara kontrol yang didefinisikan dalam $[t_0, T]$. Fungsi V disebut fungsi nilai (*value function*) dan ini didefinisikan bagi semua $t_0 \in [0, T]$ dan bagi sembarang state yang diperkenankan x_0 . Secara khusus

$$V(T, x(T)) = \psi(x(T)) \quad (6.17)$$

Teorem 11. *Jika V adalah dapat diturunkan terhadap x dan t , maka V memenuhi persamaan diferensial parsial berikut ini*

$$-V_t(t, x) = \max_{u \in U} \{v(t, x, u) + V_x(t, x)f(t, x, u)\} \quad (6.18)$$

dengan kondisi akhir Ekspresi (6.17).

Bukti. Ambil $h > 0$ yang cukup kecil. Kita bagi integral yang mendefinisikan V seperti berikut

$$\begin{aligned} V(t_0, x_0) &= \max_{u \in \mathcal{U}[0, T]} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, x, u) dt + \int_{t_0+h}^T f(t, x, u) dt + \psi(x(T)) \right\} \\ &= \int_{t_0}^{t_0+h} f(t, x^*, u^*) dt + \int_{t_0+h}^T f(t, x^*, u^*) dt + \psi(x^*(T)) \end{aligned}$$

Langkah krusial pertama. Dari prinsip Bellman kita menurunkan bahwa kontrol $u^*(t)$, untuk $t_0 + h \leq t \leq T$, haruslah optimal bagi problem dengan kondisi awal $x(t_0 + h) = x^*(t_0 + h)$. Jadi

$$\int_{t_0+h}^T v(t, x^*, u^*) dt + \psi(x^*(T)) = V(t_0 + h, x^*(t_0 + h))$$

dan

$$V(t_0, x_0) = \int_{t_0}^{t_0+h} v(t, x^*, u^*) dt + V(t_0 + h, x^*(t_0 + h)) \quad (6.19)$$

Langkah krusial kedua. Nilai $x^*(t_0+h)$ tergantung hanya pada nilai kontrol $u^*(t)$ semata dalam interval $t_0 \leq t \leq t_0+h$, melalui persamaan transisi. Jadi, setiap suku ruas kanan dari 6.19 tergantung hanya pada nilai-nilai u^* . Setiap kontrol u yang lain, didefinisikan bagi $t_0 \leq t \leq t_0+h$, menentukan nilai $x(t_0+h)$ dari lintasan yang berkaitan, melalui persamaan transisi. Kemudian, kita menghitung

$$\int_{t_0}^{t_0+h} v(t, x, u) dt + V(t_0+h, x(t_0+h)) \quad (6.20)$$

yang tidak dapat lebih besar dari $V(t_0, x_0)$, mengingat optimalitas dari u^* . Selanjutnya, pilihan $u(t)$ dalam $t_0 \leq t \leq t_0+h$ harus memaksimumkan (6.20). Hal ini berarti bahwa

$$V(t_0, x_0) = \max_{u \in \mathcal{A}_{[t_0, t_0+h]}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} v(t, x, u) dt + V(t_0+h, x(t_0+h)) \right\} \quad (6.21)$$

di mana maksimumnya dicari dengan u semata yang bervariasi dalam set $\mathcal{A}_{[t_0, t_0+h]}$ dari kontrol yang diperkenankan yang didefinisikan dalam $[t_0, t_0+h]$

$$u : [t_0, t_0+h] \rightarrow U$$

Karena V dapat diturunkan, kita dapat menuliskan

$$V(t_0+h, x(t_0+h)) = V(t_0, x_0) + V_t(t_0, x_0)h + V_x(t_0, x_0)(x(t_0+h) - x_0) + \Omega(h)$$

Mensubstitusikan ekspresi ini ke dalam (6.21), dan menyingkirkan suku $V(t_0, x_0)$, diperoleh

$$0 = \max_{\{u \in \mathcal{A}_{[t_0, t_0+h]}\}} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+h} v(t, x, u) dt + V_t(t_0, x_0)h + V_x(t_0, x_0)(x(t_0+h) - x_0) + \Omega(h) \right\}$$

Perhatikan sekarang bahwa jika kita memberi kesempatan $h \rightarrow 0$, pilihan bagi u dalam $\mathcal{A}_{[t_0, t_0+h]}$ direduksi menjadi pilihan u pada t_0 , yakni menjadi pilihan suatu titik di dalam U . Jadi membagi dengan h dan membuat h mendekati nol, kita mendapatkan

$$0 = \max_{\{u \in U\}} \{v(t_0, x(t_0), u) + V_t(t_0, x_0) + V_x(t_0, x_0)x'(t_0)\}$$

Sekarang kita mencari maksimum dari suatu fungsi riil pada set $U \subseteq \mathcal{R}$. Menggunakan dinamika yang bersangkutan, pada akhirnya kita mendapatkan

$$-V_t(t_0, x_0) = \max_{\{u \in U\}} \{v(t_0, x_0, u) + V_x(t_0, x_0)f(t_0, x_0, u)\}$$

yakni (6.18) pada titik (t_0, x_0) . □

Persamaan (6.18), yang dikenal sebagai persamaan Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB), adalah fundamental dalam pemrograman dinamis dan merupakan satu dari hasil utama dari teori pemrograman dinamis. Persamaan ini merupakan persamaan diferensial parsial, yang secara umum sulit dipecahkan bahkan untuk kasus fungsi v dan f yang sederhana. Catatan bahwa ekspresi yang hendak dimaksimumkan di ruas sebelah kanan dari (6.18) adalah mirip dengan Hamiltonian, dengan V_x menggantikan pengganda (λ). Sesungguhnya, karena pengganda λ merepresentasikan nilai marginal dari variabel state x , kita menyimpulkan bahwa

$$\lambda(t) = V_x(t, x(t))$$

Jadi, problem maksimum di ruas kanan dari (6.18) berimpit secara sempurna dengan prinsip maksimum dalam metoda variational. Memecahkan problem maksimum ini, kita mendapatkan suatu fungsi w yang

tergantung pada t dan x . Dari w kita mengkonstruksi lintasan dan kontrol optimal, sebagaimana diuraikan dalam teorem berikut ini.

Teorem 12. *Misalnya V adalah suatu solusi dari persamaan Bellman, dengan kondisi akhir (6.17). Asumailah bahwa V dapat diturunkan terhadap t dan x . Selanjutnya, katakanlah $w = w(t, x) : [0, T] \times \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ adalah fungsi kontinu piecewise terhadap t , dan dapat diturunkan dengan kontinuitas terhadap x , sehingga*

$$v(t, x, w(t, x)) + V_x(t, x)f(t, x, w(t, x)) = \max_{\{u \in Y\}} \{v(t, x, u) + V_x(t, x)f(t, x, u)\}$$

maka, w menentukan suatu kontrol optimal umpan balik, yaitu solusi dari problem

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x, w(t, x)), & t \in [0, T] \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (6.22)$$

adalah lintasan optimal bagi problem awal dan

$$u(t) = w(t, x(t))$$

adalah keputusan optimal.

Bukti. Misalnya \hat{u} adalah kontrol yang diperkenankan dan \hat{x} merupakan lintasan yang berkaitan, sehingga $\hat{x} = x_0$. Misalkan x^* adalah solusi dari (6.22) dan $u^*(t) = w(t, x^*(t))$. Kita harus menunjukkan bahwa

$$J(u^*) = \int_0^T v(t, x^*, u^*) dt + \psi(x^*(T)) \geq \int_0^T v(t, \hat{x}, \hat{u}) + \psi(\hat{x}(T)) = J(\hat{u})$$

Dari (6.18) kita mempunyai

$$\begin{aligned}
 V(T, x^*(T)) - V(0, x_0) &= \int_0^T \frac{d}{dt} V(t, x^*(t)) dt \\
 &= \int_0^T \left[V_t(t, x^*) + V_x(t, x^*) \frac{dx^*}{dt} \right] dt \\
 &= - \int_0^T v(t, x^*, u^*) dt
 \end{aligned} \tag{6.23}$$

Kalkulasi serupa membimbing kepada

$$\begin{aligned}
 V(T, \hat{x}(T)) - V(0, x_0) &= \int_0^T \frac{d}{dt} V(t, \hat{x}(t)) dt \\
 &= \int_0^T \left[V_t(t, \hat{x}) + V_x(t, \hat{x}) \frac{d\hat{x}}{dt} \right] dt \\
 &\leq - \int_0^T v(t, \hat{x}, \hat{u}) dt
 \end{aligned} \tag{6.24}$$

mengingat, dari (6.18), kita mempunyai

$$V_t(t, \hat{x}) + V_x(t, \hat{x}) \frac{d\hat{x}}{dt} + f(t, \hat{x}, \hat{u}) = V_t(t, \hat{x}) + V_x(t, \hat{x}) f(t, \hat{x}, \hat{u}) + v(t, \hat{x}, \hat{u}) \leq 0$$

Mengurangkan (6.24) dari (6.23) serta menggunakan kondisi akhir

$$\psi(x^*(T)) - \psi(\hat{x}(T)) \geq \int_0^T v(t, x^*, u^*) dt + \int_0^T v(t, \hat{x}, \hat{u}) dt$$

yang setara dengan

$$J(u^*) \geq J(\hat{u})$$

□

Prinsip optimalitas Bellman juga berlaku di sini. Akan ditunjukkan bahwa mitra waktu kontinyu dari persamaan berulang fungsional (6.4)

menghasilkan suatu persamaan yang disebut persamaan Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), sebagai alternatif dari metoda teori kontrol optimal untuk memecahkan kontrol waktu kontinyu. Disamping itu, persamaan HJB dapat digunakan untuk menderivasi secara heuristik versi dasar dari prinsip maksimum.

$$V(x(t), t) = \max \left\{ \int_t^T v(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau \right\} \quad (6.25)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} x(t) \text{ tertentu,} \quad x(T) = x_T \text{ tertentu} \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \end{aligned}$$

Berdasarkan (6.25) dan prinsip optimalitas bahwa

$$V(x(t), t) = \max_{\{u\}} \left\{ \int_t^{t+\delta t} v(x(\tau), u(\tau), \tau) d\tau + V(x(t + \delta t), t + \delta t) \right\} \quad (6.26)$$

Untuk δt yang cukup kecil, kita dapat menulis ulang (6.26) sebagai:

$$V(x(t), t) = \max_{\{u(t)\}} \{ [v(x(t), u(t), t)\delta t + V(x(t + \delta t), t + \delta t)] \} + \Omega(\delta) \quad (6.27)$$

dimana $\Omega(\delta t)$ adalah jumlah suku order lebih tinggi dalam δt dan memiliki sifat sebagai berikut:

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\Omega(\delta t)}{\delta t} = 0$$

dengan mengasumsikan bahwa V adalah dapat diturunkan secara kontinyu, kita dapat menuliskan

$$\begin{aligned} V(x(t + \delta t), t + \delta t) &= V(x(t), t) + V_x \delta x + V_t \delta t + \Omega(\delta t) \\ &= V(x(t), t) + [V_x \dot{x} + V_t] \delta t + \Omega(\delta t) \end{aligned}$$

Mensubstitusikan persamaan ini ke dalam (6.27)

$$V(x(t), t) = \max_{\{u(t)\}} \{v(x(t), u(t), t)\delta t + V(x(t), t) + V_x f(x(t), u(t), t)\delta t + V_t \delta t\} + \mathcal{O}(\delta t)$$

Mengeliminasi $V(x(t), t)$ pada kedua ruas, membagi persamaan yang dihasilkan dengan δt , dan mengambil limit $\delta t \rightarrow 0$:

$$0 = \max_{\{u(t)\}} \{[v(x(t), u(t), t) + V_x f(x(t), u(t), t) + V_t]\} \quad (6.28)$$

Jika kita definisikan Hamiltonian sebagai:

$$H(x, u, \theta, t) = v(x, u, t) + \theta f(x, u, t) \quad (6.29)$$

dimana $\theta = V_x(x, t)$, maka (6.28) dapat ditulis sebagai

$$-V_t = \max_{\{u(t)\}} \{H\} \quad (6.30)$$

Persamaan 6.28, atau 6.30, merupakan suatu persamaan diferensial karena persamaan ini mengandung derivatif partial dari V terhadap x dan t . Secara umum, tipe persamaan ini sulit dipecahkan, bahkan untuk kasus fungsi v dan f yang sederhana.

Untuk memberikan gambaran dan sekaligus apresiasi bagi persamaan HJB, kita akan menganalisis kembali konsumsi optimal yang pernah disampaikan sebelumnya.

$$V = \int_{t=0}^T \ln(u(t)) dt \quad (6.31)$$

$$\dot{x}(t) = -c(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) = x_T$$

V didefinisikan sebagai

$$V(x(t), t) = \max_{\{c(\tau)\}} \left\{ \int_t^T \ln(c(\tau)) \, d\tau \right\} \quad (6.32)$$

$$\dot{x}(\tau) = -c(\tau), \quad x(\tau) = x_t, \quad x(T) = x_T$$

Persamaan HJB adalah berbentuk

$$0 = \max_{\{c(t)\}} \{[\ln(c(t)) + (V_x(-c(t))) + V_t]\} \quad (6.33)$$

Syarat keharusan bagi optimal adalah $c^{-1} = V_x$, yang setelah disubstitusikan ke dalam Persamaan (6.33) menghasilkan

$$0 = -\ln(V_x) - 1 + V_t \quad (6.34)$$

Ini adalah persamaan diferensial yang solusinya akan menghasilkan fungsi $V(x_t, t)$ dan karenanya V_x dan u . Sayangnya, solusi analitik dari persamaan diferensial ini merupakan masalah yang pelik, dan kita tidak hendak memecahkannya. Sebagai gantinya, untuk menunjukkan bahwa Persamaan (6.34) benar-benar berlaku, kita akan lakukan derivasi Ekspresi (6.32) secara langsung dengan menggunakan teknik kontrol optimal.

Kita bentuk Hamiltonian $H(x, u, t) = \ln(u) - \theta u$ dan dengan prinsip maksimum akan diperoleh $c^{-1} = \theta$, $\dot{\theta} = 0$, dan $\dot{x} = -u$; oleh karena itu, $u(\tau) = A$, $x(\tau) = B - A\tau$, dan kondisi pembatas $x_t = B - At$ dan $x_T = B - AT$ akan menentukan konstanta

$$A = \frac{(x_t - x_T)}{(T - t)}$$

$$B = \frac{x_t T - x_T t}{(T - t)}$$

Akibatnya, fungsi manfaat dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} V(x_t, t) &= \int_t^T [\ln(x_t - x_T) - \ln(T - t)] d\tau \\ &= (T - t)[\ln(x_t - x_T) - \ln(T - t)] \end{aligned} \quad (6.35)$$

Sekarang menjadi jauh lebih mudah untuk memverifikasi bahwa

$$V_x = \frac{(T - t)}{(x_t - x_T)}, \quad V_t = 1 - \ln(x_t - x_T) + \ln(T - t)$$

benar-benar memenuhi persamaan diferensial partial (6.34). Keunggulan pemrograman dinamis dalam waktu diskrit terletak terutama dalam aplikasinya terhadap problem numerik, tetapi kegunaan dalam ekonomi analitik agak terbatas.

6.4.2 Horison Takberhingga

Problemnya adalah memaksimumkan

$$\int_0^{\infty} v(t, x(t), u(t)) dt$$

dengan kendala

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$$

kondisi awal $x(0) = x_0$ dan suatu kondisi terminal

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t)x(t) = 0$$

dimana $b(t)$ adalah fungsi tertentu $b : \mathcal{R}_+ \rightarrow \mathcal{R}_+$

Menuju ke horison takberhingga Prinsip Maximum masih dapat bekerja dengan baik, tetapi kita perlu menambah kondisi pada ∞ (untuk menggantikan $\lambda(T) = 0$ yang kita gunakan sebelumnya).

6.4.2.1 Argumen Kecukupan

Kita berjalan mundur dan mencari syarat cukup bagi suatu optimum. Misalnya kita memiliki calon lintasan $x^*(t)$ dan $u^*(t)$ yang memenuhi kondisi (5.27)-(5.29) bagi fungsi kontinu λ dan fungsi J yang didefinisikan dalam (5.30) adalah concave. Kita dapat membandingkan lintasan calon dengan sembarang lintasan fisibel lainnya sebagaimana dalam bukti Teorem 12, tetapi pada saat mengintegrasikan bagian per bagian dari

(?)

$$H_u(t, x^*(t), u^*(t)) = 0 \quad (6.36)$$

$$\dot{\lambda}(t) = -H_x(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \quad (6.37)$$

$$\dot{x}^*(t) = H_\lambda(t, x^*(t), u^*(t), \lambda(t)) \quad (6.38)$$

"The man who does not read books has no advantage over the man who cannot read them."

Mark Twain

"In old days men studied for the sake of self-improvement; nowadays men study in order to impress other people."

Confucius

"Poverty of goods is easily cured; poverty of the mind is irreparable."

Michel Eyquem de Montaigne

7

Prinsip Maksimum Pontryagin

Ingredien dasar pertama dari problem kontrol optimal adalah suatu sistem kontrol. Sistem ini membangkitkan perilaku yang mungkin. Sistem kontrol tersebut, dalam buku ini, dideskripsikan oleh persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equations*, ODE) dalam bentuk

$$\dot{x} = f(t, x, u), \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.1)$$

dimana x adalah state yang nilai-nilainya dalam \mathcal{R}^n , u adalah input kontrol yang nilai-nilainya dalam set kontrol $U \subset \mathcal{R}^m$, t adalah waktu, t_0 ada-

lah waktu awal,¹ dan x_0 adalah state awal. Kedua x dan u adalah fungsi dari t , tetapi kita akan sering tidak menuliskan argumen ini bila hal tersebut tidak menimbulkan kerancuan.

Ingredien dasar kedua adalah fungsional biaya (*cost functional*). Ini menghubungkan suatu biaya dengan setiap perilaku yang mungkin.

7.1 Model Kontinyu

Secara umum, model optimal control dapat diformulasikan sebagai berikut:

$$\max_{u(t)} \left\{ J = \int_0^T F(x, u) dt \right\}$$

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7.2}$$

kondisi pembatas atau kondisi transversalitas

dimana, state variable $x(t)$ dan control variable $u(t)$ keduanya merupakan fungsi waktu t . Control variable lazim juga disebut *decision variable* atau *instrument*.

7.2 Model Diskrit

Untuk banyak tujuan, adalah nyaman untuk mengasumsikan bahwa waktu direpresentasikan oleh suatu variabel diskrit, $t = 0, 1, 2, \dots, T$, ketimbang oleh variabel kontinyu $t \in [0, T]$. Hal ini lebih terasa bila kita hendak memecahkan problem teori kontrol besar dengan komputer.

¹Sebagai alternatif notasi t_0 , di beberapa tempat dalam buku ini waktu awal juga dinotasikan dengan $t = 0$.

Model diskrit juga lebih dipilih, bahkan untuk memecahkan masalah kecil yang memiliki persamaan diferensial state atau costate yang solusinya tidak dapat dinyatakan dalam bentuk tertutup, untuk memformulasikan problem tersebut sebagai problem diskrit. Kita akan melihat bahwa prinsip maksimum tidak valid untuk problem diskrit dalam pengertian yang luas sebagaimana problem waktu kontinyu. Kita akan mereduksinya menjadi problem pemrograman nonlinear and menyatakan syarat harus bagi solusinya dengan menggunakan apa yang dikenal sebagai teorem Kuhn-Tucker.

Untuk menyatakan problem kontrol optimal waktu diskrit untuk periode $0, 1, 2, \dots, T$, kita mengikuti definisi berikut: **a)** Θ adalah sebuah set $\{0, 1, 2, \dots, T - 1\}$, **b)** x_t adalah vektor kolom state yang terdiri dari n komponen, $t = 0, 1, \dots, T$, **c)** u_t adalah vektor kolom kontrol yang terdiri dari m komponen, $t = 0, 1, \dots, T - 1$, **d)** b_t adalah vektor kolom konstanta yang terdiri dari s komponen, $t = 0, 1, 2, \dots, T - 1$. Dalam problem ini, state x_t diasumsikan diukur pada awal dari periode t dan kontrol u_t dilaksanakan selama periode t . Didefinisikan juga fungsi yang dapat diturunkan secara kontinyu $f : E^n \times E^m \times \Theta \rightarrow E^n$, $F : E^n \times E^m \times \Theta \rightarrow E^1$, $g : E^m \times \Theta \rightarrow E^s$, dan $S : E^m \times \Theta \cup \{T\} \rightarrow E^1$.

Problem kontrol optimal waktu diskrit dalam bentuk Bolza² adalah

$$\max \left\{ J = \sum_{t=0}^{T-1} F(t, x_t, u_t) + S(T, x_T) \right\} \quad (7.3)$$

dengan kendala persamaan perbedaan

$$\Delta x_t = x_{t+1} - x_t = f(t, x_t, u_t), t = 0, 1, \dots, T - 1, x_0 \text{ tertentu} \quad (7.4)$$

$$g(t, u_t) \geq b_t, t = 0, 1, \dots, T - 1 \quad (7.5)$$

²Disebut bentuk Lagrange bila $S = 0$ dan disebut bentuk Mayer bila $F = 0$.

Dalam (7.4), suku $\Delta x_t = x_{t+1} - x_t$ dikenal sebagai operator perbedaan (*difference operator*).

Misalnya λ_{t+1} adalah vektor baris pengganda Lagrange yang terdiri dari n komponen, yang kita namai variabel costate atau adjoint dan yang kita asosiasikan dengan Persamaan (7.4). Selanjutnya, kita gunakan μ_t untuk mencatat vektor baris dari pengganda Lagrange yang terdiri dari s komponen yang diasosiasikan dengan kendala (7.5).

Fungsi Lagrange dari problem ini adalah

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} F(t, x_t, u_t) + S(T, x_T) + \sum_{t=0}^{T-1} \lambda_{t+1} [f(t, x_t, u_t) - x_{t+1} + x_t] + \sum_{t=0}^{T-1} \mu_t [g(t, u_t) - b_t] \quad (7.6)$$

Sekarang kita definisikan fungsi Hamiltonian H_t sebagai

$$H_t = H(t, x_t, u_t) = F(t, x_t, u_t) + \lambda_{t+1} f(t, x_t, u_t) \quad (7.7)$$

Menggunakan fungsi Hamiltonian ini, Fungsi (7.6) dapat ditulis ulang sebagai

$$L = S(T, X_T) + \sum_{t=0}^{T-1} [H_t - \lambda_{t+1}(x_{t+1} - x_t)] + \sum_{t=0}^{T-1} \mu_t [g(t, u_t) - b_t] \quad (7.8)$$

Jika kita turunkan (7.8) terhadap x_t untuk $t = 1, 2, \dots, T-1$,³ kita memperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial x_t} = \frac{\partial H_t}{\partial x_t} - \lambda_t + \lambda_{t+1} = 0$$

³Perhatikan bahwa $t = 0$ tidak tercakup dalam diferensiasi ini karena x_0 tidak dipilih, melainkan sudah tersedia secara eksogenus sebagai kondisi awal.

yang setelah diatur ulang akan diperoleh

$$\Delta\lambda_t = \lambda_{t+1} - \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t} \quad (7.9)$$

Jika kita menurunkan (7.8) terhadap x_T , kita mendapatkan

$$\frac{\partial L}{\partial x_T} = \frac{\partial S}{\partial x_T} - \lambda_T \rightarrow \lambda_T = \frac{\partial S}{\partial x_T} \quad (7.10)$$

Persamaan perbedaan (7.9) dengan kondisi batas terminal (7.10) disebut sebagai persamaan adjoin.

Jika kita menurunkan L terhadap u_t dan menyatakan kondisi Kuhn-Tucker bagi μ_t dan kendala (7.5), kita memperoleh

$$\frac{\partial L}{\partial u_t} = \frac{\partial H_t}{\partial u_t} + \mu_t \frac{\partial g}{\partial u_t} = 0 \rightarrow \frac{\partial H_t}{\partial u_t} = -\mu_t \frac{\partial g}{\partial u_t} \quad (7.11)$$

dan

$$\mu_t \geq 0, \quad u_t [g(t, u_t) - b_t] = 0 \quad (7.12)$$

Tampak bahwa, bila H_t adalah concave dalam u_t , $g(t, u_t)$ adalah concave dalam u_t , dan kualifikasi kendala berlaku, maka kondisi (7.11) dan (7.12) merupakan syarat harus dan cukup untuk memecahkan problem maksimisasi Hamiltonian berikut:

$$\begin{aligned} & \max_{u_t} \{H\}_t \\ & \text{dengan kendala} \\ & g(t, u_t) \geq b_t \end{aligned} \quad (7.13)$$

Jadi kita telah membeberkan bentuk terbatas berikut dari prinsip maksimisasi diskrit.

Teorem 13. *Jika untuk setiap t , H_t dalam (7.7) dan $g(t, u_t)$ adalah concave dalam u_t , dan kualifikasi kendala berlaku, maka syarat harus bagi u_t^* ,*

$t = 0, 1, \dots, T - 1$, agar sebagai kontrol optimal bagi problem (7.3)-(7.5) adalah

$$\begin{cases} \Delta x_t^* = f(t, x_t^*, u_t^*), x_0 \text{ tertentu,} \\ \Delta \lambda_t = -\frac{\partial H_t}{\partial x_t}[t, x_t^*, u_t^*, \lambda_{t+1}], \lambda_T = \frac{\partial S(T, x_T^*)}{\partial x_T}, \\ H_t(t, x_t^*, u_t^*, \lambda_{t+1}) \geq H_t(t, x_t^*, u_t, \lambda_{t+1}), \\ \text{untuk semua } u_t \text{ sehingga } g(t, u_t) \geq b_t, \quad t = 0, 1, \dots, T - 1 \end{cases} \quad (7.14)$$

Contoh 25. Dapatkan c_t yang memaksimumkan

$$\begin{aligned} V &= \sum_{t=1}^3 \ln(c)_t \\ s_{t+1} - s_t &= .1s_t - c_t, \quad t = 1, 2, 3, \\ s_1 &= 1, \quad s_4 = 1.21 \end{aligned}$$

Kita bentuk Hamiltonian sebagai berikut:

$$H = \ln(c)_t + \lambda_t[.1s_t - c_t]$$

Syarat keharusan bagi optimum adalah

$$\frac{\partial H}{\partial c_t} = \frac{1}{c_t} - \lambda_t = 0, \quad t = 1, 2, 3 \quad (7.15)$$

$$\frac{\partial H}{\partial s_t} + \lambda_{t+1} - \lambda_t = 0, \quad t = 2, 3 \quad (7.16)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda_{t+1}} + s_t - s_{t+1}, \quad t = 1, 2, 3 \quad (7.17)$$

Kita dapat menggunakan (7.15) untuk menghilangkan variabel costate untuk mendapatkan

$$c_t = 1.1c_{t-1}, \quad t = 2, 3 \quad (7.18)$$

Menggunakan (7.81), (7.82), dan kondisi awal, kita dapat bekerja secara recursive sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 s_2 &= (1.1)(1) - c_1 \\
 s_3 &= (1.1)s_2 - c_2 = 1.21 - (1.1)c_1 - (1.1)c_1 \\
 s_4 &= (1.1)s_3 - c_3 = 1.221 - 2(1.21)c_1 - (1.21)c_1 \\
 s_4 &= 1.331 - 3(1.21)c_1
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Untuk memenuhi kondisi terminal $s_4 = 1.21$ maka kita harus memilih $c_1 = 0.0333$. Mensubstitusikan ke dalam persamaan-persamaan di atas kita dapat dengan mudah mendapatkan semua nilai s_t , c_t , dan λ_t :

$$\begin{aligned}
 c_1 &= 0.0333, & c_2 &= 0.0367, & c_3 &= 0.0403 \\
 s_2 &= 1.0667, & s_3 &= 1.1367, & s_4 &= 1.21 \\
 \lambda_1 &= 30, & \lambda_2 &= 27.27, & \lambda_3 &= 24.79
 \end{aligned}$$

Adalah menarik untuk diperhatikan bahwa dalam Persamaan (7.19) kita mendapatkan hubungan antara nilai akhir dari variabel state dan nilai awal dari variabel kontrol, bila lintasan optimal diikuti. Oleh karena itu, ada lintasan optimal berbeda bagi setiap kondisi akhir. Perlu pula dicatat bahwa bagi beberapa kondisi akhir mungkin saja tidak ada solusi yang fisibel.

Dari contoh tersebut, prosedur yang ditempuh untuk memecahkan problem yang dihadapi terdiri dari beberapa langkah sebagai berikut: (1) mengeliminasi satu dari beberapa variabel (dalam hal ini variabel costate), (2) memecahkan dua persamaan perbedaan (satu untuk variabel state dan satu untuk variabel kontrol), (3) memanfaatkan kondisi pembatas untuk menentukan nilai awal dari variabel kontrol,

(4) mensubstitusikan nilai ini dalam solusi persamaan perbedaan dan syarat keharusan untuk mendapatkan nilai optimal dari semua variabel.

7.3 Variabel Kontrol Diskontinyu

Syarat kontinuitas atas variabel kontrol dapat dikendurkan. Kontrol yang diijinkan adalah fungsi waktu yang kontinu bagian per bagian. Ini berarti bahwa variabel kontrol tersebut akan kontinu, kecuali mungkin pada beberapa titik waktu. Setiap diskontinuitas melibatkan lompatan terhingga. Variabel state x , fungsi pengganda λ , dan Hamiltonian harus tetap kontinu, terlepas dari diskontinuitas dalam variabel kontrol.

Perhatikan, jika solusi terhadap

$$\max \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \right\}$$

mempunyai ciri pojok (bukan interior), fungsi

$$F_{\dot{x}} \quad \text{dan} \quad F - \dot{x}F_{\dot{x}}$$

bagaimanapun harus kontinu. Untuk melihat apa maksudnya dalam formal kontrol optimal, kita tulis kembali problem tersebut menjadi

$$\max \left\{ \int_{t_0}^{t_1} F(t, x, \dot{x}) dt \right\}$$

dengan kendala

$$\dot{x} = u$$

Hamiltonian adalah

$$H = F + \theta u$$

Kemudian

$$H_u = F_u + \theta = 0, \quad \text{sehingga} \quad \theta = -F_{\dot{x}}$$

Jadi kontinuitas dari θ seluruhnya menyerupai kontinuitas dari $F_{\dot{x}}$. Selanjutnya, karena $\dot{x} = u$ maka mensubstitusikan ekspresi ini bagi θ ke dalam H memberikan

$$H = F - \dot{x}F_{\dot{x}}$$

Jadi, kontinuitas H beriringan dengan kondisi korner kedua.

Solusi terhadap suatu problem yang linear in dalam u sering melibatkan diskontinuitas dalam kontrol. Periksa

$$\max \left\{ \int_{t_1}^{t_2} [F(t, x) + uf(t, x)] dt \right\} \quad (7.20)$$

dengan kendala

$$\dot{x} = G(t, x) + ug(t, x) \quad (7.21)$$

$$x(0) = x_0 \quad (7.22)$$

$$a \leq u \leq b \quad (7.23)$$

Hamiltonian adalah

$$\begin{aligned} H &= F(t, x) + uf(t, x) + \theta G(t, x) + \theta ug(t, x) \\ &= F + \theta G + (f + \theta g)u \end{aligned} \quad (7.24)$$

Syarat keharusan mencakup

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad (7.25)$$

$$u = \begin{Bmatrix} a \\ ? \\ b \end{Bmatrix} \quad \text{bila} \quad f + \theta g \begin{Bmatrix} < \\ = \\ > \end{Bmatrix} 0 \quad (7.26)$$

Jika $f + \theta g = 0$ tidak dapat dipertahankan atas suatu interval waktu, maka kontrol adalah “bang bang”; kontrol pada minimum levelnya bila koefisien dalam H adalah negatif dan pada maksimum levelnya bila koefisien dalam H adalah positif. Sebagai alternatif, kita dapat menulis Lagrangean:

$$L = H + w_1(u - a) + w_2(b - u)$$

dengan syarat keharusan (7.25) dan

$$\begin{aligned} L_u = f + \theta g + w_1 - w_2 = 0, & \quad w_1 \geq 0, & \quad w_1(u - a) = 0 \\ & \quad w_2 \geq 0, & \quad w_2(b - u) = 0 \end{aligned} \quad (7.26a)$$

Tentu saja, kondisi (7.26) dan (7.26a) merupakan dua kondisi yang ekuivalen.

Contoh 26. *Dapatkan kontrol optimal yang akan memaksimumkan*

$$V = \int_0^2 (2x - 3u) dt$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x + u \\ x(0) &= 4, \quad x(2) \text{ bebas} \\ u(t) &\in [0, 2] \end{aligned}$$

Karena problem ini dicirikan oleh linearitas dalam u dan suatu set kontrol tertutup, we boleh berharap solusi batas akan terjadi.

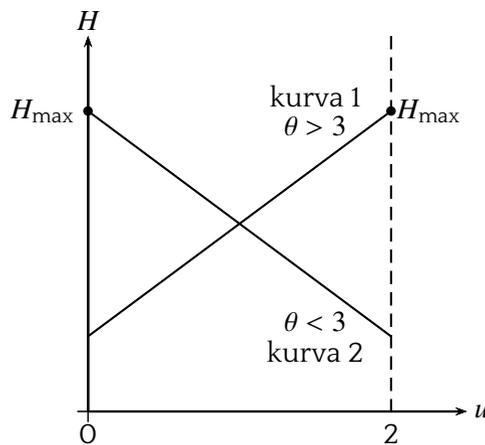
Langkah 1: *Hamiltonian dari problem*

$$H = 2x - 3u + \theta(x + u) = (2 + \theta)x + (\theta - 3)u \quad (7.27)$$

adalah linear dalam u , dengan kemiringan $\frac{\partial H}{\partial u} = \theta - 3$. Pada titik waktu tertentu, kita mendapati $\theta > 3$, maka kurva berkemiringan naik seperti kurva 1 dalam Gambar 7.1 akan berlangsung: untuk memaksimumkan H , kita harus memilih $u^* = 2$. Sebaliknya, jika $\theta < 3$, maka kurva 2 akan berlangsung, dan kita harus memilih $u^* = 0$. Pendeknya,

$$u^* = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases} \quad \text{jika} \quad \theta \begin{cases} > \\ < \end{cases} 3 \quad (7.28)$$

Kedua $u^* = 2$ dan $u^* = 0$ adalah solusi batas. Perlu dicatat bahwa, karena H adalah linear dalam u , syarat keharusan biasa $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ tidak dapat digunakan dalam mencari u^* .



Gambar 7.1: Lintasan variabel costate

Langkah 2: Menentukan $\theta(t)$. Dari persamaan gerak bagi θ , kita mempunyai persamaan diferensial

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2 - \theta \quad \text{atau} \quad \dot{\theta} + \theta = -2$$

Solusi umumnya adalah

$$\theta(t) = ke^{-t} - 2 \quad (k \text{ konstanta})$$

Dengan menggunakan kondisi terminal $\theta(T) = \theta(2) = 0$, maka konstan k dapat ditetapkan sebagai $k = 2e^2$, sehingga solusi tetapnya menjadi

$$\theta^*(t) = 2e^{2-t} - 2 \quad (7.29)$$

Perlu dicatat bahwa $\theta^*(t)$ adalah suatu fungsi menurun dalam t , menurun secara terus menerus dari nilai awal $\theta^*(0) = 2e^2 - 2 = 12.778$ menjadi nilai akhir $\theta^*(2) = 2 - 2 = 0$. Jadi, awalnya θ^* melebihi 3, tetapi pada akhirnya menurun di bawah 3. Titik waktu kritis, ketika $\theta^* = 3$ dan ketika kontrol optimal harus diubah dari $u^* = 2$ menjadi $u^* = 0$, dapat diperoleh dengan menetapkan $\theta^* = 3$ dalam Persamaan (7.29) dan memecahkan untuk mendapatkan t . Bila t kritikal tersebut dicatat dengan t_c , maka kita mempunyai

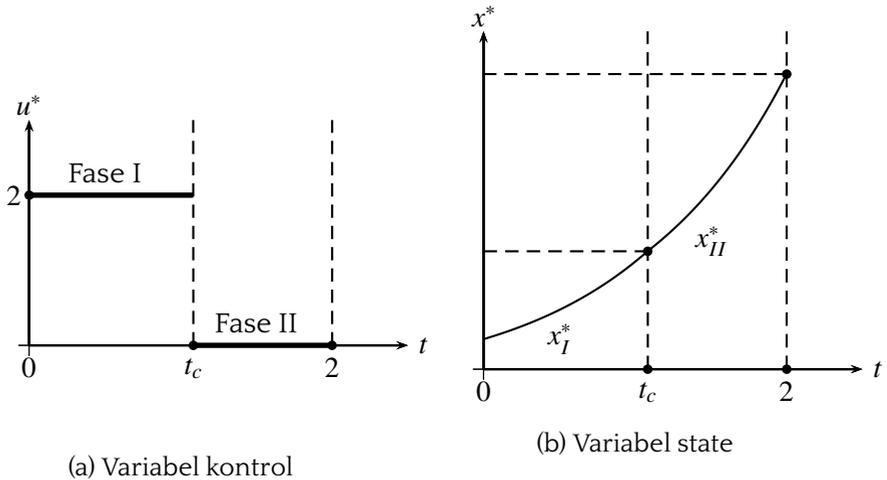
$$t_c = 2 - \ln(2.5) = 1.084 \quad (7.30)$$

Konsekuensinya, kontrol optimal dalam (7.28) dapat dinyatakan kembali dengan lebih spesifik dalam dua fase:

$$\text{Fase I:} \quad u_I^* = u^*[0, t_c] = 2 \quad (7.31)$$

$$\text{Fase II:} \quad u_{II}^* = u^*[t_c, 2] = 0$$

Sebagaimana diperlihatkan dalam Gambar ??, kontrol optimal ini merepresentasikan suatu jenis bang-bang sederhana.



Gambar 7.2: Lintasan variabel kontrol dan variabel state optimal

Langkah 3: Meskipun hanya menanyakan lintasan kontrol optimal, kita dapat juga mendapatkan lintasan state optimal dalam dua fase. Dalam fase I, persamaan gerak x adalah $\dot{x} = x + u = x + 2$, atau

$$\dot{x} - x = 2 \quad \text{dengan nilai awal } x(0) = 4$$

Solusinya adalah

$$x_I^* = 2(3e^t - 1), \quad t \in [0, t_c] \quad (7.32)$$

Dalam fase II, persamaan gerak bagi x adalah $\dot{x} = x + 0$ atau $\dot{x} - x = 0$ dengan solusi umum

$$x_{II}^* = ce^t, \quad t \in [t_c, 2] \quad c \text{ konstanta} \quad (7.33)$$

Perlu dicatat bahwa konstanta c tidak dapat ditetapkan dengan kondisi awal $x(0) = 4$ yang diberikan dalam (7.27) karena kita telah dalam

fase II, di luar $t = 0$. Atau konstanta c tidak dapat juga ditentukan dengan kondisi terminal karena state terminal adalah bebas. Tetapi, pembaca ingat bahwa lintasan x optimal dipersyaratkan kontinyu, sebagaimana terlihat dalam Gambar 7.2b. Akibatnya, nilai awal x_{II}^* harus sama dengan nilai x_I^* yang dievaluasi pada t_c . Karena kita mempunyai

$$x_I^* = 2(3e^{t_c} - 1) \quad (7.34)$$

dan

$$x_{II}^* = ce^{t_c} \quad (7.35)$$

maka dengan menyamakan keduanya dan dipecahkan untuk c kita mendapatkan bahwa $c = 2(3 - e^{-t_c})$ sehingga lintasan x optimal dalam fase II adalah

$$x_{II}^* = 2(3 - e^{-t_c})e^t = 5.324e^t \quad (7.36)$$

Nilai dari x^* pada waktu perubahan t_c mendekati $2(3e^{1.096} - 1) = 15.739$.

Dengan menggabungkan dua lintasan x_I^* dan x_{II}^* , kita mendapatkan lintasan x^* lengkap untuk interval waktu $[0, 2]$, sebagaimana diperlihatkan pada Gambar 7.2b. Dalam contoh khusus ini, lintasan gabungan terjadi menyerupai satu kurva eksponensial tunggal, tetapi dua segmen merupakan bagian-bagian dari dua fungsi eksponensial yang terpisah.

Contoh 27 (Reinvestasi). Suatu barang yang diproduksi pada laju $x(t)$ dapat direinvestasikan untuk perluasan kapasitas produktif atau dijual. Kapasitas produktif tumbuh pada laju reinvestasi. Berapa fraksi $u(t)$ dari output pada waktu t harus direinvestasikan untuk memaksimalkan penjualan selama periode tetap $[0, T]$? Kapasitas awal adalah c .

Dengan definisi yang diberikan tersebut, kita berusaha untuk

$$\max \left\{ \int_0^T [1 - u(t)]x(t) dt \right\} \quad (7.37)$$

dengan kendala

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u(t)x(t) \\ x(0) &= c > 0 \\ 0 &\leq u(t) \leq 1 \end{aligned} \quad (7.38)$$

Lagrangean

$$L = (1 - u)x + \theta ux + w_1(1 - u) + w_2u$$

Solusi optimal harus memenuhi

$$L_u = x(\theta - 1) + w_2 - w_1 = 0 \quad (7.39)$$

$$w_1 \geq 0, \quad w_2 \geq 0, \quad w_1(1 - u) = 0, \quad w_2u = 0 \quad (7.40)$$

$$\dot{\theta} = -L_x = u - 1 - u\theta \quad (7.41)$$

$$\theta(T) = 0 \quad (7.42)$$

Karena $x(0) > 0$ dan $\dot{x} \geq 0$, $x > 0$ seluruhnya; oleh karena itu, dari 7.39-7.42

$$\begin{aligned} \text{Salah satu} \quad & \theta > 1 \text{ dan } u = 1, \quad \text{sehingga} \quad \dot{\theta} = -\theta \\ \text{atau} \quad & \theta < 1 \text{ dan } u = 0, \quad \text{sehingga} \quad \dot{\theta} = -1 \end{aligned} \quad (7.43)$$

Ini berarti θ adalah menurun sepanjang $0 \leq t \leq T$. Selanjutnya, dengan (7.40), θ adalah nol pada T . Jadi, terdapat suatu interval final $t^* \leq t \leq T$ yang selama itu $\theta < 1$, $u = 0$, $\dot{\theta} = -1$, dan kemudian $\dot{x} = 0$. Oleh

karena itu,

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 0, \\ \theta(t) &= T - t, \\ x(t) &= x(t^*), \end{aligned} \right\} t^* \leq t \leq T \quad (7.44)$$

Waktu t^* adalah sedemikian rupa sehingga $\theta(t^*) = 1$; yakni,

$$t^* = T - 1 \quad (7.45)$$

bila $T \geq 1$. Jika $T \leq 1$, maka solusinya diberikan oleh (7.44) dengan $t^* = 0$.

Jika $T > 1$, maka ada interval awal $0 \leq t \leq T - 1$ yang selama itu $\theta > 1$, $u = 1$, $\dot{\theta} = -\theta$, $\dot{x} = x$. Menggunakan $x(0) = c$ dan kontinuitas dari x dan θ pada $t^* = T - 1$ menghasilkan

$$\left. \begin{aligned} u(t) &= 1, \\ \theta(t) &= e^{(T-t-1)}, \\ x(t) &= ce^t, \end{aligned} \right\} 0 \leq t \leq T - 1 \quad (7.46)$$

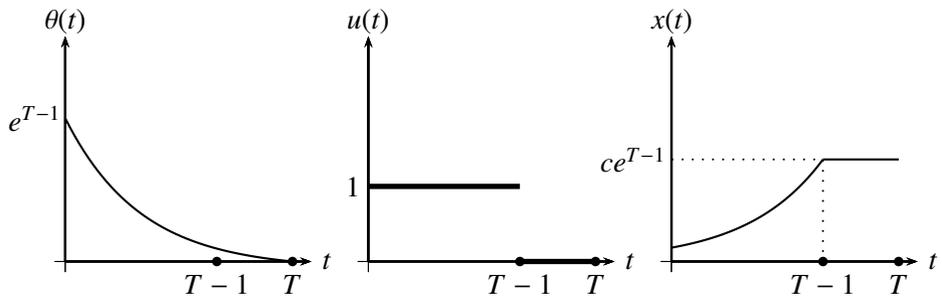
Nilai dari w_1 dan w_2 diperoleh dari (7.39) dan (7.40), dengan menggunakan (7.44)-(7.46). Jika $T \leq 1$, maka

$$w_1(t) = 0, \quad w_2(t) = c(1 - T + t), \quad 0 \leq t \leq T - 1 \quad (7.47)$$

Jika $T > 1$, maka

$$w_1(t) = \begin{cases} ce^t[e^{(T-t-1)} - 1], & 0 \leq t \leq T - 1, \\ 0, & T - 1 \leq t \leq T; \end{cases} \quad (7.48)$$

$$w_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq T - 1, \\ c(1 - T + t)e^{(T-1)}, & T - 1 \leq t \leq T. \end{cases}$$



Gambar 7.3: a

Fungsi-fungsi ini memenuhi syarat nonnegativitas. Dalam problem ini, fungsi-fungsi tersebut ternyata kontinu tetapi sebenarnya kontinuitas dari w_1 tidak disyaratkan.

Jika horison perencanaan adalah pendek, maka akan optimal untuk menjual seluruh output. Lain dari itu, adalah optimal untuk melakukan reinvestasi semua output hingga $t = T - 1$, mengembangkan kapasitas dengan laju maksimum, dan setelah itu menjual semua output (lihat Gambar 7.3).

7.4 Kondisi Transversalitas atau Kondisi Terminal

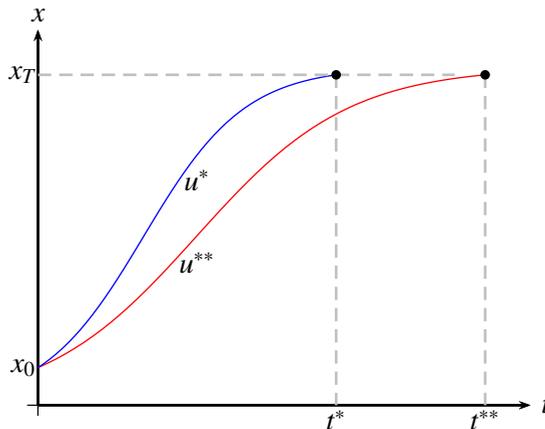
7.4.1 Titik Akhir Pasti

Dalam kasus ini kedua $x(T)$ dan T adalah tertentu. Situasi ini terjadi dalam pengelolaan aset yang pada akhir dari jangka waktu yang diberikan nilai aset harus mencapai level tertentu. Contohnya, penyewaan mobil mengharuskan kepada penyewa untuk mengisi tanki dengan 10 liter bahan bakar pada akhir masa sewa yang telah disepakati, misalnya dua hari. Jadi, $T = 2$ dan $x(2) = 10$. Kondisi terminal otomatis terpenuhi

ketika kendala yang disepakati dalam perjanjian dipenuhi.

$$\begin{aligned} \max_{u(t)} \left\{ J = \int_0^T F(x, u) dt \right\} \\ \dot{x} = f(x, u) \\ x(0) = x_0 \quad \text{dan} \quad x(T) = x_T \end{aligned} \quad (7.49)$$

Situasi di atas ditampilkan pada Gambar 7.4. Lintasan u^* dan u^{**} merupakan solusi terhadap persamaan diferensial $\dot{x} = f(x, u)$. Masalahnya adalah memilih satu lintasan yang memaksimalkan J dan yang memenuhi kondisi terminal $x(t^*) = x^T$ dan $x(t^{**}) = x^T$ dengan kondisi awal x_0 . Bila lintasan optimal $u(t)$ dapat ditemukan, maka lintasan optimal $x(t)$ dapat dihitung.



Gambar 7.4: Dua lintasan control variable akibat dari perbedaan horizon waktu

Mari kita mulai dengan membentuk fungsi Lagrange sebagai beri-

kut:

$$L = \int_0^T [F(x, u) + \theta(f(x, u) - \dot{x})] dt \quad (7.50)$$

dimana θ adalah pengganda Lagrange yang disebut juga sebagai *costate variable* atau *adjoint variable*.

Jika Fungsi Hamiltonian didefinisikan sebagai

$$H(x, u) = F(x, u) + \theta f(x, u) \quad (7.51)$$

maka Fungsi Lagrange dapat ditulis kembali sebagai

$$L = \int_0^T [H(x, u) - \theta \dot{x}] dt \quad (7.52)$$

Melalui teknik integrasi bagian per bagian (integration by parts) diperoleh

$$- \int_0^T \theta \dot{x} dt = -[x(T)\theta(T) - x(0)\theta(0)] + \int_0^T \dot{\theta} x dt \quad (7.53)$$

Dengan hasil ini, maka Fungsi Lagrange dapat ditulis menjadi

$$L = \int_0^T [H(x, u) + \dot{\theta} x] dt - [x(T)\theta(T) - x(0)\theta(0)] \quad (7.54)$$

Perhatikan apa yang terjadi pada *state variable* bila *control variable* berubah, yakni dari $u(t)$ menjadi $u(t) + \Delta u(t)$ dengan akibat berubahnya *state trajectory* dari $x(t)$ ke $x(t) + \Delta x(t)$. Maka perubahan Fungsi Lagrange, ΔL , adalah

$$\begin{aligned} \Delta L &= \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial u} du + \dot{\theta} dx \right] dt - \theta(T) dx_T \\ &= \int_0^T \left[\frac{\partial H}{\partial u} du + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{\theta} \right) dx \right] dt - \theta(T) dx_T \end{aligned} \quad (7.55)$$

Bagi suatu maksimum maka $\Delta L = 0$. Ini berarti syarat keharusan:

1. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad 0 \leq t \leq T$
2. $\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad 0 \leq t \leq T$
3. $\theta(T) = 0$ (atau $x(T) = x_T$ jika x_T diketahui)

Syarat (1) menyatakan bahwa Fungsi Hamiltonian dimaksimumkan oleh pilihan *control variable* pada setiap titik sepanjang lintasan optimal - diasumsikan ada solusi interior dan tidak ada kendala terhadap *control variable*. Syarat (2) menyatakan bahwa laju perubahan *costate variable* adalah sama dengan negatif dari perubahan Fungsi Hamiltonian akibat dari perubahan *state variable*. Syarat (3) mengacu kepada *costate variable* pada *terminal state*, dan menunjukkan bahwa *costate variable* tersebut nol; atau jika nilai terminalnya $x(T) = x_T$ tertentu maka $dx_T = 0$.

Dari definisi Fungsi Hamiltonian, persamaan diferensial bagi *state variable* dapat dinyatakan dalam Fungsi Hamiltonian sebagai:

$$\dot{x} = f(x, u) = \frac{\partial H}{\partial \theta}$$

Kita akhirnya sampai pada prosedur sebagai berikut. Tambahkan *costate variable* θ pada masalah dan definisikan Fungsi Hamiltonian $H(x, u) = F(x, u) + \theta f(x, u)$ dan dapatkan lintasan $\{u(t)\}$, $\{\theta(t)\}$, dan $\{x(t)\}$ yang memenuhi:

1. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad 0 \leq t \leq T$
2. $\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad 0 \leq t \leq T$
3. $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = f(x, u)$
4. $x(0) = x_0$
5. $\theta(T) = 0 \quad$ (atau $x(T) = x_T$)

Hasil ini dapat digeneralisasi untuk *state variable* $x_1(t), \dots, x_n(t)$, *costate variable* $\theta_1(t), \dots, \theta_n(t)$, dan *control variable* $u_1(t), \dots, u_m(t)$:

1. $\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \quad i = 1, \dots, m \quad 0 \leq t \leq T$
2. $\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} \quad i = 1, \dots, n \quad 0 \leq t \leq T$
3. $\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = f(x, u) \quad i = 1, \dots, n$
4. $x(0) = x_0 \quad i = 1, \dots, n$
5. $\theta(T) = 0 \quad i = 1, \dots, n$ (atau $x(T) = x_{iT} \quad i = 1, \dots, n$)

Kita tambahkan satu unsur ke dalam fungsi tujuan, yakni tingkat diskon, sehingga formulasi masalahnya menjadi:

$$\max_{u(t)} \left\{ J = \int_0^T F(x, u) e^{-\delta t} dt \right\}$$

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{7.56}$$

$$x(0) = x_0 \quad \text{dan} \quad x(T) = x_T$$

Hamiltonian menjadi:

$$H = F(x, u) e^{-\delta t} + \theta f(x, u)$$

Ekspresi ini disebut dengan *present* Hamiltonian. Adanya unsur tingkat diskon menambah kerumitan dalam mencari solusi. Ada kebutuhan untuk menyederhanakan, yakni dengan membentuk *current* Hamiltonian. Jika ekspresi *present* Hamiltonian di atas dikalikan dengan $e^{\delta t}$ maka akan diperoleh *current* Hamiltonian H_c sebagai berikut:

$$H_c = e^{\delta t} H = F(x, u) + e^{\delta t} \theta f(x, u) = F(x, u) + \lambda f(x, u)$$

dimana $\lambda = e^{\delta t} \theta$ atau $e^{-\delta t} \lambda = \theta$; λ adalah pengganda *current* sedangkan θ adalah pengganda *present*.

Karena $H = e^{-\delta t} H_c$, maka

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -e^{-\delta t} \frac{\partial H_c}{\partial x} = \dot{\theta} = -\delta e^{-\delta t} \lambda + e^{-\delta t} \dot{\lambda} \quad (7.57)$$

Ekspresi terakhir ini dapat disederhanakan menjadi

$$-\frac{\partial H_c}{\partial x} + \delta \lambda = \dot{\lambda} \quad (7.58)$$

Untuk selanjutnya dalam memecahkan problem, kita akan menggunakan *current* Hamiltonian baik untuk kasus fungsi tujuan yang mengandung tingkat diskon ataupun tidak. Agar notasinya tetap sederhana, simbol H tanpa subskrip c akan digunakan untuk *current* Hamiltonian. Penjelasan di atas memberikan bekal yang cukup agar pembaca tidak terbingungkan oleh dihilangkannya subskrip pada Hamiltonian.

Ada beberapa tahap yang perlu ditempuh untuk mendapatkan solusi dari suatu problem:

1. Spesifikasikan Hamiltonian (H) dan dapatkan kondisi bagi maksimisasi;
2. Gunakan persamaan $\frac{\partial H}{\partial u}$ untuk memecahkan u sebagai fungsi dari *costate variable* λ ;
3. Dapatkan dua persamaan diferensial atau difference: satu untuk *state variable*, x , dan satu untuk *costate variable*, λ ;
4. Pecahkan persamaan diferensial atau difference yang memberikan solusi umum;
5. Gunakan kondisi $x(0)$ dan $x(T)$ untuk mendapatkan nilai bagi koefisien integrasi;
6. Substitusikan lintasan optimal λ^* ke dalam persamaan bagi u untuk mendapatkan lintasan optimal u^* bagi *control variable*.

Contoh 28.

$$\max_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^5 2u(t)^{\frac{1}{2}} dt \right\}$$

$$\dot{x} = -u(t) \tag{7.59}$$

$$x(0) = 1 \quad \text{dan} \quad x(5) = 0$$

Sejauh tidak membingungkan dan untuk menyederhanakan nota-
si, maka argumen t akan dihilangkan. Bila diperlukan untuk menghin-
dari kerancuan maka argumen t akan disertakan.

1. Hamiltonian:

$$H = 2u^{\frac{1}{2}} - \theta u \tag{7.60}$$

2. Mendapatkan hubungan u sebagai fungsi dari θ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^{-\frac{1}{2}} - \theta = 0 \tag{7.61}$$

3. Mendapatkan persamaan diferensial bagi θ dan x :

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \tag{7.62}$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -u \tag{7.63}$$

4. Mencari solusi bagi persamaan diferensial: Karena $\dot{\theta} = 0$ maka θ adalah konstan dari waktu ke waktu, $\theta = k_1$. Ekspresi (7.61) ber-implikasi bahwa u juga konstan dari waktu ke waktu, $u = \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{k_1^2}$. Ekspresi (7.63) menjadi $\dot{x} = -\frac{1}{k_1^2}$ yang berimplikasi $x = -\frac{1}{k_1^2}t + k_2$, dimana k_2 adalah konstanta.

5. Mendapatkan nilai definitif dari konstanta:

Untuk $t = 0$ maka $x(0) = -\frac{1}{k_1^2}0 + k_2 = 1$ sehingga diperoleh $k_2 = 1$.

Untuk $t = 5$ maka $1 = -\frac{1}{k_1^2} + 1$ sehingga diperoleh $k_1 = \sqrt{5}$.

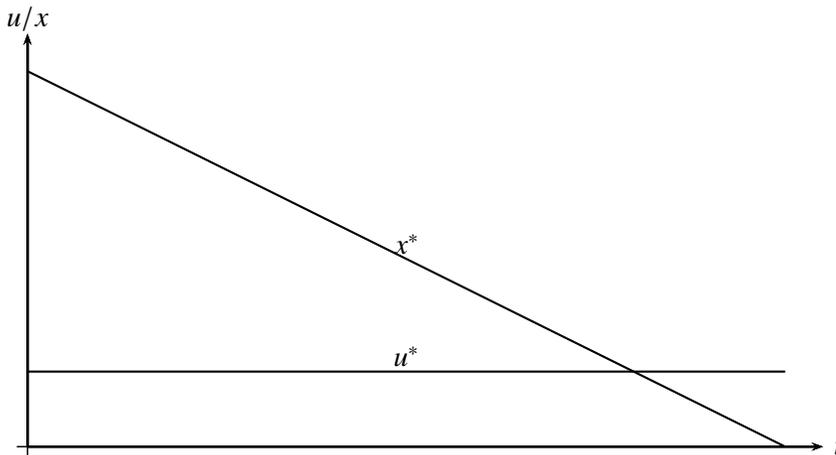
6. Mendapatkan lintasan optimal bagi *control variable*:

$$u^* = \frac{1}{k_1^2} = \frac{1}{5}$$

$$x^* = -\frac{1}{5}t + 1$$

$$\theta^* = \sqrt{5}$$

Gambar 7.5 memperlihatkan lintasan optimal dari *control variable* dan *state variable*.



Gambar 7.5: Lintasan optimal *control variable* (u^*) dan *state variable* (x^*)

Contoh 29. Pada prinsipnya, contoh ini masih sama dengan contoh sebelumnya hanya saja ditambah unsur tingkat diskon sebesar δ per

periode. Pernyataan problemnya menjadi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \max_{\{u(t)\}} \left\{ \int_0^5 2u(t) \frac{1}{2} e^{-\delta t} dt \right\} \\ \dot{x} = -u(t) \\ x(0) = 1 \quad \text{dan} \quad x(5) = 0 \end{aligned} \quad (7.64)$$

Kita dapat menggunakan *present* Hamiltonian atau *current* Hamiltonian. Keduanya akan kita bahas dan kita lihat perbedaannya. Agar tetap runut, kita akan menggunakan *present* Hamiltonian terlebih dahulu.

1. Hamiltonian (*present*):

$$H = 2u(t) \frac{1}{2} e^{-\delta t} - \theta u$$

2. Mendapatkan hubungan u sebagai fungsi dari θ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u^{-1} e^{-\delta t} - \theta = 0 \quad (7.65)$$

3. Mendapatkan persamaan diferensial bagi θ dan x :

$$\dot{\theta} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \quad (7.66)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \theta} = -u \quad (7.67)$$

4. Mencari solusi bagi persamaan diferensial: Karena $\dot{\theta} = 0$ maka θ adalah konstan dari waktu ke waktu, $\theta = k_1$. Menggunakan Ekspresi (7.65) kita memperoleh $u = \frac{e^{-2\delta t}}{k_1^2}$. Menyubstitusikan hasil ini ke dalam Ekspresi (7.67) diperoleh

$$\dot{x} = -\frac{e^{-2\delta t}}{k_1^2} \implies x(t) = \frac{1}{k_1^2} \frac{1}{2\delta} e^{-2\delta t} + k_2 \quad (7.68)$$

5. Mendapatkan nilai definitif dari konstanta:

Menggunakan Ekspresi (7.68) dan *boundary conditions* untuk $t = 0$ dan $t = 5$ diperoleh:

$$k_1 = \left(\frac{1}{2\delta} [1 - e^{-10\delta}] \right)^{\frac{1}{2}}$$

dan

$$k_2 = -\frac{e^{-10\delta}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

6. Mendapatkan lintasan optimal dari *control variable*, *costate variable*, dan *state variable*:

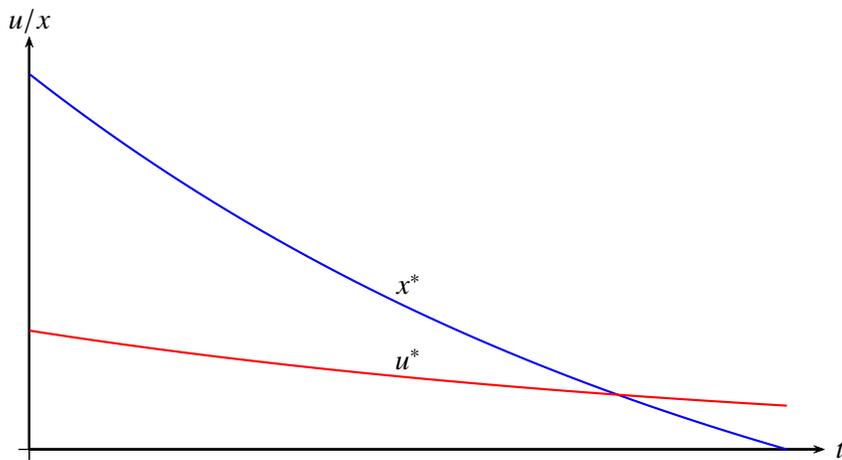
$$u^* = \frac{2\delta e^{-2\delta t}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

$$x^* = \frac{e^{-2\delta t}}{(1 - e^{-10\delta})} - \frac{e^{-10\delta}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

$$\theta^* = \left(\frac{1}{2\delta} [1 - e^{-10\delta}] \right)^{\frac{1}{2}}$$

Gambar 7.6 memperlihatkan lintasan *optimal control variable* dan *state variable* untuk kasus dengan tingkat diskon. Dengan tingkat diskon positif, pengambil keputusan lebih menghargai waktu kini ketimbang waktu nanti. Hal ini ditunjukkan oleh kuantitas u yang semakin menurun dengan berjalannya waktu. Bandingkan hasil ini dengan Gambar 7.5.

Problem yang sama kita selesaikan dengan menggunakan current Hamiltonian.



Gambar 7.6: Lintasan optimal *control variable* (u^*) dan *state variable* (x^*)

1. Hamiltonian (*present*):

$$H = 2u\dot{x} - \lambda u$$

2. Mendapatkan hubungan u sebagai fungsi dari θ :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2\dot{x} - \lambda = 0 \quad (7.69)$$

3. Mendapatkan persamaan diferensial bagi θ dan x :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \delta\lambda \quad (7.70)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -u \quad (7.71)$$

4. Mencari solusi bagi persamaan diferensial:

Karena Hamiltonian tidak mengandung x , maka $-\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ sehingga kita mendapatkan $\dot{\lambda} = \delta\lambda$ dengan solusi $\ln(\lambda) = \delta t + k_1$, dimana k_1 adalah konstanta. Antilog dari ekspresi ini adalah $\lambda = e^{\delta t + k_1} = e^{\delta t} e^{k_1}$. Untuk $t = 0$ kita mendapatkan $\lambda(0) = e^{k_1} = \lambda_0$. Jadi, solusi bagi λ adalah $\lambda(t) = \lambda_0 e^{\delta t}$. Jika masih diinginkan, maka nilai k_1 definitif dapat kita tetapkan kemudian.

Dengan menggunakan $\lambda(t) = \lambda_0 e^{\delta t}$, Persamaan (7.69) dan (7.71) kita memperoleh:

$$\dot{x} = -\frac{e^{-2\delta t}}{\lambda_0^2} \implies x(t) = \frac{1}{\lambda_0^2} \frac{e^{-2\delta t}}{2\delta} + k_2 \quad (7.72)$$

5. Mendapatkan nilai definitif dari konstanta:

Menggunakan Ekspresi (7.72) dan *boundary conditions* untuk $t = 0$ dan $t = 5$ diperoleh:

$$\lambda_0 = \left(\frac{1}{2\delta} [1 - e^{-10\delta}] \right)^{\frac{1}{2}}$$

dan

$$k_2 = -\frac{e^{-10\delta}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

Apakah k_1 definitif masih diperlukan? Sudah tidak diperlukan, tetapi bila ingin tahu maka natural log dari λ_0 akan memberikan nilai definitif k_1 . Jadi, $k_1 = \ln(\lambda_0)$.

6. Mendapatkan lintasan optimal dari *control variable*, *costate variable*, dan *state variable*:

$$u^* = \frac{2\delta e^{-2\delta t}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

$$x^* = \frac{e^{-2\delta t}}{(1 - e^{-10\delta})} - \frac{e^{-10\delta}}{(1 - e^{-10\delta})}$$

$$\lambda^* = \left(\frac{1}{2\delta} [1 - e^{-10\delta}] \right)^{\frac{1}{2}} e^{\delta t}$$

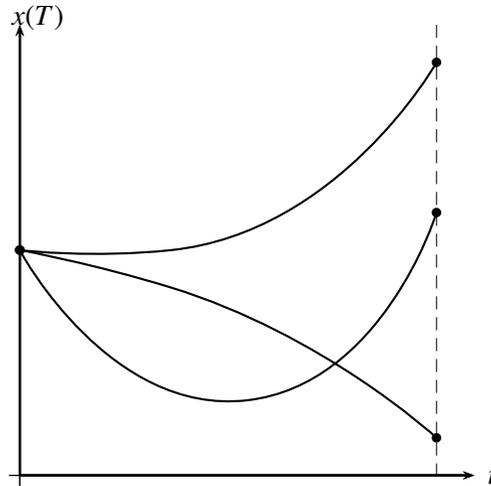
Apa yang dapat dipelajari dari dua contoh terakhir ini adalah bahwa solusi yang didapatkan identik kecuali untuk *costate variable*; *present costate variable* adalah konstan, sedangkan *current costate variable* meningkat dengan laju sebesar tingkat diskon.

7.4.2 Problem Vertikal atau Titik Akhir Bebas

Maksud titik akhir vertikal adalah bahwa T adalah tetap dan $x(T)$ adalah variabel yang dapat mengambil nilai berapa saja (Gambar 7.7). Hal ini tepat ketika kita menghadapi problem mengelola aset atau himpunan aset untuk jangka waktu tertentu yang telah ditetapkan dan tidak akan ada masalah bagaimana kondisi aset ketika waktu jatuh tempo tiba, yakni T . Ketika kita melihat dari perspektif awal horison perencanaan, nilai yang terjadi pada waktu T adalah bebas dan oleh karena itu nilai ini tidak memiliki pengaruh atas apa yang terjadi di masa yang akan datang. Jadi $x(T)$ merupakan variabel bebas penuh dan kita hendak memaksimumkan V dengan memilih $x(T)$. Oleh karena itu, masuk akal bila harga bayangan dari $x(T)$ harus sama dengan nol, yang artinya kondisi terminalnya adalah $\lambda(T) = 0$.

$$J \equiv \int_0^T F(t, x, u) dt \quad (7.73)$$

dimana x adalah variabel state (*state variable*) dan u adalah variabel keputusan (*decision variable*). Catatan: indeks waktu, t , untuk kedua variabel tersebut tidak ditulis demi kesederhanaan pencatatan. Fungsi tujuan tersebut dimaksimumkan dengan kendala variabel state dengan



Gambar 7.7: Problem Vertikal atau Titik Akhir Bebas

bentuk sebagai berikut:

$$\dot{x} = f(t, x, u) \quad (7.74)$$

Fungsi Lagrange dari problem di atas adalah sebagai berikut:

$$L = \int_0^T [F(t, x, u) + \lambda(t)(f(t, x, u) - \dot{x})] dt$$

Kendala ditempatkan dalam integral karena kendala harus berlaku pada setiap titik waktu. Perlu dicatat bahwa variabel harga bayangan, $\lambda(t)$, sebenarnya bukanlah variabel tunggal, tetapi merupakan variabel yang didefinisikan pada setiap titik waktu dalam interval nol hingga T . Karena persamaan state harus terpenuhi pada setiap titik waktu, pada optimum, haruslah terjadi bahwa $\lambda(t)(f(t, x, u) - \dot{x}) = 0$ pada setiap t , sehingga nilai dari L harus sama dengan nilai V . Dengan demikian, kita

dapat menuliskannya sebagai berikut:

$$J = \int_0^T [F(t, x, u) + \lambda(t) (f(t, x, u) - \dot{x})] dt$$

atau

$$J = \int_0^T [\{F(t, x, u) + \lambda(t) (f(t, x, u))\} - \lambda(t)\dot{x}] dt \quad (7.75)$$

Dengan mendefinisikan $H(t, x, u, \lambda) = \{F(t, x, u) + \lambda(t) (f(t, x, u))\}$, maka persamaan (7.75) dapat ditulis kembali sebagai berikut:

$$J = \int_0^T [H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t)\dot{x}] dt \quad (7.76)$$

Sekarang mari kita reformulasikan suku terakhir, $\lambda(t)\dot{x}$, melalui pe-
ngintegrasian bagian per bagian untuk mendapatkan:

$$\begin{aligned} - \int_0^T \lambda(t)\dot{x} dt &= -[\lambda(t)x(T)]_0^T + \int_0^T \dot{\lambda}x(T) dt \\ &= \int_0^T \dot{\lambda}x(T) dt + \lambda_0x_0 - \lambda_Tx_T \end{aligned} \quad (7.77)$$

dimana $\lambda(0) = \lambda_0$, $\lambda(T) = \lambda_T$, $x(0) = x_0$, dan $x(T) = x_T$.

Sekarang kita dapat menuliskan persamaan (7.75) kembali dalam bentuk

$$J = \int_0^T [H(t, x, u, \lambda) - \dot{\lambda}x(T)] dt + \lambda_0x_0 - \lambda_Tx_T \quad (7.78)$$

Jika kondisi terminal adalah bahwa $x(T)$ dapat mengambil sembarang nilai, maka haruslah benar adanya bahwa nilai marginal dari perubahan $x(T)$ sama dengan nol, yakni $\frac{\partial J}{\partial x(T)} = 0$. Oleh karena itu, first-order condition terhadap $x(T)$ adalah

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x(T)} &= \int_0^T \left[H_t \frac{\partial t}{\partial x(T)} + H_x \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} + H_u \frac{\partial u(t)}{\partial x(T)} + H_\lambda \frac{\partial \lambda(t)}{\partial x(T)} \right. \\ &\quad \left. + \dot{\lambda} \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} + x(T) \frac{\partial \dot{\lambda}}{\partial x(T)} \right] dt - \lambda(T) = 0 \end{aligned} \quad (7.79)$$

Beberapa suku dalam turunan di atas harus sama dengan nol. Pertama, jelas berlaku bahwa $\frac{\partial t}{\partial x(T)} = 0$ maka $H_t \frac{\partial t}{\partial x(T)} = 0$. Dengan demikian persamaan (7.79) dapat disederhanakan menjadi

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial x(T)} = \int_0^T \left[H_x \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} + H_u \frac{\partial u(t)}{\partial x(T)} + H_\lambda \frac{\partial \lambda(t)}{\partial x(T)} + \lambda \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} \right. \\ \left. + x(t) \frac{\partial \lambda}{\partial x(T)} \right] dt - \lambda(T) = 0 \end{aligned} \quad (7.80)$$

Kedua, seperti dinyatakan di atas ketika kita mengubah dari L menjadi J , $\lambda(t)$ tidak akan mempengaruhi J sepanjang kendalanya terpenuhi, yakni selama persamaan state dipenuhi. Oleh karena itu, suku yang melibatkan $\frac{\partial J}{\partial \lambda(t)}$ atau $\frac{\partial J}{\partial \lambda}$ dapat diabaikan. Jadi, persamaan (7.80) dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\frac{\partial J}{\partial x(T)} = \int_0^T \left[H_x \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} + H_u \frac{\partial u(t)}{\partial x(T)} + \lambda \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} \right] dt - \lambda(T) = 0 \quad (7.81)$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{\partial J}{\partial x(T)} = \int_0^T \left[(H_x + \lambda) \frac{\partial x(t)}{\partial x(T)} + H_u \frac{\partial u(t)}{\partial x(T)} \right] dt - \lambda(T) = 0 \quad (7.82)$$

Prinsip maksimum mengharuskan $H_x = -\lambda$ dan $H_u = 0$, sehingga kedua suku dalam integral adalah sama dengan nol pada optimum. Dengan demikian,

$$\frac{\partial J}{\partial x(T)} = -\lambda(T) = -\lambda_T \quad (7.83)$$

Tanda minus mencerminkan biaya marginal dari meninggalkan satu satuan marginal dari stok pada waktu T . Umumnya, kita dapat menunjukkan bahwa $\lambda(t)$ merupakan nilai dari satu unit tambahan dari

stok pada waktu t . Menyamakan first-order condition dengan nol, kita memperoleh kondisi terminal $\lambda(T) = 0$.

Hasil ini menguatkan intuisi kita bahwa ketika kita berusaha memaksimumkan J sepanjang horison perencanaan kita, dipandang dari perspektif awal horison maka $x(T)$ adalah suatu variabel yang dipilih, haruslah berlaku bahwa $\lambda(T)$, nilai marginal dari tambahan satu unit $x(T)$, sama dengan nol. Ini adalah nilai marginal terhadap J , yakni terhadap jumlah seluruh manfaat selama jangka waktu dari 0 hingga T , bukan nilai marginal terhadap fungsi manfaat, $F(\cdot)$. Walau satu unit tambahan dapat saja menambah nilai jika hal ini sampai pada waktu T , yakni $\frac{\partial F(\cdot)}{\partial x(T)} > 0$, biaya yang diperlukan oleh unit x marginal untuk sampai pada T harus benar-benar mengimbangi manfaat marginal.

Bentuk umum dari problem vertikal adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \max \left\{ V \equiv \int_0^T [F(t, x, u) + \lambda(t)(f(t, x, u) - \dot{x})] dt \right\} \\ \text{dengan kendala} \\ x(0) = x_0 \quad x(T) \text{ bebas} \quad (x_0, T \text{ tertentu}) \end{aligned} \tag{7.84}$$

Contoh 30.

$$\begin{aligned} \max \left\{ \int_0^4 2x dt \right\} \\ \text{s.t. } \dot{x} = x + u \quad x(0) = 5 \quad x(4) = \text{bebas} \\ u(t) \in [0, 2] \end{aligned}$$

1. Hamiltonian:

$$H = 2x + \lambda(x + u)$$

2. Karena Hamiltonian linear dalam u maka teknik $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ tidak dapat digunakan disini. Dari bentuk Hamiltonian di atas, maka

Hamiltonian akan dimaksimumkan dengan u maksimum bila $\lambda > 0$ dan u minimum bila $\lambda < 0$. Jadi,

$$u^*(t) = \begin{cases} 2, & \text{jika } \lambda > 0 \\ 0, & \text{jika } \lambda < 0 \end{cases} \quad (7.85)$$

3. Dapatkan dua persamaan diferensial: satu untuk *state variable*, x , dan satu untuk *costate variable*, λ ;

$$-\frac{\partial H}{\partial x} = -2 - \lambda = \dot{\lambda}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \lambda} = x + u = \dot{x}$$

4. Pecahkan persamaan diferensial yang memberikan solusi umum;

$$-2 - \lambda = \dot{\lambda} \implies \lambda = k_1 e^{-t} - 3$$

Penyelesaian persamaan diferensial untuk *state variable* masih harus menunggu.

5. Gunakan kondisi pembatas untuk mendapatkan nilai bagi koefisien integrasi; Kondisi transversalitas mensyaratkan $\lambda(4) = 0$ sehingga

$$\lambda(4) = 0 = k_1 e^{-4} - 3 \implies k_1 = 3e^4$$

Lintasan optimal *costate variable* adalah

$$\lambda^*(t) = 3e^{4-t} - 3 > 0, \quad \forall t \in [0, 4]$$

6. Substitusikan lintasan optimal λ^* ke dalam persamaan bagi u untuk mendapatkan lintasan optimal u^* bagi *control variable*.

Implikasi dari Ekspresi 7.85 dan lintasan optimal *costate variable* adalah $u^* = 2$. Persamaan diferensial *state variable* menjadi

$$\dot{x} = x + 2 \implies x(t) = 7e^t + k_2$$

Dengan menggunakan kondisi pembatas $x(0) = 5$ akan diperoleh $k = -2$. Jadi, lintasan optimal untuk *state variable* adalah

$$x^*(t) = 7e^t - 2$$

7.4.3 Garis Akhir Horisontal

Kita kembali menggunakan persamaan (7.78). Kita mempunyai waktu akhir yang benar, sehingga $\frac{\partial J}{\partial T} = 0$, karena jika tidak demikian maka suatu perubahan T akan meningkatkan J ; jika $\frac{\partial J}{\partial T} > 0$ maka kita akan menambah horison waktu, dan jika $\frac{\partial J}{\partial T} < 0$ maka horison waktu harus diperpendek. Dengan menggunakan kaidah Leibniz untuk mengevaluasi derivatif ini akan diperoleh

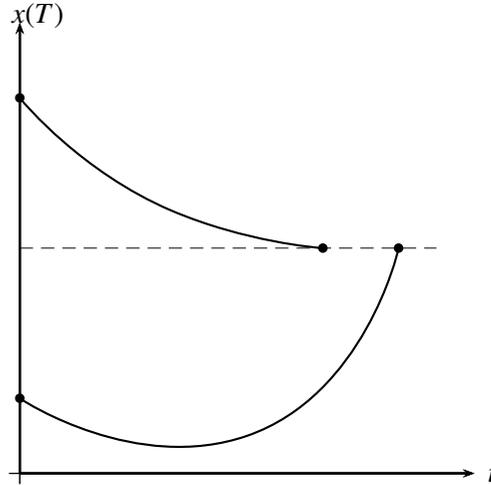
$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial T} &= [H(T, x(T), u(T), \lambda(T)) + \lambda x(T)] \\ &\quad - (\lambda x(T) + \lambda(T)\dot{x}) = 0 \end{aligned} \quad (7.86)$$

Suku kedua dan ketiga saling menghilangkan. Karena pembatasan bahwa $x(T)$ harus mencapai nilai tertentu maka hal ini berakibat bahwa $\dot{x} = 0$. Selanjutnya, kondisi yang diperlukan dapat disederhanakan menjadi

$$H(T, x(T), u(T), \lambda(T)) = F(T, x(T), u(T)) + \lambda(T)(f(T, x(T), u(T))) = 0$$

7.4.4 Titik Terminal Tertentu

Dalam kasus ini, kedua $x(T)$ dan T adalah tertentu. Situasi ini terjadi dalam pengelolaan aset yang pada akhir dari jangka waktu yang diberikan nilai aset harus mencapai level tertentu. Contohnya, penyewaan



Gambar 7.8: Garis Terminal Horizontal

mobil mengharuskan kepada penyewa untuk mengisi tanki dengan 10 liter bahan bakar pada akhir masa sewa yang telah disepakati, misalnya dua hari. Jadi, $T = 2$ dan $x(2) = 10$. Kondisi terminal otomatis terpenuhi ketika kendala yang disepakati dalam perjanjian dipenuhi.

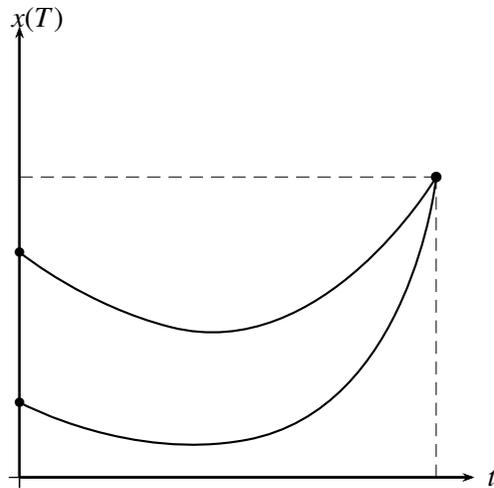
7.4.5 Kurva Terminal

Dalam kasus ini kondisi terminal adalah suatu fungsi, $x(T) = \varphi(T)$. Lagi, kita menggunakan persamaan (7.78). Melakukan derivasi terhadap T dan melakukan substitusi dalam $\dot{x}(T) = \varphi'(T)$

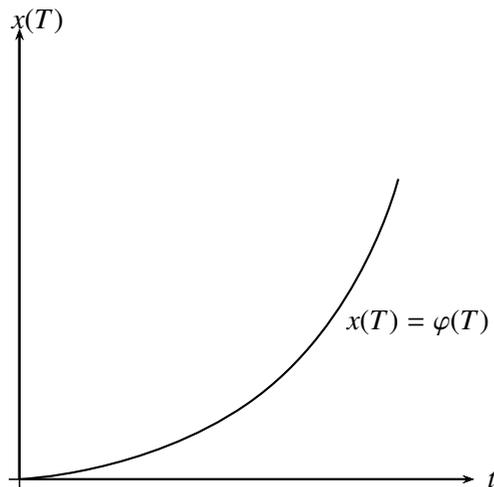
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial T} &= H(T, x(T), u(T), \lambda(T)) + \dot{\lambda}(T)x(T) - \dot{\lambda}(T)x(T) \\ &\quad - \lambda(T)\varphi'(T) = 0 \end{aligned} \quad (7.87)$$

yang dapat disederhanakan lebih lanjut menjadi

$$\frac{\partial V}{\partial T} = H(T, x(T), u(T), \lambda(T)) - \lambda(T)\varphi'(T) = 0 \quad (7.88)$$



Gambar 7.9: Titik Terminal Tertentu



Gambar 7.10: Kurva Terminal

7.4.6 Garis Terminal Vertikal Terpotong

Dalam kasus ini waktu terminal adalah tertentu, tetapi $x(T)$ hanya dapat terjadi pada suatu gugus nilai, yakni $x(T) \geq \underline{x}$ (Gambar 7.11). Ini berlaku, misalnya, dalam suatu situasi dimana seseorang sedang menggunakan suatu stok input yang harus digunakan sebelum orang tersebut mencapai waktu T dan $x(T) \geq 0$. Orang tersebut dapat menggunakan input dari 0 hingga T , tetapi $x(T)$ tidak pernah dapat menjadi negatif.

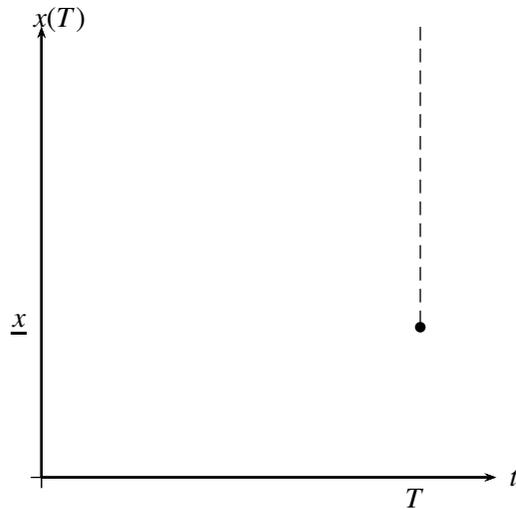
Untuk problem seperti itu terdapat dua kondisi transversalitas yang mungkin. Jika $x(T) \geq \underline{x}$, maka kondisi transversalitas $\lambda(T) = 0$ berlaku. Secara umum, spesifikasi Kuhn-Tucker memenuhi kebutuhan kita. Tujuan maksimisasi adalah sama, tetapi kita mempunyai kendala ketidaksamaan, yaitu kita berusaha memaksimumkan

$$V = \int_0^T [H(t, x, u, \lambda) - \lambda(t)x(T)] dt + \lambda_0 x_0 - \lambda_T x_T \quad \text{s.t. } x_T \geq \underline{x} \quad (7.89)$$

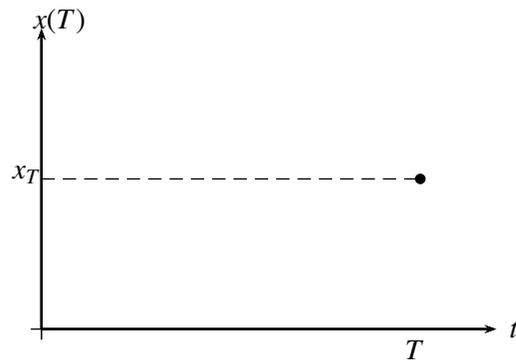
Kondisi Kuhn-Tucker bagi optimum adalah $\lambda(T) \geq 0$, $x(T) \geq \underline{x}$, dan $(x(T) - \underline{x})\lambda(T) = 0$, dimana kondisi terakhir merupakan kondisi complementary slackness.

7.4.7 Garis Terminal Horisontal Terpotong

Dalam kasus ini waktu adalah fleksibel hingga suatu titik, yakni $T \leq T_{max}$, tetapi state adalah dipatok pada level tertentu, misalnya x_T (Gambar 7.12). Lagi-lagi ada dua kemungkinan, yaitu $T = T_{max}$ atau $T < T_{max}$. Menggunakan garis terminal horisontal sebelumnya, kondisi transversality mempunyai bentuk yang mirip dengan kondisi Kuhn-Tucker di atas, yakni $T \leq T_{max}$, $H(T, x_T, \lambda_T) \geq 0$, dan $(T - T_{max})H_T = 0$



Gambar 7.11: Garis Terminal Vertikal Terpotong



Gambar 7.12: Garis Terminal Horizontal Terpotong

7.5 Nilai Sisa (*Salvage Value*)

Problem di atas mengasumsikan bahwa semua manfaat dan biaya mengumpul selama horison perencanaan. Tetapi, bagi problem hori-

son sehingga hal yang sering terjadi adalah bahwa ada manfaat atau biaya yang merupakan fungsi dari x_T pada waktu T . Sebagai contoh, mengoperasikan suatu kendaraan tentulah merupakan suatu problem yang dinamis dan biasanya ada nilai (boleh jadi negatif) terhadap kendaraan yang bersangkutan diakhir masa operasi. Demikian pula, problem produksi pertanian dapat dipandang sebagai problem optimisasi dinamis yang di dalamnya terdapat biaya selama musim tanam, diikuti oleh nilai sisa pada waktu panen.

Nilai yang mengumpul di luar horison perencanaan disebut sebagai nilai sisa. Problem optimisasi umum dengan nilai sisa menjadi

$$\begin{aligned} \max \left\{ \int_0^T F(t, x) dt + R(x_T, T) \right\} \quad \text{s.t.} \\ \dot{x} = f(t, x) \\ x(0) = x_0 \end{aligned} \quad (7.90)$$

Menuliskan kembali persamaan 7.78 dengan nilai akhir menghasilkan:

$$V = \int_0^T \left[H(t, x, u, \lambda) + \dot{\lambda}(t)x(T) \right] dt + \lambda_0 x_0 + \lambda_T x_T + R(T, x_T) \quad (7.91)$$

Dengan mengikuti prosedur penurunan seperti yang dilakukan dalam problem titik akhir vertikal akan didapatkan

$$\lambda_T = \frac{\partial R(T, x_T)}{\partial x_T} \quad (7.92)$$

Secara intuitif hal ini masuk akal karena λ_T adalah nilai marginal dari stok dan $\frac{\partial R(T, x_T)}{\partial x_T}$ adalah nilai marginal dari stok di luar horison perencanaan. Bila keduanya sama, ini berarti bahwa nilai marginal dari

stok selama horison perencanaan adalah sama dengan nol dan seluruh nilai tertangkap oleh nilai sisa.

Perlu diingat bahwa tambahan nilai sisa tidak mempengaruhi Hamiltonian, atau tidak mempengaruhi tiga kriteria pertama yang harus dipenuhi.

Kondisi terminal yang melibatkan nilai sisa adalah sebagai berikut:

1. Problem kondisi waktu terminal bebas

$$H(x^*(T^*), u^*(T^*), \theta(T^*), T^*) + \frac{\partial R(x_T, T)}{\partial T} = 0 \quad (7.93)$$

Jika digunakan Current Hamiltonian, maka kondisi yang harus dipenuhi adalah

$$H(x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*), T^*) - rR(x_T, T) = 0 \quad (7.94)$$

2. Problem kondisi titik akhir bebas

$$\theta(T) = \frac{\partial R(x_T, T)}{\partial x_T} \quad (7.95)$$

Contoh 31 (Penelitian dan Pengembangan). *Materi ini diambil dari ?:* Misalnya suatu proyek penelitian dan pengembangan yang dicirikan oleh pengembalian yang menurun terhadap pengeluaran belanja yang makin cepat. Lebih cepat sejumlah anggaran dibelanjakan, semakin kecil belanja tersebut terhadap upaya efektif total. Belanja yang lebih cepat tersebut dapat berupa pembayaran kerja lembur, pembayaran faktor produksi yang kurang produktif, pembayaran kerja paralel ke-timbang kerja berurutan dan sebagainya. Katakanlah $x(t)$ adalah laju belanja pada waktu t dan $z(t)$ adalah upaya kumulatif yang diperuntukan bagi proyek hingga waktu t . Tingkat belanja dan pertumbuhan

kumulatif upaya dihubungkan dengan persamaan sebagai berikut:

$$\dot{x} = u(t)\frac{1}{2} \quad (7.96)$$

Upaya efektif total untuk menyelesaikan proyek yang bersangkutan adalah A:

$$x(0) = 0, \quad x(T) = A \quad (7.97)$$

dimana T adalah waktu penyelesaian (yang hendak ditentukan).

Imbalan sebesar R akan diterima bila proyek tuntas; R dapat berupa nilai suatu paten atas suatu penemuan atau nilai dari aliran keuntungan yang dibangkitkan oleh penemuan tersebut, didiskon sepanjang waktu antara waktu proyek selesai dan waktu mulainya keuntungan didapat. Jika tingkat diskon adalah r , maka nilai dari proyek pada waktu nol (saat ini) adalah keuntungan dikurangi dengan biaya pengembangan:

$$e^{-rT}R - \int_0^T e^{-rt}u(t) dt \quad (7.98)$$

Kita memaksimumkan (7.98) dengan kendala (7.96) dan (7.97).

Present Hamiltonian dari problem ini adalah

$$H = -u(t) + \lambda u\frac{1}{2} \quad (7.99)$$

dengan FOC:

$$-1 + \frac{\lambda}{2}u - \frac{1}{2} = 0 \implies u(t) = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \quad (7.100)$$

dan

$$r\lambda(t) = \dot{\lambda} \implies \lambda(t) = \lambda_0 e^{rt} \quad (7.101)$$

Dari dua persamaan ini akan diperoleh

$$u(t) = \left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^2 e^{2rt} \quad (7.102)$$

Menggunakan hasil ini, Persamaan (7.96) dapat ditulis menjadi

$$\dot{x} = \left(\frac{\lambda_0}{2}\right) e^{rt} \implies x(t) = \left(\frac{\lambda_0}{2r}\right) e^{rt} + k \quad (7.103)$$

dimana k adalah konstanta. Menggunakan kondisi pembatas $x(0) = 0$ akan diperoleh

$$0 = \left(\frac{\lambda_0}{2r}\right) + k \implies k = -\left(\frac{\lambda_0}{2r}\right) \quad (7.104)$$

Dengan demikian, lintasan stok menjadi

$$x(t) = \left(\frac{\lambda_0}{2r}\right) (e^{rt} - 1) \quad (7.105)$$

Sampai disini kita masih mempunyai dua bilangan yang belum diketahui dan harus ditentukan, yakni λ_0 dan T . Untuk itu, kita akan menggunakan kondisi terminal dan kondisi pembatas $x(T) = A$. Kondisi terminal yang harus dipenuhi dari problem dengan nilai sisa ini adalah

$$H(x^*(T^*), u^*(T^*), \lambda(T^*), T^*) - rR = 0 \quad (7.106)$$

sehingga dihasilkan:

$$-\left(\frac{\lambda_0}{2}\right)^2 e^{2rT} + \left(\frac{\lambda_0^2}{2}\right) e^{2rT} = rR \quad (7.107)$$

$$\left(\frac{\lambda_0}{2}\right) e^{rT} = (rR)^{\frac{1}{2}} \quad (7.108)$$

Menggunakan kondisi pembatas $x(T) = A$ dan mensubstitusikan ke dalam Persamaan (7.108) diperoleh:

$$\lambda_0 = 2 \left((rR)^{\frac{1}{2}} - rA \right) \quad (7.109)$$

Akhirnya, mensubstitusikan hasil ini ke dalam Persamaan (7.108) diperoleh:

$$T = -\frac{1}{r} \ln \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{\frac{1}{2}} A \right) \quad (7.110)$$

Karena fungsi logaritma didefinisikan bagi bilangan positif saja, Persamaan (7.110) dapat diterima hanya bila

$$rA^2 < R \quad (7.111)$$

Mensubstitusikan λ_0 dari Persamaan (7.110) ke dalam Persamaan (7.109) diperoleh:

$$x(t) = \left(\left(\frac{R}{r} \right)^{\frac{1}{2}} - A \right) (e^{rt} - 1), \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.112)$$

yang merupakan lintasan optimal dari akumulasi usaha penelitian dan pengembangan efektif dengan syarat bahwa (7.111) terpenuhi. Jika (7.111) tidak terpenuhi, maka proyek sepatutnya tidak dilaksanakan. Persamaan (7.110) menyatakan bahwa durasi optimal pengembangan T berbanding lurus dengan usaha yang diperlukan A dan berbanding terbalik dengan imbalan R ; pengembangan yang lebih mudah dan imbalan yang lebih besar mempercepat pengembangan. Jika Persamaan (7.111) berlaku, mengkombinasikan Persamaan (7.109) dan (7.102) diperoleh:

$$u(t) = \left((rR)^{\frac{1}{2}} - rA \right) e^{2rt}, \quad 0 \leq t \leq T \quad (7.113)$$

dimana T diperoleh dari (7.110). Jika tidak, maka $u(t) = 0$ untuk $0 \leq t$.

"You cannot fly like an eagle with the wings of a wren."

William Henry Hudson

"The best ideas come from jokes. Make your thinking as funny as possible."

David Ogilvie

"Among mankind money is far more persuasive than logical argument."

Euripides

8

Model Pengelolaan Sumberdaya Nonrenewable

Karya tulis pertama dalam bidang ini dibuatkan oleh ? dengan menggunakan kalkulus variasi (*calculus of variation*). Sejak itu banyak hasil studi telah dipublikasikan dengan menambahkan berbagai unsur baru ke dalam model, seperti ? menambahkan unsur ketidakpastian permintaan di masa depan dan biaya yang beragam, ? yang menambahkan output kumulatif sebagai argumen fungsi biaya, ? menambahkan pengendalian harga dan efeknya pada profil pasokan, ? yang mendis-

kusikan model bila ada ketidakpastian stok, ? menganalisis unsur pajak di bawah struktur monopoli, dan masih banyak yang lainnya.

Dalam diskusi fungsi produksi, biasanya ada anggapan umum bahwa semua input adalah tidak dapat habis, sehingga bila input tersebut habis, input baru dapat diperoleh bagi penggunaan berikutnya. Dalam dunia nyata, sumberdaya tertentu benar-benar akan habis terpakai. Dalam ketiadaan jaminan keberhasilan menemukan deposit baru atau sumberdaya pengganti, kemungkinan menghadapi keadaan habis terpakainya sumberdaya perlu diperhitungkan ketika suatu sumberdaya mulai digunakan. Adanya biaya kesempatan antar waktu merupakan pembeda produksi optimal ekstraksi sumberdaya alam dari produksi optimal dalam ekonomi produksi standar.

Dalam bab ini, kita akan mempelajari bagaimana mengekstraksi sumberdaya nonrenewable secara optimal. Kita akan mengawalinya dengan melihat model dasar yang dianalisis dengan metoda optimisasi dengan kendala integral. Hasil ini akan dibandingkan dengan hasil dari ekstraksi optimal dalam struktur pasar kompetitif dan monopoli, yang diperoleh dengan pendekatan teori kontrol optimal. Selanjutnya, model dasar tersebut dapat dikembangkan dengan menambahkan berbagai kondisi sesuai dengan realita yang ingin ditangkap dan dianalisis. Dengan contoh yang akan diberikan tentang bagaimana memasukkan unsur baru ke dalam model, diharapkan pembaca dapat mengembangkan modelnya sendiri yang lebih sesuai dengan realita yang sedang dihadapinya. Namun, perlu diingat bahwa model yang semakin diperkaya dengan maksud agar semakin dapat merepresentasikan dunia nyata, maka kerumitan model tersebut juga semakin tinggi. Oleh karena itu, pembuat model harus memperhatikan keseimbangan an-

tara kemampuan model merepresentasikan dunia nyata dan kerumitan yang akan dihadapinya. Dunia nyata memang rumit.

8.1 Model Hotelling tentang Ekstraksi Optimal Secara Sosial

Dalam artikel klasik oleh Harold Hotelling, pengertian “nilai sosial” dari sumberdaya alam takterpulihkan digunakan untuk menilai kelayakan setiap pola ekstraksi sumberdaya alam. Nilai kotor bagi masyarakat dari suatu unit marginal dari output atau ekstraksi dari sumberdaya diukur oleh harga yang masyarakat bersedia membayarnya untuk mendapatkan unit output tersebut dan nilai bersih bagi masyarakat adalah nilai kotor dikurangi dengan biaya untuk mengekstraksi unit tersebut.

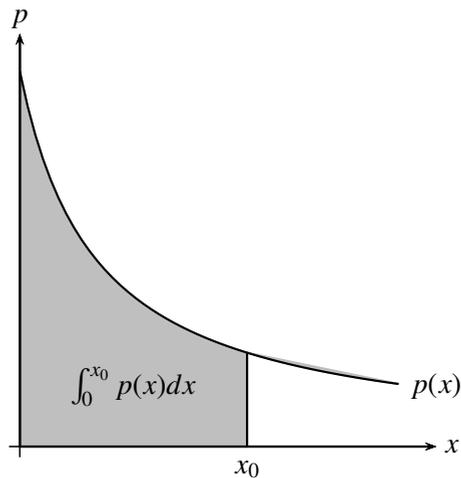
Beberapa notasi yang akan digunakan dalam bab ini adalah sebagai berikut:

$p(t)$ = harga sumberdaya pada waktu t

x = $x(p)$ adalah fungsi permintaan, yakni kuantitas yang diminta pada harga p ; $x'(p) \leq 0$, $x(p) > 0$ untuk $p < \bar{p}$, dan $x(p) = 0$ untuk $p \geq \bar{p}$, dimana p adalah harga dimana barang substitusi sepenuhnya menggantikan sumberdaya yang bersangkutan. Grafik fungsi permintaan tipikal diperlihatkan pada Gambar 8.1.

r = tingkat diskon sosial, $r > 0$

- c = $c(x)$ adalah fungsi biaya; $c(0) = 0, c(x) > 0$ untuk $x > 0$, $c'(x) > 0$ dan $c''(x) \geq 0$ untuk $x \geq 0$, dan $c'(0) < p$. Asumsi terakhir memungkinkan produsen mendapat laba positif pada harga p yang di bawah \bar{p} .
- $S(t)$ = stok atau cadangan sumberdaya yang tersedia pada waktu $t, S(0) = S_0$
- T = waktu perencanaan, dimana waktu terakhir saat barang substitusi menjadi tersedia terlepas dari harga sumberdaya alam, $T > 0$



Gambar 8.1: Fungsi permintaan tipikal

Dari Gambar 8.1, daerah di bawah kurva permintaan yang ditandai dengan bayangan mencerminkan nilai sosial kotor dari output sebesar x_0 . Untuk mendapatkan nilai sosial bersih, biaya ekstraksi sebesar $c(x_0)$ harus dikurangkan dari nilai sosial kotor tersebut. Generalisasi nilai sosial bersih dari sembarang output, $N(x)$, dapat diformulasikan

sebagai:

$$N(x) = \int_0^x p(q) dq - c(x) \quad (8.1)$$

Kauntitas ini terdiri dari dua bagian, yakni surplus produsen dan surplus konsumen. Dengan asumsi bahwa stok total dari sumberdaya adalah S_0 , kita mempunyai masalah mendapatkan lintasan ekstraksi $x(t)$ untuk

$$\begin{aligned} \max \{V\} &= \int_0^{\infty} N(x)e^{-rt} dt \\ &\text{sesuai dengan} \\ &\int_0^{\infty} x dt = S_0 \end{aligned} \quad (8.2)$$

Ini adalah problem isoperimetrik, yakni problem dengan kendala integral.¹

Integran Lagrange dari problem ini adalah

$$F = N(x)e^{-rt} - \theta x \quad (\theta = \text{konstan}) \quad (8.3)$$

Perlu dicatat bahwa integran F tidak mengandung derivasi dari x ; oleh karena itu eksternal yang hendak didapatkan dari persamaan Euler-Lagrange mungkin tidak sesuai dengan titik akhir tetap yang ditentukan. Jika tidak ada titik akhir kaku yang dipaksakan, kita masih dapat mengaplikasikan persamaan Euler-Lagrange; karena $F_x = 0$, maka

$$N'(x)e^{-rt} - \theta = 0 \quad (8.4)$$

¹Salah satu problem permulaan yang melibatkan penggunaan kendala integral adalah mendapatkan gambar geometrik yang mempunyai luasan terbesar yang dapat dicakup oleh suatu kurva yang mempunyai panjang tertentu. Karena semua gambar yang mungkin harus memiliki keliling yang sama, maka problem ini kemudian diacu sebagai problem *isoperimetrik*.

atau

$$[p(x) - c'(x)]e^{-rt} - \theta = 0 \quad (8.5)$$

Karena λ adalah konstan, maka interpretasi ekonomi dari Persamaan (8.5) menjadi lebih mudah. Sepanjang ekstraksi optimal, nilai $[p(x) - c'(x)]$ yang berasosiasi dengan sembarang titik waktu harus mempunyai nilai kini yang sama, yakni θ . Dengan sedikit mengubah susunan terma, kita dapat menafsir ulang bahwa syarat tersebut sebagai mengharuskan bahwa $[p(x) - c'(x)]$ tumbuh pada laju r .

$$[p(x) - c'(x)] = \theta e^{rt} \quad [\text{optimum sosial}] \quad (8.6)$$

Persamaan terakhir ini jelas menunjukkan bahwa λ mempunyai konotasi sebagai "nilai awal dari $[p(x) - c'(x)]$." Jika fungsi $p(x)$ dan $c(x)$ adalah spesifik, maka kita dapat memecahkan Persamaan (8.6) bagi x sebagai fungsi dari θ dan t , misalnya $x(\theta, t)$. Jika hasil ini disubstitusikan ke dalam kendala dalam (8.3), maka kita dapat memecahkan θ .

Kita akan membandingkan hasil ini dengan hasil yang diperoleh dari optimisasi ekstraksi dalam struktur pasar yang kompetitif dengan pendekatan teori kontrol optimal. Selanjutnya hasil ekstraksi optimal kompetitif ini akan dibandingkan dengan hasil ekstraksi optimal bila struktur pasarnya adalah monopoli. Salah satu kesimpulan utama dari karya Hotelling adalah bahwa kompetisi murni dapat menghasilkan suatu lintasan ekstraksi yang identik dengan lintasan optimal sosial, sementara firma monopoli akan mengadopsi lintasan ekstraksi yang lebih konservasionistik, namun secara sosial suboptimal.

8.2 Kontrol Optimal

8.2.1 Kompetitif vs Monopoli: Seluruh Sumberdaya Habis

Bagian pertama dari subseksi ini adalah ekstraksi optimal dalam struktur pasar kompetitif murni. Formulasi problem secara umum bagi firma i adalah sebagai berikut:

$$\int_0^T [p(t)x_i(t) - c_i(x_i(t))]e^{-rt} dt$$

$$\dot{S}(t) = -x_i(t) \quad (8.7)$$

$$S_i(0) = S_{0i} \quad S_i(T) = 0 \quad T \text{ bebas}$$

Problem ini dibaca sebagai berikut. Pengelola sumberdaya alam berupaya untuk memaksimalkan nilai kini bersih dari aliran keuntungan selama T periode mengeksploitasi sumberdaya alam yang bersangkutan melalui pengaturan sekuen laju ekstraksi dan sekuen stok sumberdaya sepanjang periode pengelolaan. Perhatikan bahwa harga $p(t)$ adalah eksogenus dan tidak mengandung argumen produksi.

Present Hamiltonian dari problem ini adalah sebagai berikut:

$$H = [p(t)x_i(t) - c_i(x_i(t))]e^{-rt} - \theta(t)x_i(t) \quad (8.8)$$

Kondisi $\frac{\partial H}{\partial x} = 0$ harus dipenuhi bagi optimum, sehingga akan diperoleh:

$$[p(t) - c'_i(x_i(t))] = \theta(t)e^{rt} \quad [\text{kompetitif murni}] \quad (8.9)$$

Kondisi ini adalah konsisten sepenuhnya dengan kondisi bagi optimum sosial (8.6), yakni kondisi terakhir ini juga mensyaratkan perbedaan antara harga sumberdaya nonrenewable dan biaya ekstraksi marginalnya berkembang secara eksponensial dengan laju r . Kondisi lain

yang harus dipenuhi adalah $-\frac{\partial H}{\partial S} = \dot{\theta}$, yang menghasilkan $0 = \dot{\theta}$. Dengan kata lain, θ adalah konstan sepanjang waktu. Dari Persamaan (8.9) terlihat bahwa θ tidak lebih dari selisih antara harga dan biaya ekstraksi marginal di awal proses ekstraksi, $t = 0$.

Kondisi terminal dari problem ini adalah bahwa $H(T) = 0$ yang berimplikasi bahwa $c'_i(x_i(T)) = \frac{c_i(x_i(T))}{x_i(T)}$. Artinya, pada akhir periode ekstraksi, biaya marginal harus sama dengan biaya rata-rata. Kondisi ini akan menghasilkan tingkat ekstraksi optimal di akhir periode, $x_i^*(T)$. Jika harga yang bersifat eksogenus diketahui - $p(T)$ diketahui, maka dengan menggunakan Persamaan (8.9), nilai $\theta(T)$ akan diketahui, yakni $\theta(T) = \theta$ (konstan). Dengan menggunakan θ konstan dan Persamaan (8.9) maka lintasan ekstraksi optimal, $x_i^*(t)$, dapat ditentukan.

Sekarang mari beralih ke kasus monopoli. Present Hamiltonian menjadi sebagai berikut:

$$H = [p(x(t))x(t) - c(x(t))]e^{-rt} - \theta(t)x(t) \quad (8.10)$$

Kondisi keharusan yang harus dipenuhi bagi lintasan ekstraksi optimal adalah

$$[p(x(t)) + p'(x(t))x(t) - c'(x(t))] = \theta(t)e^{rt} \quad [\text{monopoli}] \quad (8.11)$$

yang berbeda dari kaidah bagi ekstraksi optimal sosial. Di sini, kaidahnya adalah perbedaan antara penerimaan marginal (ketimbang harga) dan biaya marginal yang harus tumbuh dengan kecepatan r , dengan θ sebagai nilai awal dari perbedaan tersebut.

Kesimpulan dari karya Hotelling adalah bahwa produksi monopolistik dari sumberdaya alam nonrenewable adalah suboptimal dan bias ke arah konservatisme berlebihan. Seberapa valid klaim terakhir ini?

Jawabannya adalah bahwa dalam kasus tertentu benar adanya, tetapi tidak selalu. Isu ini telah dikaji oleh beberapa ahli menggunakan asumsi spesifik berbeda. Sebagaimana dapat diterka, asumsi yang berbeda akan menghasilkan kesimpulan yang berbeda pula. Dalam paper ? ditunjukkan bahwa jika elastisitas permintaan meningkat dengan waktu (karena ditemukannya barang substitusi misalnya), atau jika biaya ekstraksi adalah konstan per unit ekstraksi tetapi menurun dengan waktu (karena teknologi yang lebih baik misalnya), maka monopolis cenderung lebih konservasionistik ketimbang di bawah optimum sosial. Tetapi kesimpulan sebaliknya ditunjukkan oleh ?, bahwa dengan asumsi biaya ekstraksi tidak berubah akibat laju ekstraksi (biaya kapital, biaya sewa, dan sebagainya adalah biaya tetap), dan bahwa elastisitas permintaan meningkat dengan konsumsi (harga yang cukup rendah dan menarik banyak pengguna pada margin untuk beralih dari barang substitusi).

8.2.2 Kompetitif vs Monopoli: Jangka Waktu Ekstraksi Tertentu

Formulasi problem secara umum bagi firma i adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \int_0^T [p(t)x_i(t) - c_i(x_i(t))]e^{-rt} dt \\ \dot{S}(t) = -x_i(t) \\ S_i(0) = S_{0i} \quad S_i(T) \text{ bebas} \quad T \text{ tertentu} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Perhatikan bahwa formulasi ini sangat mirip dengan formulasi Problem (8.7); perbedaan terletak pada kendala, yakni $S(T) = 0$ dan T be-

bas dalam Problem (8.7) menjadi $S(T)$ bebas dan T tertentu dalam Problem (8.12). Present Hamiltonian dan kondisi keharusan bagi optimum adalah sama dengan problem sebelumnya. Hanya saja, kondisi terminal yang harus dipenuhi untuk kasus jangka waktu ekstraksi tertentu adalah $\theta(T) = 0$. Tetapi, $\dot{\theta} = 0$ yang berarti bahwa θ adalah konstan. Ringkasnya, θ adalah konstan dan sama dengan nol. Oleh karena itu, kondisi yang harus dipenuhi bagi optimum adalah

$$[p(t) - c'_i(x_i(t))] = 0 \quad (8.13)$$

Kondisi terminal $\theta = 0$ juga berlaku bagi kasus monopoli, sehingga syarat keharusan yang harus dipenuhi bagi optimum adalah

$$[p(x(t)) + p'(x(t))x(t) - c'(x(t))] = 0 \quad (8.14)$$

Revenue marginal dikurangi biaya marginal adalah sama dengan nol.

8.2.3 Beberapa Contoh

8.2.3.1 Kompetitif dan Stok Akhir Tertentu

1. Diasumsikan bahwa permintaan sumberdaya ini akan selalu ada terlepas dari harga yang terjadi. Formulasi problem secara umum adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \max \left\{ \int_0^T [p(t)x(t) - cx(t)]e^{-rt} dt \right. \\ \left. \begin{aligned} \dot{S}(t) &= -x(t) \\ S(0) &= S_0 \quad S(T) = 0 \quad T \text{ bebas} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8.15)$$

Problem ini dibaca sebagai berikut. Pengelola sumberdaya alam berupaya untuk memaksimalkan nilai kini bersih dari aliran keuntungan selama T periode mengeksploitasi sumberdaya alam

yang bersangkutan melalui pengaturan sekuen laju ekstraksi dan sekuen stok sumberdaya sepanjang periode pengelolaan. Permintaan dari sumberdaya, misalnya, adalah sebagai berikut:

$$x(t) = ap(t)^{-\beta}$$

sedangkan dinamika harga mengikuti

$$\dot{p} = rp(t) \implies p(t) = p_0 e^{rt}$$

Untuk selanjutnya, demi kesederhanaan notasi, indeks t akan dihilangkan bila dipandang tidak menimbulkan kerancuan. Present Hamiltonian dari problem ini adalah

$$H = [p(x(t))x(t) - cx(t)]e^{-rt} - \theta x \quad (8.16)$$

Karena Hamiltonian ini linear dalam x , maka untuk memaksimalkan H dipilih x maksimum jika $[p(x) - c]e^{-rt} > \theta$ dan $x = 0$ jika $[p(x) - c]e^{-rt} < \theta$. Namun, ekstraksi maksimum tersebut dibatasi oleh permintaan, sehingga:

$$x(t) = ap_0^{-\beta} e^{-\beta rt} \quad (8.17)$$

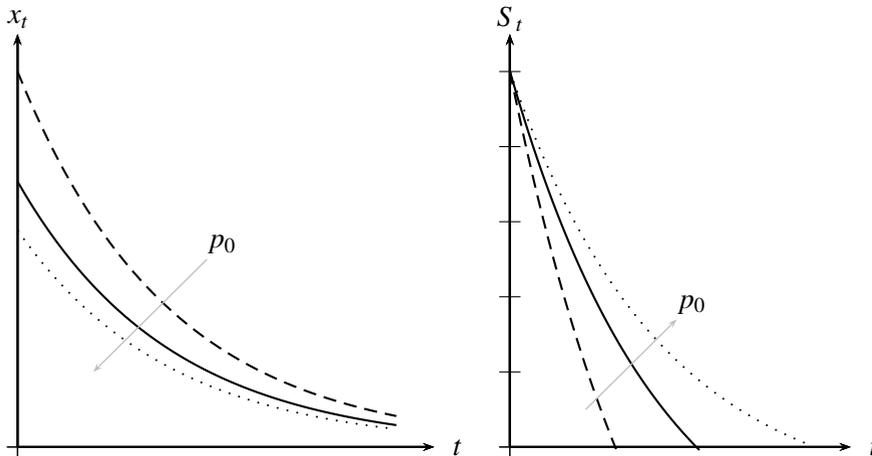
Stok sumberdaya S_0 akan dihabiskan selama jangka waktu tertentu T yang akan dihitung kemudian. Jadi

$$S_0 = \int_0^T ap_0^{-\beta} e^{-\beta rt} dt = \frac{ap_0^{-\beta}}{\beta r} [1 - e^{-\beta rT}] \quad (8.18)$$

Solusi bagi T adalah sebagai berikut:

$$T^* = \frac{1}{\beta r} [\ln((\) a) - \ln((\) a - S_0 p_0^\beta \beta r)] \quad (8.19)$$

Terlihat bahwa semakin besar nilai p_0 semakin besar pula nilai jangka waktu optimal, T^* . Semakin besar p_0 semakin rendah pula jumlah sumberdaya yang diminta, sehingga diperlukan waktu yang lebih lama untuk menghabiskan stok sumberdaya yang tersedia.



Gambar 8.2: Lintasan Ekstraksi dan Stok Optimal

2. Sekarang diasumsikan bahwa permintaan adalah dibatasi oleh adanya barang pengganti, yakni jika harga dari sumberdaya mencapai level tertentu, sebut saja dengan harga maksimum, maka konsumen akan beralih ke barang pengganti. Dengan kata lain, harga sumberdaya tidak dapat naik secara terus menerus seperti dalam kasus di atas. Oleh karena itu, penambahan kendala berupa harga maksimum sebenarnya telah mengubah problem dari problem dengan kondisi terminal garis akhir horisontal menjadi problem dengan kondisi terminal titik akhir tertentu. Dengan

kata lain, kondisi yang harus dipenuhi adalah $T = \bar{T}$ dan $S(\bar{T}) = 0$. Dengan demikian, formulasi problemnya menjadi

$$\begin{aligned} \max \left\{ \int_0^T [p(t)x(t) - cx(t)]e^{-rt} dt \right. \\ \left. \begin{aligned} \dot{S}(t) &= -x(t) \\ S(0) &= S_0 \quad S(T) = 0 \quad T = \bar{T} \end{aligned} \right. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Present Hamiltonian dan syarat keharusan persis sama dengan problem sebelumnya.

Jika waktu yang diperlukan untuk mencapai \bar{p} adalah \bar{T} , maka hubungan berikut berlaku

$$\bar{p} = p_0 e^{r\bar{T}} \quad (8.21)$$

yang dapat dipecahkan bagi \bar{T} sehingga diperoleh:

$$\bar{T} = \frac{1}{r} [\ln(\bar{p}) - \ln(p_0)] \quad (8.22)$$

Karena $S(T) = 0$ maka jika $T < \bar{T}$ maka solusi kasus sebelumnya masih dapat digunakan. Tetapi, jika $T > \bar{T}$ maka solusi baru harus dicari, karena jika tidak maka kendala $S(T) = 0$ tidak akan terpenuhi; jika \bar{T} telah tercapai dan $S(\bar{T}) > 0$, maka stok sumberdaya yang tersisa tidak akan pernah terpakai.

$$S_0 = \int_0^{\bar{T}} ap_0^{-\beta} e^{-\beta r t} dt = \frac{ap_0^{-\beta}}{\beta r} [1 - e^{-\beta r \bar{T}}] \quad (8.23)$$

Persamaan ini dapat dipecahkan untuk mendapatkan jangka waktu pemanfaatan optimal:

$$\bar{T} = \frac{1}{\beta r} [\ln(a) - \ln(a - S_0 p_0^\beta \beta r)] \quad (8.24)$$

Menggunakan Persamaan (8.22) dan (8.24) akan diperoleh

$$p_0 = \left(\frac{a}{\frac{a}{\bar{p}^\beta} + S_0 \beta r} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (8.25)$$

Mensubstitusikan hasil ini ke dalam Persamaan (8.17) akan diperoleh:

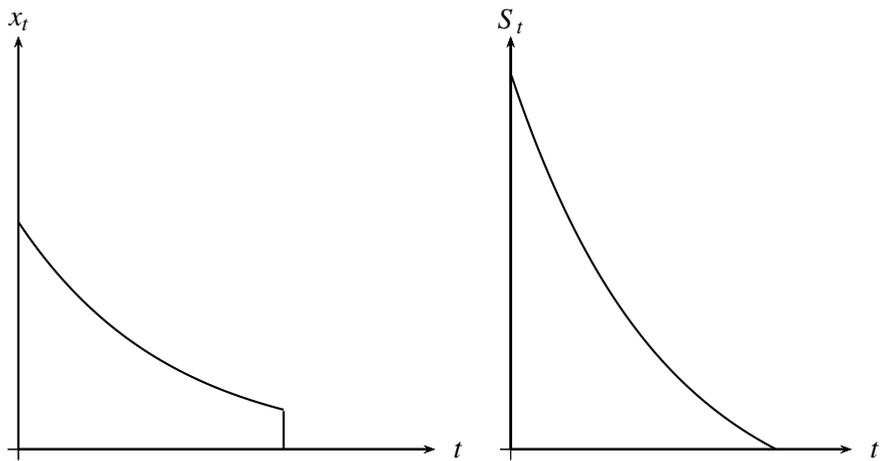
$$x(t) = \left(\frac{a}{\bar{p}^\beta} + \beta r S_0 \right) e^{-\beta r t} \implies x_0 = \left(\frac{a}{\bar{p}^\beta} + \beta r S_0 \right) \quad (8.26)$$

Ekstraksi optimal ditentukan oleh stok awal dan harga maksimum; semakin tinggi harga maksimum semakin rendah tingkat ekstraksi optimal sepanjang periode pemanfaatan, sebaliknya semakin besar stok awal semakin besar tingkat ekstraksi optimalnya.

$$\bar{T} = \frac{1}{\beta r} \left(\frac{\beta r S_0 \bar{p}^\beta}{a} + 1 \right) \quad (8.27)$$

Kondisi terminal yang harus dipenuhi adalah

$$p(T) = \bar{p}$$



Gambar 8.3: Lintasan Ekstraksi dan Stok Optimal dengan Harga Maksimum