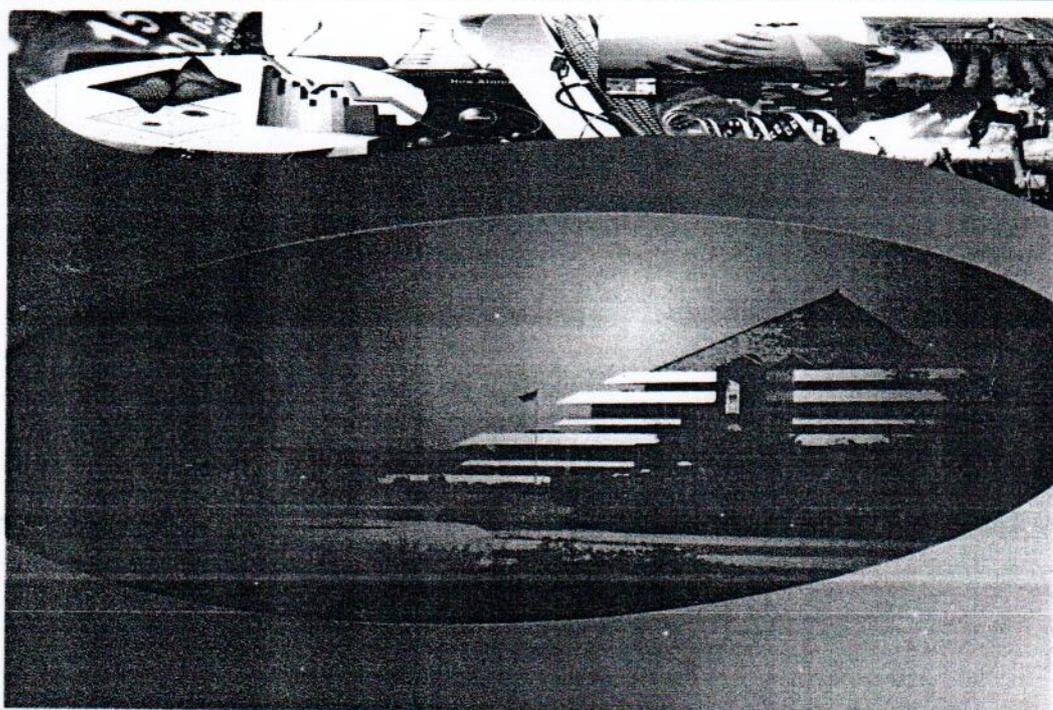


ISBN : 978-979-95093-8-3

PROSIDING

Seminar Nasional Sains V

Sains Sebagai Landasan Inovasi dalam Bidang Energi, Lingkungan dan Pertanian Berkelanjutan



BUKU I
Statistika, Matematika, Ilmu Komputer, Fisika

Diterbitkan Oleh :



Institut Pertanian Bogor
Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam

ISBN: 978-979-95093-8-3

Seminar Nasional Sains V

10 November 2012

Sains Sebagai Landasan Inovasi dalam Bidang Energi, Lingkungan dan Pertanian Berkelanjutan

Prosiding

Dewan Editor

Dr. Kiagus Dahlan
Dr. Sri Mulijani
Dr. Endar Hasafah Nugrahani
Dr. Suryani
Dr. Anang Kurnia
Dr. Tania June
Dr. Miftahudin
Dr. Charlena
Dr. Paian Sianturi
Sony Hartono Wijaya, M Kom
Dr. Tony Ibnu Sumaryada
Waras Nurcholiz, M Si.
Dr. Indahwati
Drs. Ali Kusnanto, M Si.



Fakultas Matematika dan
Ilmu Pengetahuan Alam

Institut Pertanian Bogor
2012



ISBN: 978-979-95093-8-3

Seminar Nasional Sains V

10 November 2012

Sains Sebagai Landasan Inovasi dalam
Bidang Energi, Lingkungan dan Pertanian
Berkelanjutan

Prosiding

Devan Editor

Dr. Kicgus Dorian

Dr. Sri Mulyani

Dr. Endang Hastuti Nugroho

Dr. Supriani

Dr. Anang Kurnia

Dr. Tania Lina

Dr. Miftahudin

Dr. Chastana

Dr. Pawan Siantan

Dr. Herono Wijaya, M. Kom

Dr. Tony Lina Samsudha

Copyright© 2012

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Institut Pertanian Bogor

Prosiding Seminar Nasional Sains V " Sains Sebagai Landasan Inovasi dalam Bidang Energi,
Lingkungan dan Pertanian Berkelanjutan" di Bogor pada tanggal 10 November 2012

Penerbit : FMIPA-IPB, Jalan Meranti Kampus IPB Dramaga, Bogor 16680

Telp/Fax: 0251-8625481/8625708

<http://fmipa.ipb.ac.id>

Terbit 10 November 2012

xi + 866 halaman

ISBN: 978-979-95093-8-3.



KATA PENGANTAR

Seminar Nasional Sains adalah kegiatan rutin yang diselenggarakan oleh Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Institut Pertanian Bogor sejak Tahun 2008. Tahun ini adalah penyelenggaraan yang ke-5, dengan tema “Sains Sebagai Landasan Inovasi dalam Bidang Energi, Lingkungan dan Pertanian Berkelanjutan”.

Kegiatan ini bertujuan mengumpulkan peneliti-peneliti dari berbagai institusi pendidikan dan penelitian baik perguruan tinggi maupun lembaga-lembaga penelitian dari seluruh Indonesia untuk memaparkan hasil-hasil penelitian terkait penerapan sains (statistik, biosains, klimatologi, kimia, matematika, ilmu komputer, fisika, dan biokimia) pada peningkatan produktivitas pertanian dalam arti luas. Seminar Nasional Sains V ini akan diikuti oleh lebih dari 200 orang peserta dengan sekitar 80 peserta sebagai pemakalah pada sesi presentasi paralel yang berasal dari berbagai perguruan tinggi dan lembaga penelitian di Indonesia.

Diharapkan dari kegiatan ini dapat memberikan informasi perkembangan sains, memicu inovasi-inovasi teknologi yang berlandaskan sains, meningkatkan interaksi dan komunikasi antar peneliti, pemerhati, dan pengguna sains dan teknologiserata menjalin kerjasama riset dan penerapan sains dan teknologi antar peneliti, pemerhati, dan pengguna sains dan teknologi khususnya yang terkait dengan peningkatan produktivitas pertanian.

Pantia mengucapkan selamat mengikuti seminar, semoga memberikan manfaat sebesar-besarnya.

Bogor, Oktober 2012

PANITIA

DAFTAR ISI BUKU 1

			Hal
	Kata Pengantar		iv
	Daftar Isi		v
<i>Bidang : Statistika</i>			
No.	Penulis	Judul	Hal
1	Andzar Syafa'atur Rahman, Hari Wijayanto, Noer Azam Achسانی, La Ode Abdul Rahman	Penerapan <i>Fuzzy C-Regression</i> dalam Pendugaan Model Nilai Tanah (Studi Kasus : Lima Kecamatan Di Kota Bekasi)	3-12
2	I Dewa Gede Richard Alan Amory, Muhammad Nur Aidi, Eth Sudarnika	Penerapan Fungsi Diskriminan dalam Deteksi Dini Penentuan Status Mastitis Subklinis pada Sapi Perah (Studi Kasus : Kawasan Usaha Ternak Cibungbulang, Kabupaten Bogor Tahun 2010-2011)	13-23
3	Nurul Qomariasih, I Made Sumertajaya, Sutoro	Analisis Ragam Daya Gabung dan Resiprokal Bobot Biji Jagung dalam Persilangan Dialel Lengkap	24-34
4	Astri Fitriani, Yenni Angraini, Asep Saefuddin	Analisis Spasial Data Panel pada Pola Konsumsi per Kapita Propinsi Jawa Barat dengan Pendekatan Matriks <i>Queen Contiguity</i> dan Akses Jalan	35-48
5	Bimandra Adiputra Djaafara, Anik Djuraidah, Aji Hamim Wigena	Deteksi Gerombol dengan Metode K-Rataan Kernel Gauss	49-62
6	Dwi Haryo Ismunarti	Sudut Minimum Antar Sub Ruang Vektor untuk Memelajari Asal Sedimen Di Perairan Rebon Kabupaten Batang Jawa Tengah	63-72
7	Mia Amelia, Muhammad Nur Aidi, Dian Kusumaningrum	Penerapan Regresi Logistik Spasial untuk Data Penyakit Demam Berdarah Dengue (Dbd) Di Kota Bogor	73-81
8	Nuril Anwar, Anang Kurnia, Yenni Angraini	Pemodelan Tingkat Pengangguran Di Lima Negara Anggota Asean Dengan Regresi Data Panel dan <i>Generalized Estimating Equation</i>	82-93
9	Gusti N.A. Wibawa, Aunuddin, A.A. Mattjik, I M Sumertajaya	Pengaruh Ulangan Terhadap Dugaan Parameter Model Ammi dengan Komputasi Menggunakan Pendekatan Bayes	94-106
10	Didin Saepudin, Asep Saefuddin	Regresi Poisson Terboboti Geografis untuk Menganalisis Data Gizi Buruk (Studi Kasus: Pulau Jawa tahun 2008)	107-121
11	Mulya Sari, Hari wijayanto, Yenni	Pemodelan Produksi Cabe Di Kabupaten Majalengka dengan Regresi Polinom	122-134

	Angraini		
12	Anita Pratiwi, Anang Kurnia, La Ode Abdul Rahman	Pendugaan Total Populasi pada Peubah dengan Sebaran Lognormal (Studi Kasus: Data Susenas 2007 Pengeluaran Rumah Tangga Kota Bogor)	135-149
13	Anni Fithriyatul Mas'udah, Anang Kurnia, Dian Kusumaningrum	Metode Regresi <i>Least Trimmed Squares</i> pada Data yang Mengandung Pencilan	150-161
14	Mohammad Masjkur	Model Spasial Percobaan Pemupukan Padi Sawah	162-170
15	Nur Hikmah, Yenni Angraini, Asep Saefuddin	Pemodelan tingkat produk domestik regional bruto kabupaten/kota jawa barat dengan spasial data panel	171-185

Bidang : Matematika

No.	Penulis	Judul	Hal
1	Hamzah Upu	Proses Pengembangan Perangkat Pembelajaran Matematika Bertaraf Internasional	189-203
2	M. W. Talakua, F. Y. Rumlawang, F. Kondo Lembang dan G. Loupatty	Pereduksian dimensi data luaran gcm stasiun ambon dengan menggunakan metode <i>principal component analysis</i> (pca)	204-212
3	Nur Aprianti Dwiycita, Farida Hanum, Toni Bakhtiar	Penjadwalan Kereta Api Jalur Ganda: Model Job-Shop dan Aplikasinya	213-223
4	Nurus Sa'adah, Toni Bakhtiar, Farida Hanum	Penerapan Prinsip Maksimum Pontryagin pada Sistem Inventori-Produksi	224-235
5	Muhammad Ilyas, Mieko Yamada, Edy Tri Baskoro	Daftar Lengkap Katakode GEH dengan Bobot Lee Minimum atas Ring Galois	236-245
6	Embay Rohaeti, Jaharuddin, Ali Kusnanto	Penggunaan Metode Homotopi Pade' Untuk Menyelesaikan Masalah Lotka-Volterra Logistik	246-257
7	Dewi Senja Rahmahwati, Ali Kusnanto, Jaharuddin	Analisis Kestabilan Model Infeksi Virus Hepatitis B dengan Pertumbuhan Hepatosit yang Bersifat Logistik	258-270
8	Jacob Stevy Seleky, Endar H. Nugrahani, I Gusti Putu Purnaba	Pengaruh Dividen Terhadap Penentuan Nilai Opsi Saham Tipe <i>Up-and-Out Call</i> di Bursa Efek Indonesia	271-282
9	Nurul Khotimah, Farida Hanum, Toni Bakhtiar	Penerapan <i>fuzzy goal programming</i> dalam penentuan investasi bank	283-292
10	Maya Widyastiti, Farida Hanum, Toni Bakhtiar	Implementasi <i>fleet size and mix vehicle routing problem with time windows</i> pada pendistribusian koran	293-302

✓ 11	Jose Bonatua Hasibuan, Endar H. Nugrahani, I Gusti Putu Purnaba	Modifikasi Model <i>Exponentially Weighted Moving Average</i> Untuk Menduga Volatilitas Saham Di Bursa Efek Indonesia	304-314
✓ 12	Endar H. Nugrahani	Penyelesaian masalah nilai batas pada model opsi <i>put</i> amerika dengan volatilitas stokastik	315-322
✓ 13	Bib Paruhum Silalahi	Batas Atas Iterasi metode titik Interior dengan Central Path dalam menyelesaikan masalah optimasi linear	323-332

Bidang : Ilmu Komputer

No.	Penulis	Judul	Hal
1	I. Widyastuti, S. H. Wijaya	Penentuan Rute Optimum Dalam Supply Chain Network dengan Algoritma Ant Colony untuk Kota Dan Kabupaten Bogor	336-345

Bidang : Fisika

No.	Penulis	Judul	Hal
1	Novizal, Eva Ridiwati, Kemas A. Zaini Thosin	Analisis Hasil Pelapisan Coni Pada Subtrat Baja St 37 Dengan Kombinasi Metode Deposisi Elektroplating Menggunakan <i>Scanning Electron Microscope (Sem)</i>	349-358
2	M. N Indro, H. Wiranata, and S.G. Sukaryo	Hardness and Corrosion Rate of CoCrMo	359-364
3	M. Dirgantara, M. Saputra, P. Aulia, Z. Deofarana, B. Setiadi, H. Syafutra, A. Kartono	Simulasi sel surya model dioda dengan hambatan seri dan hambatan <i>shunt</i> berdasarkan variasi intensitas radiasi, temperatur, dan susunan modul	365-374
4	Faozan Ahmad, Zuliyatin, Husin Alatas	Dinamika soliton pada rantai protein alpha heliks berdasarkan ansatz ii model davydov	375-384
5	Elvan Yuniarti, Siti Ahmiatri Qolby Sabrina	Kajian sifat optik glukosa darah	385-392
6	Tony Sumaryada, Heriyanto Syafutra, Robi Sobirin, Ajeng Widya Roslia	Simulasi awal perancangan sel surya <i>double junction</i> gaas/ge	393-403
7	Ajeng Widya Roslia, Tony Sumaryada	Pengaruh <i>surface texturing</i> germanium (ge) dan silikon (si) pada disain sel surya menggunakan program pcid	404-413
8	Leni Marlina, Ida Sriyanti, Feri Iskandar dan Khairurrijal	Pengaruh waktu <i>hot-pressing</i> terhadap kekuatan tekan material nanokomposit	414-424
9	Ida Sriyanti	Pengembangan elektronik kamus untuk mata kuliah fisika dasar	425-435

PENJADWALAN KERETA API JALUR GANDA: MODEL JOB-SHOP DAN APLIKASINYA

Nur Aprianti Dwiycita, Farida Hanum, Toni Bakhtiar

Departemen Matematika FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680

ABSTRAK

Penjadwalan perjalanan kereta api merupakan masalah yang kompleks dan tidak mudah diselesaikan mengingat banyaknya aturan dan batasan yang harus dipenuhi. Makalah ini membahas masalah penjadwalan kereta api jalur ganda. Pendekatan *job-shop modeling* digunakan untuk memformulasikan masalah penjadwalan dalam bentuk pemrograman linear bilangan bulat dengan tujuan meminimumkan total waktu tempuh maksimum. Model diaplikasikan pada masalah penjadwalan perjalanan kereta api MRT Lebak Bulus-Sisingamangaraja yang melibatkan 7 stasiun dan 18 kereta api berkelas ekonomi dan ekspres. Jadwal perjalanan dalam bentuk diagram ruang-waktu diberikan.

Katakunci: penjadwalan kereta api, jalur ganda, model *job-shop*.

1 PENDAHULUAN

Sarana transportasi yang aman, nyaman, dan cepat sangat dibutuhkan oleh masyarakat, khususnya yang memiliki mobilitas tinggi dalam kesehariannya. Fenomena ibukota sebagai pusat dari kegiatan perekonomian mencerminkan bahwa sudah selayaknya sistem transportasi yang ada minimal memenuhi ketiga standar tersebut. Salah satu alat transportasi darat yang dapat mengangkut massa dalam jumlah banyak, cepat, dan murah adalah kereta api.

Sistem penjadwalan kereta api yang optimal harus diperhatikan dalam menciptakan lalu lintas kereta api yang sesuai dengan aturan-aturan perkeretaapian. Sistem penjadwalan kereta api yang efektif dan efisien juga akan meminimalisasi terjadinya penumpukan penumpang di stasiun akibat adanya penundaan keberangkatan kereta api. Masalah penjadwalan kereta api merupakan hal yang tidak mudah diselesaikan terlebih pada jalur kereta api yang cukup kompleks. Terdapat banyak aturan atau batasan yang harus dipenuhi dalam memecahkan masalah ini. Salah satunya adalah bagaimana perjalanan suatu kereta api dapat berlangsung tanpa terjadi tumpang tindih dengan perjalanan kereta api yang lainnya. Masalah penjadwalan kereta api dapat dipandang sebagai implementasi masalah penjadwalan *job-shop* secara khusus; perjalanan-perjalanan kereta api dianggap sebagai sekumpulan

pekerjaan (*jobs*) yang dijadwalkan pada sekumpulan sumber daya (*resources*) yang berupa segmen-segmen jalur kereta api [1]. Dalam tulisan ini akan dibahas penyelesaian masalah penjadwalan kereta api menggunakan model penjadwalan *job-shop* dengan meminimumkan total waktu tempuh perjalanan. Pemodelan tersebut akan dilakukan pada kasus kereta api dengan jalur ganda.

2 Masalah Penjadwalan *Job-Shop*

Terdapat tiga istilah yang digunakan dalam pembahasan masalah penjadwalan. Ketiga istilah tersebut adalah pekerjaan (*job*), prosesor (*processor*), dan operasi (*operation*). Pekerjaan merupakan sekumpulan aktivitas yang harus diproses, misalnya pembuatan suatu barang pada pabrik manufaktur atau operasi bedah yang akan dilakukan di suatu rumah sakit. Prosesor adalah sumber daya yang digunakan untuk memproses pekerjaan, misalnya dapat berupa mesin atau alat-alat kedokteran. Prosesor juga disebut sebagai sumber daya (*resource*) atau mesin (*machine*). Operasi merupakan aktivitas pemrosesan dari suatu pekerjaan. Berdasarkan ketiga istilah tersebut, masalah penjadwalan dapat diartikan sebagai proses pengalokasian sumber daya untuk suatu operasi pada periode waktu tertentu [2]. Apabila terdapat dua atau lebih pekerjaan menggunakan prosesor yang sama pada saat yang sama pula, maka suatu jadwal belum disebut sebagai jadwal yang fisibel.

Representasi dari penjadwalan dalam suatu industri biasanya ditampilkan dengan menggunakan diagram *Gantt* [2]. Diagram tersebut memperlihatkan pemrosesan setiap pekerjaan pada sumber daya yang tersedia dalam bentuk balok-balok sepanjang waktu tertentu.

Masalah penjadwalan *job-shop* merupakan masalah pengalokasian sumber daya untuk setiap operasi yang diproses sesuai dengan urutan yang ditentukan. Hal ini dapat diartikan bahwa urutan operasi dari suatu pekerjaan dapat berbeda dengan pekerjaan yang lainnya, namun operasi-operasi tersebut diproses berdasarkan jadwal penggunaan mesin yang ditentukan. Apabila dilambangkan secara matematis, pada umumnya masalah penjadwalan *job-shop* memiliki karakteristik sebagai berikut [3]:

- terdapat sekumpulan n pekerjaan $J = \{J_1, J_2, J_3, \dots, J_n\}$,
- terdapat sekumpulan m sumber daya $M = \{M_1, M_2, M_3, \dots, M_m\}$,

- setiap pekerjaan memiliki sekumpulan operasi (J); pekerjaan ke- i (J_i) memiliki urutan operasi ($o_{i1}, o_{i2}, o_{i3}, \dots, o_{ik}$), dengan k merupakan banyaknya operasi yang dilakukan untuk pekerjaan i ,
- setiap sumber daya dapat beroperasi maksimum satu operasi dalam selang waktu tertentu,
- setiap operasi dari suatu pekerjaan di sebuah sumber daya membutuhkan sejumlah waktu minimum; waktu minimum pekerjaan ke- i beroperasi di sumber daya ke- j dilambangkan dengan p_{ij} , untuk $1 \leq i \leq n$ dan $1 \leq j \leq m$.

Tujuan dari penyelesaian masalah penjadwalan *job-shop* adalah menentukan jadwal suatu pekerjaan yang fisibel dengan mempertimbangkan urutan pemrosesan dan kapasitas dari setiap sumber daya. Salah satu kriteria optimasi pada masalah penjadwalan *job-shop* adalah meminimumkan waktu maksimum pemrosesan dari setiap pekerjaan (*makespan*) yang dilambangkan dengan C_{maks} [4].

3 MODEL

3.1 Asumsi dan Notasi

Masalah penjadwalan kereta api pada karya ilmiah ini akan dimodelkan dengan mempertimbangkan asumsi-asumsi sebagai berikut:

- 1 model dibangun untuk kasus kereta api jalur ganda,
- 2 satuan waktu terkecil yang digunakan dalam penjadwalan adalah menit,
- 3 tidak ada urutan prioritas kereta api yang akan menggunakan petak blok yang sama.

Model penjadwalan kereta api pada karya ilmiah ini dirancang sebagai alat untuk merencanakan jadwal kereta api pada periode operasi tertentu. Jadwal yang akan dihasilkan merupakan jadwal faktual. Jadwal aktual akan sama dengan jadwal faktual apabila tidak terjadi gangguan operasional seperti pemadaman listrik, bencana alam yang mengakibatkan kerusakan infrastruktur, gangguan sinyal, dan lain sebagainya. Referensi utama yang digunakan penulis dalam memodelkan masalah penjadwalan kereta api jalur ganda adalah tulisan Higgins *et al.* (1996) di [5].

Notasi-notasi yang akan digunakan pada model penjadwalan kereta api sebagai kasus khusus dari masalah penjadwalan *job-shop* didefinisikan sebagai berikut: n = banyaknya kereta api, m = banyaknya petak blok, q = banyaknya stasiun, S = himpunan stasiun = $\{1, 2, \dots, q\}$, J = himpunan kereta api = $\{1, 2, \dots, n\}$, J_i = perjalanan kereta api i ($i = 1, 2, \dots, n$), o_{ik} = operasi di petak blok k ($k = 1, 2, \dots, m$), dari kereta api i , h = *time headway*, X_{ias} = waktu kedatangan kereta api i di stasiun s , X_{ids} = waktu keberangkatan kereta api i dari stasiun s , d_k = panjang petak blok k , v_{ik} = kecepatan rata-rata minimum kereta api i di petak blok ke- k , \bar{v}_k = kecepatan rata-rata maksimum kereta api i di petak blok ke- k , p_{is} = lama waktu berhenti kereta api i di stasiun s , τ_{is} = waktu *delay* kereta api i di stasiun s , M = bilangan bulat positif besar, C_{maks} = waktu tempuh maksimum.

Didefinisikan variabel biner untuk beberapa kondisi antara dua kereta api yang akan terjadi konflik, yaitu $A_{ijk} = 1$ jika kereta api *outbound* i menggunakan petak blok k sebelum kereta api *outbound* i , dan $A_{ijk} = 0$ jika selainnya, serta $B_{ijk} = 1$ jika kereta api *inbound* i menggunakan petak blok k sebelum kereta api *inbound* i , dan $B_{ijk} = 0$ jika selainnya. Kereta api *outbound* merupakan jenis kereta api yang melakukan perjalanan dari stasiun ke-1 ke arah stasiun ke- q , sedangkan kereta api *inbound* merupakan jenis kereta api yang melakukan perjalanan dengan arah sebaliknya.

3.2 Fungsi Objektif

Tujuan penjadwalan kereta api pada karya ilmiah ini adalah meminimumkan total waktu tempuh maksimum. Hal ini dapat dihitung berdasarkan selisih antara waktu kedatangan di stasiun pertama dan waktu keberangkatan dari stasiun akhir kembali ke stasiun awal atau masuk ke dalam depo. Ditulis,

$$\min C_{max} = \sum_{i=1}^r (X_{idq} - X_{ia1}) + \sum_{i=r+1}^n (X_{id1} - X_{iaq}),$$

dengan X_{ia1} = waktu kedatangan kereta api i di stasiun ke-1, untuk $i = 1, 2, \dots, r$, X_{idq} = waktu keberangkatan kereta api i dari stasiun ke- q untuk kembali ke stasiun pertama atau masuk ke dalam depo, dengan $i = 1, 2, \dots, r$, X_{iaq} = waktu kedatangan kereta api i di stasiun ke- q , untuk

$i = r+1, r+2, \dots, n$, X_{id1} = waktu keberangkatan kereta api i dari stasiun ke-1 untuk kembali ke stasiun pertama atau masuk ke dalam depo, dengan $i = r+1, r+2, \dots, n$.

3.3 Fungsi Kendala

Kendala-kendala yang harus dipenuhi dalam rangka mendapatkan solusi jadwal kereta api yang fisibel ialah sebagai berikut:

Kendala 1 (Urutan Operasi)

$$X_{ias} + p_{is} + \tau_{is} = X_{ids}, \quad i \leq r, \quad s = 1, 2, \dots, q.$$

$$X_{ias} + p_{is} + \tau_{is} = X_{ids}, \quad i > r, \quad s = q, q-1, \dots, 1.$$

Kedua kendala di atas dikembangkan dari konsep masalah penjadwalan *job-shop*, yaitu operasi ke- $(k+1)$ pada pekerjaan J_i hanya bisa dimulai setelah operasi ke- k telah selesai dikerjakan. Waktu dimulainya operasi $o_{i(k+1)}$ yaitu X_{ids} harus lebih dari atau sama dengan waktu dimulainya operasi o_{ik} yaitu X_{ias} ditambah lama waktu pemrosesannya yaitu p_{is} . Selain itu, terdapat variabel *delay* (τ_{is}) yang merupakan lama waktu penundaan dari suatu perjalanan kereta api i di stasiun s untuk menghindari konflik. Waktu tiba kereta api di stasiun pertama merupakan waktu tiba kereta api yang keluar dari depo atau waktu kembali dari stasiun tujuan akhir ke stasiun asal.

Kendala 2 (Aturan Penyusulan)

Dua kendala pertama digunakan apabila nilai $A_{ijk} = 0$, yaitu perjalanan kereta api J_j didahulukan, sehingga kereta api j tiba lebih awal dari kereta api i di stasiun berikutnya. Nilai h juga ditambahkan agar terdapat jarak antarkereta api ketika keluar dan masuk stasiun. Dua kendala berikutnya dapat dijelaskan dengan cara yang sama dengan nilai $A_{ijk} = 1$, yaitu kereta api i berangkat lebih dulu dari j .

$$MA_{ijk} + X_{ia(s+1)} \geq X_{ja(s+1)} + h, \quad i \neq j; \quad s = 1, 2, \dots, q-1; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$$MA_{ijk} + X_{ids} \geq X_{jds} + h, \quad i \neq j; \quad s = 1, 2, \dots, q-1; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$$M(1-A_{ijk}) + X_{ja(s+1)} \geq X_{ia(s+1)} + h, \quad i \neq j; \quad s = 1, 2, \dots, q-1; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

$$M(1-A_{ijk}) + X_{jds} \geq X_{ids} + h, \quad i \neq j; \quad s = 1, 2, \dots, q-1; \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Aturan penyusunan pada kereta api *inbound* juga dapat dijelaskan dengan cara yang sama seperti kereta api *outbound*. Aturan tersebut dinyatakan dalam kendala berikut:

$$MB_{ijk} + X_{ias} \geq X_{jas} + h, i \neq j; s = q-1, q-2, \dots, 1; k = m, m-1, \dots, 1.$$

$$MB_{ijk} + X_{id(s+1)} \geq X_{jd(s+1)} + h, i \neq j; s = q-1, q-2, \dots, 1; k = m, m-1, \dots, 1.$$

$$M(1 - B_{ijk}) + X_{jas} \geq X_{ias} + h, i \neq j; s = q-1, q-2, \dots, 1; k = m, m-1, \dots, 1.$$

$$M(1 - B_{ijk}) + X_{jd(s+1)} \geq X_{id(s+1)} + h, i \neq j; s = q-1, q-2, \dots, 1; k = m, m-1, \dots, 1.$$

Kendala 3 (Aturan Lama Waktu Beroperasi)

Waktu penggunaan sumber daya pada masalah penjadwalan *job-shop* secara umum diberikan sebagai input. Waktu tersebut pada masalah penjadwalan kereta api sama dengan jarak tempuh dibagi dengan kecepatan rata-ratanya. Waktu rata-rata minimum dan maksimum penggunaan suatu petak blok untuk kereta api *outbound* dan *inbound* diberikan oleh kendala-kendala berikut:

$$\frac{d_k}{\bar{v}_{ik}} \leq X_{ia(s+1)} - X_{ids} \leq \frac{d_k}{\underline{v}_{ik}}, i = 1, 2, \dots, r, k = 1, 2, \dots, m, s = 1, 2, \dots, q-1.$$

$$\frac{d_k}{\bar{v}_{ik}} \leq X_{ia(s)} - X_{id(s+1)} \leq \frac{d_k}{\underline{v}_{ik}}, i = r+1, r+2, \dots, n, k = m, m-1, \dots, 1, s = q-1, q-2, \dots, 1.$$

Kendala 4 (Stasiun Pemberhentian)

Kendala (22) menggambarkan bahwa apabila kereta api tidak berhenti di stasiun ke- s , maka waktu kedatangan dan keberangkatan kereta api tersebut di stasiun ke- s adalah sama. Selain itu, sebagai input, waktu tunggu di stasiun tersebut bernilai nol. Ditulis,

$$X_{ias} = X_{ids}, i \in J, s \in S.$$

Kendala 5 (Ketaknegatifan dan Biner)

Selain kendala-kendala yang telah dijelaskan sebelumnya, terdapat kendala ketaknegatifan dan kendala biner. Kedua kendala tersebut secara berturut-turut didefinisikan sebagai berikut,

$$h, p_{is}, X_{ias}, X_{ids} \geq 0, A_{ijk}, B_{ijk} \in \{0,1\}.$$

4 APLIKASI MODEL

Aplikasi model pada karya ilmiah ini akan diterapkan pada kasus kereta api jalur ganda MRT (*Mass Rapid Transit*) rute Lebak Bulus-Sisingamangaraja, dengan asumsi sebagai berikut:

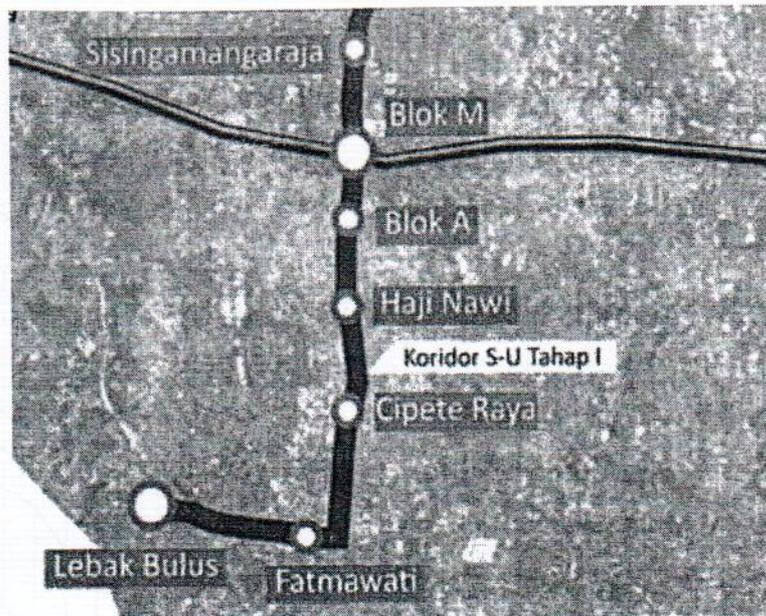
- 1 banyaknya kereta api jenis *outbound* (Lebak Bulus-Sisingamangaraja) adalah 10 unit dan jenis *inbound* (Sisingamangaraja-Lebak Bulus) 8 unit,
- 2 waktu simulasi dimulai pada pukul 06.00 WIB,
- 3 simulasi penjadwalan pada setiap kereta api dilakukan untuk satu kali perjalanan,
- 4 terdapat dua jenis kereta api, yaitu MRT Ekonomi dan MRT Ekspres.

Ilustrasi perjalanan kereta api dapat dilihat pada Gambar 1. Terdapat tujuh stasiun, yaitu: Lebak Bulus (LB), Fatmawati (FA), Cipete Raya (CR), Haji Nawi (HN), Blok A (BA), Blok M (BM), dan Sisingamangaraja (SI). Stasiun Lebak Bulus memiliki delapan jalur dan stasiun Sisingamangaraja memiliki empat jalur. Kedua stasiun tersebut memiliki depo. Stasiun di antara Lebak Bulus dan Sisingamangaraja beserta enam petak blok yang menghubungkannya hanya memiliki dua jalur. MRT Ekonomi berhenti di setiap stasiun, sedangkan MRT Ekspres hanya berhenti di stasiun Lebak Bulus, Haji Nawi, dan Sisingamangaraja. Data kecepatan rata-rata MRT Ekonomi dan MRT Ekspres pada setiap petak blok antarstasiun diberikan pada Tabel 1. Kecepatan tersebut diperhitungkan berdasarkan jarak yang harus ditempuh pada setiap petak blok. Waktu kedatangan setiap kereta api di stasiun pertama sebagai nilai awal pada Tabel 2 dan lama waktu pemberhentian (p_{is}) kereta api di setiap stasiun pada Tabel 1. Gambar 2 merupakan diagram ruang-waktu rute Lebak Bulus ke Sisingamangaraja.

Tabel 1 Data simulasi dari perjalanan MRT Lebak Bulus-Sisingamangaraja

Indeks stasiun	Stasiun	Indeks Petak Blok (d_k)	Jarak antarstasiun (km)	Kecepatan minimum (km/jam)		Kecepatan maksimum (km/jam)		Waktu tempuh minimum (menit)		Waktu tempuh maksimum (menit)		Waktu tunggu di stasiun (menit)	
				MRT	Eks.	MRT	Eks.	MRT	Eks.	MRT	Eks.	MRT	Eks.
1	Lebak Bulus (LB)	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	3
2	Fatmawati (FA)	d_1	7.95	43.36	79.50	53.00	119.25	11	6	9	4	1	0
3	Cipete Raya (CR)	d_2	8.25	38.08	61.88	45.00	82.50	13	8	11	6	1	0
4	Haji Nawi (HN)	d_3	7.30	43.80	87.60	54.75	146.00	10	5	8	3	1	1
5	Blok A (BA)	d_4	5.25	35.00	78.75	45.00	157.50	9	4	7	2	1	0
6	Blok M (BM)	d_5	6.70	36.55	67.00	44.67	100.50	11	6	9	4	1	0
7	Sisingamangaraja (SI)	d_6	7.25	33.46	54.38	39.55	72.50	13	8	11	6	5	3

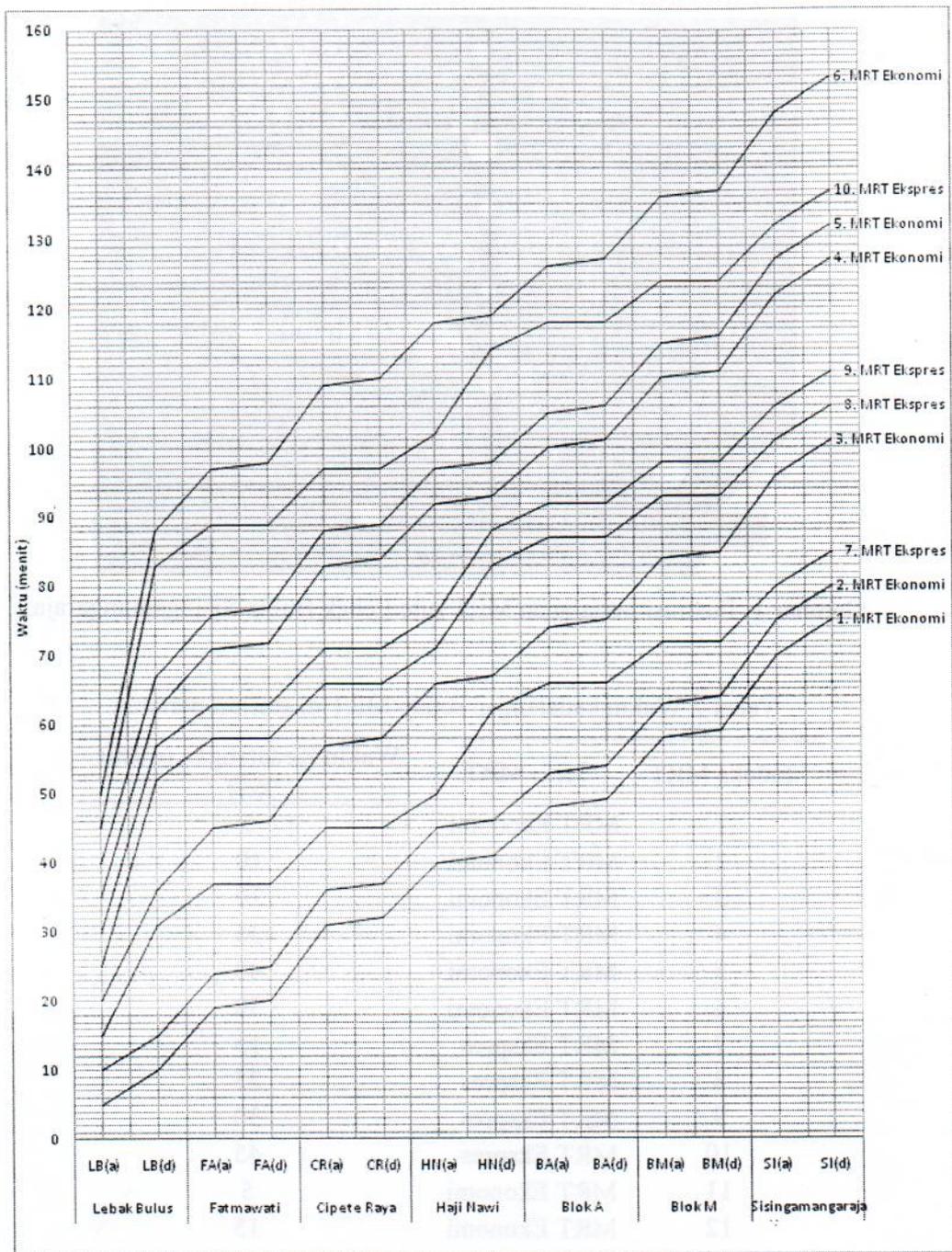
Keterangan: Eko. = MRT Ekonomi, Eks. = MRT Ekspres.



Gambar 1 Ilustrasi perjalanan MRT rute Lebak Bulus-Sisingamangaraja.

Tabel 2 Waktu kedatangan setiap MRT di stasiun pertama

Indeks MRT	Jenis MRT	Waktu Kedatangan (menit ke-)
1	MRT Ekonomi	5
2	MRT Ekonomi	10
3	MRT Ekonomi	20
4	MRT Ekonomi	35
5	MRT Ekonomi	40
6	MRT Ekonomi	50
7	MRT Ekspres	15
8	MRT Ekspres	25
9	MRT Ekspres	30
10	MRT Ekspres	45
11	MRT Ekonomi	5
12	MRT Ekonomi	15
13	MRT Ekonomi	20
14	MRT Ekonomi	30
15	MRT Ekonomi	40
16	MRT Ekspres	10
17	MRT Ekspres	25
18	MRT Ekspres	35



Gambar 2 Diagram ruang waktu dari simulasi penjadwalan MRT dari Lebak Bulus ke Sisingamangaraja yang sudah tidak mengandung konflik.

PENERAPAN PRINSIP MAKSIMUM PONTRYAGIN PADA SISTEM INVENTORI-PRODUKSI

Nurus Sa'adah, Toni Bakhtiar, Farida Hanum

Departemen Matematika FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680

ABSTRAK

Pengendalian persediaan (inventori) merupakan kegiatan alami seperti halnya proses menyimpan makanan, pakaian, pena, kertas, dan barang-barang lainnya. Bagi perusahaan, pengendalian persediaan sangat diperlukan karena merupakan modal kerja dan berperan dalam menjamin ketersediaan barang untuk memenuhi permintaan pelanggan. Masalah inventori-produksi merupakan model dinamis (fungsi dari waktu) sehingga dapat disajikan sebagai masalah kontrol optimum. Tulisan ini membahas tentang kontrol optimum sistem inventori-produksi dengan mempertimbangkan kerusakan barang yang disimpan. Tingkat kerusakan barang diasumsikan mengikuti sebaran Weibull dua parameter. Pembahasan dalam tulisan ini meliputi dua kasus, yaitu sistem model kontinu dan diskret. Kondisi optimum untuk model kontinu diperoleh dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin. Solusi yang didapatkan berupa persamaan diferensial orde dua yang kemudian diselesaikan secara numerik menggunakan metode beda hingga. Sistem inventori-produksi diskret diselesaikan dengan metode pengali Lagrange dengan solusi optimal diperoleh melalui penyelesaian persamaan beda secara rekursif.

1 PENDAHULUAN

Aplikasi teori kontrol optimum dalam masalah riset operasi merupakan area penelitian yang luas dan terbuka [1]. Salah satu yang menarik untuk dibahas adalah tentang perencanaan produksi. Setiap individu adalah pengendali persediaan (*inventory controller*), baik di rumah maupun dalam pekerjaan sebagaimana kebiasaan orang menyimpan makanan, pakaian, kertas, pena, dan barang-barang lainnya. Beberapa orang secara teratur membuang atau mengeluarkan isi lemari es karena berubah sifat. Jadi, pengendalian persediaan adalah kegiatan alamiah yang dilakukan setiap orang [2].

Lebih jauh lagi, sebuah perusahaan yang berorientasi pada keuntungan (*profit oriented*) harus melakukan pengendalian persediaan sebagai salah satu aktiva penting di dalam perusahaan dan menjadi salah satu modal kerja perusahaan. Tingkat

persediaan akan memengaruhi ketersediaan barang yang siap dijual untuk melayani pelanggan (*customer*). Dalam suatu persediaan, bila mencapai waktu tertentu barang akan rusak. Dengan menyesuaikan data empirik terhadap sebaran matematis, para peneliti menggunakan sebaran Weibull untuk memodelkan laju kerusakan barang. Beberapa contoh barang yang laju kerusakannya menyebar Weibull antara lain produk makanan, film kamera, obat-obatan, bahan kimia, komponen elektronik, dan sebagainya.

Dalam tulisan ini masalah sistem inventori-produksi dimodelkan dalam bentuk masalah kontrol optimum dan diselesaikan dengan prinsip maksimum Pontryagin untuk masalah kontinu dan metode pengali Lagrange untuk masalah diskret dengan mempertimbangkan laju kerusakan barang yang menyebar Weibull.

2 METODE PENELITIAN

2.1 Masalah Kontrol Optimum

Masalah kontrol optimum adalah masalah memilih peubah kontrol di antara semua peubah kontrol yang *admissible*, yaitu kontrol yang membawa sistem dari *state* awal pada waktu awal kepada *state* akhir pada waktu akhir, sedemikian sehingga memberikan nilai maksimum atau minimum untuk fungsional objektif [3].

Misalkan diberikan sistem dinamik dalam bentuk sistem persamaan diferensial

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \quad (1)$$

untuk model kontinu atau dalam bentuk sistem persamaan beda

$$x(k+1) = f(x(k), u(k), k) \quad (2)$$

untuk model diskret dengan x adalah variabel *state* dan u variabel kontrol. Sistem dinamik dapat berbentuk linear atau taklinear, mandiri (*autonomous*) atau takmandiri (*non-autonomous*), deterministik atau stokastik.

Misalkan U menyatakan himpunan dari semua fungsi yang kontinu sesepenggal (*piecewise*). Masalah kontrol optimum adalah menentukan fungsi kontrol u di antara fungsi *admissible* u yang membawa sistem dari *state* awal x_0 kepada *state* akhir x_T pada waktu $[t_0, T]$ melalui sistem (1) atau (2) sehingga mengoptimalkan fungsional objektif tertentu. Masalah kontrol optimum kontinu adalah masalah memaksimalkan fungsional objektif

$$\max_{u(t) \in U} J[u(t)] = S[x(T), T] + \int_{t_0}^T f_0(x, u, t) dt$$

dengan f_0 adalah suatu fungsi yang diberikan dan $S[x(T), T]$ merupakan fungsi *scrap* (fungsi yang menggambarkan keadaan sistem di waktu akhir) terhadap kendala

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

Masalah kontrol optimum diskret adalah masalah memaksimumkan fungsional objektif

$$\max_{u(k)} \sum_{k=0}^{T-1} F(x(k), u(k), k)$$

terhadap kendala

$$x(k+1) - x(k) = f(x(k), u(k), k)$$

$$x(k_0) = x_0$$

$$x(T) = x_T.$$

Kendala pertama merupakan persamaan beda yang menyatakan perubahan pada peubah keadaan dari waktu k ke $k+1$, $k = 0, 1, 2, \dots, T-1$.

2.2 Prinsip Maksimum Pontryagin

Syarat perlu tercapainya kondisi optimum bagi MKOK diperoleh dengan menerapkan prinsip maksimum Pontryagin.

Teorema 1 Misalkan u sebagai kontrol *admissible* yang membawa state awal $(x(t_0), t_0)$ kepada state terminal $(x(T), T)$ dengan $x(T)$ dan T secara umum tidak ditentukan. Syarat perlu agar (x^*, u^*) menjadi solusi optimum adalah terdapat vektor p^* sedemikian rupa sehingga:

1. p^* dan x^* merupakan solusi dari sistem kanonik:

$$\dot{x}^* = \frac{\partial H}{\partial p}(x^*, u^*, p^*, t)$$

$$\dot{p}^* = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, u^*, p^*, t)$$

dengan fungsi hamilton H diberikan oleh

$$H(x, u, p, t) = f_0(x, u, t) + pf(x, u, t).$$

$$2. H(x^*, u^*, p^*, t) \geq H(x, u, p, t).$$

3. Semua syarat batas terpenuhi.

[3]

2.3 Metode Pengali Lagrange

Syarat perlu tercapainya kondisi optimum bagi masalah kontrol optimum diskret diperoleh dengan menerapkan metode pengali Lagrange. Didefinisikan fungsi lagrange

$$L = \sum_{k=0}^{T-1} \{F(x(k), u(k), k) + \lambda(k+1)[x(k) + f(x(k), u(k), k) - x(k+1)]\},$$

dengan $\lambda(k+1)$ adalah pengali Lagrange yang berhubungan dengan persamaan beda dari kendala pertama. Syarat perlu agar (x^*, u^*) menjadi solusi optimal ialah:

1. $\nabla_{u(k)} L = \nabla_{u(k)} F + \lambda(k+1) \nabla_{u(k)} f = 0$
2. $\nabla_{x(k)} L = \nabla_{x(k)} F + \lambda(k+1)[1 + \nabla_{x(k)} f] - \lambda(k) = 0$
3. $\nabla_{\lambda(k+1)} L = x(k) + f - x(k+1) = 0$
4. $\frac{\partial L}{\partial x(N)} = -\lambda(N) = 0$.

Syarat terakhir diperlukan jika *state* akhir bebas [4].

3 PEMBAHASAN

3.1 Asumsi dan Notasi

Tulisan ini membahas sistem inventori-produksi model kontinu dan diskret. Pada model kontinu, inventori dimonitor secara kontinu dan proses produksi dapat dimulai pada setiap waktu. Sebaliknya, pada model diskret, inventori dimonitor pada titik-titik waktu tertentu.

Asumsi yang digunakan dalam model pada karya ilmiah ini ialah:

1. Perusahaan telah menetapkan tingkat persediaan yang diinginkan (*inventory goal level*) yang merupakan banyaknya barang yang ingin disimpan oleh perusahaan.
2. Perusahaan telah menetapkan tingkat produksi yang diinginkan (*production goal level*) yang merupakan banyaknya barang yang ingin diproduksi oleh perusahaan secara efektif.

3. Penalti dikenakan ketika tingkat persediaan dan tingkat produksi menyimpang dari level yang diinginkan.
4. Seluruh permintaan dapat dipenuhi oleh perusahaan.

Didefinisikan notasi-notasi sebagai berikut: T : panjang horizon perencanaan, I : tingkat persediaan, P : tingkat produksi, D : tingkat permintaan, I_0 : tingkat persediaan awal, θ : tingkat kerusakan barang, h : biaya penalti inventori (rupiah/unit), K : biaya penalti produksi (rupiah/unit), \hat{I} : tingkat persediaan yang diinginkan, dan $\hat{P}(t)$: tingkat produksi yang diinginkan.

3.2 Model Inventori-Produksi Kontinu

Didefinisikan fungsional objektif

$$J = - \int_0^T \left\{ \frac{1}{2} h \Delta^2 I + \frac{1}{2} K \Delta^2 P \right\} dt, \quad (3)$$

dengan $\Delta I(t) = I(t) - \hat{I}$ dan $\Delta P(t) = P(t) - \hat{P}$. Fungsional objektif di atas mengukur besarnya biaya penalti yang dikenakan ketika tingkat inventori dan tingkat produksi menyimpang dari *goal level*. Nilai 1/2 menunjukkan bahwa bobot yang menyatakan tingkat kepentingan dari biaya-biaya penalti adalah sama. Model yang digunakan dalam tulisan ini diambil dari Al-Khedhairi dan Tajd (2007) di [5].

Masalah kontrol optimum kontinu dengan demikian adalah masalah meminimumkan fungsional objektif (3) dengan kendala-kendala sebagai berikut:

1. Perubahan tingkat persediaan:

$$\dot{I}(t) = P(t) - D(t) - \theta(t)I(t). \quad (4)$$

Diasumsikan kerusakan barang mengikuti sebaran Weibull dengan laju kerusakan $\theta(t) = \alpha \beta t^{\beta-1}$.

2. Kendala ketaknegatifan: $P(t) \geq 0$.
3. Nilai awal dan akhir ditetapkan: $I(0) = I_0$ dan $I(T) = I_T$.

3.3 Solusi Analitik

Karena diasumsikan bahwa seluruh permintaan dapat dipenuhi oleh perusahaan, maka tingkat produksi yang diinginkan \hat{P} merupakan jumlah dari barang yang rusak dan tingkat permintaan pasar

$$\hat{P}(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}\hat{I} + D(t).$$

Dengan mendefinisikan λ sebagai variabel adjoin, fungsi hamilton dituliskan sebagai

$$H = -\frac{1}{2}\{h\Delta^2 I + K\Delta^2 P\} + \lambda [P - D - \alpha\beta t^{\beta-1}I],$$

sehingga diperoleh syarat perlu berupa:

$$\frac{\partial H}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial I} = -\dot{\lambda}, \quad \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \dot{I}$$

yang masing-masing dapat dituliskan

$$P = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} \tag{5}$$

$$\dot{\lambda} = h(I - \hat{I}) - \lambda\alpha\beta t^{\beta-1} \tag{6}$$

dan persamaan (4). Dengan menyubstitusi persamaan (5) ke dalam persamaan (4) didapatkan:

$$\dot{I} = \hat{P} + \frac{\lambda}{K} - D - \alpha\beta t^{\beta-1}I \tag{7}$$

dan dari persamaan (7) di atas didapatkan

$$\frac{\lambda}{K} = \dot{I} + \alpha\beta t^{\beta-1}I - \hat{P} + D \tag{8}$$

Jika (7) didiferensialkan terhadap t didapatkan

$$\ddot{I} = -\alpha\beta(\beta - 1)t^{\beta-2}I - \alpha\beta t^{\beta-1}\dot{I} + \frac{\dot{\lambda}}{K} + \dot{\hat{P}} - \dot{D} \tag{9}$$

Kemudian, dengan menyubstitusi persamaan (6) ke dalam persamaan (9), didapatkan

$$\ddot{I} = -\alpha\beta(\beta - 1)t^{\beta-2}I + \alpha\beta t^{\beta-1}\left[\frac{\lambda}{K} - \dot{I}\right] + \frac{h}{K}[I - \hat{I}] + \dot{\hat{P}} - \dot{D} \tag{10}$$

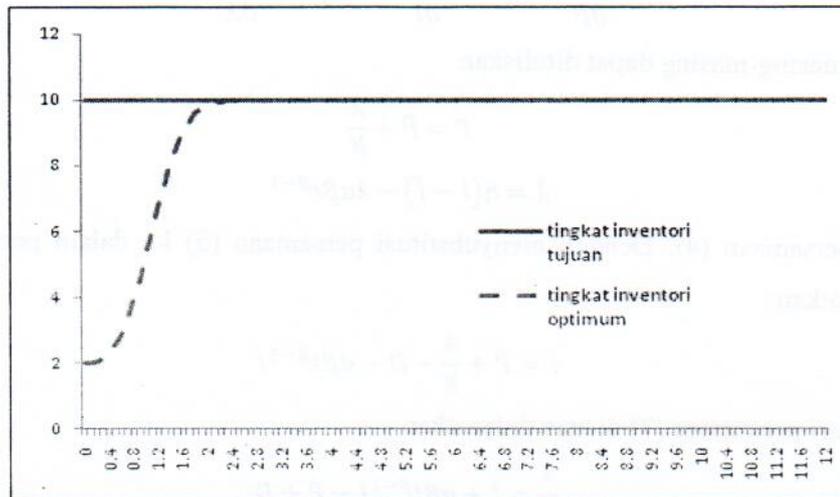
Terakhir, dengan menyubstitusi persamaan (8) ke dalam persamaan (10), didapatkan persamaan diferensial orde dua berikut

$$\ddot{I} - \left[\frac{h}{K} - \alpha\beta(\beta - 1)t^{\beta-2} + (\alpha\beta t^{\beta-1})^2\right]I = \alpha\beta t^{\beta-1}[D - \hat{P}] - \frac{h}{K}\hat{I} + \dot{\hat{P}} - \dot{D}. \tag{11}$$

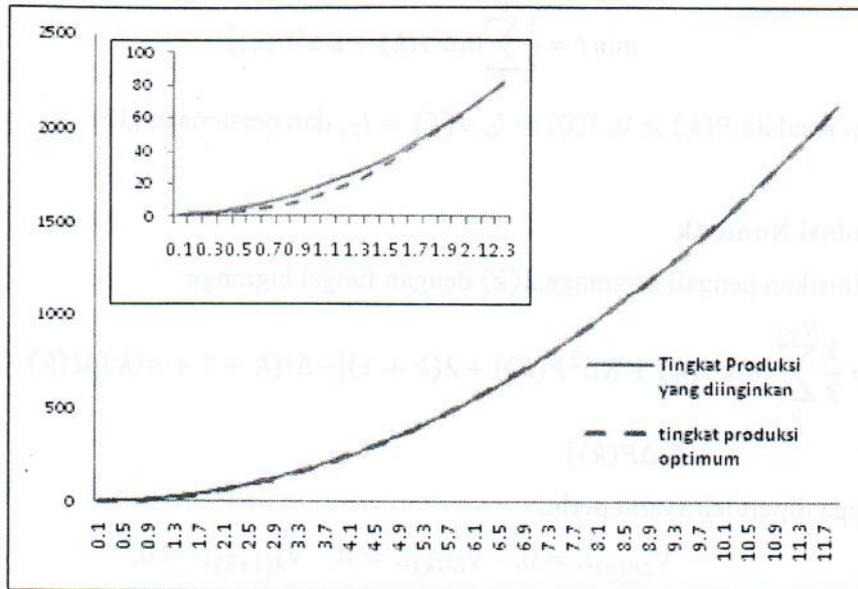
Dengan menerapkan nilai awal $I(0) = I_0$ dan nilai batas $I(T) = I_T$ akan didapatkan solusi optimum yang nilainya bergantung pada bentuk fungsi tingkat permintaan yang dihadapi perusahaan.

3.4 Simulasi Model Kontinu

Pengendalian inventori-produksi model kontinu diilustrasikan dengan mengambil nilai-nilai parameter berikut: $T = 12$, $I_0 = 2$, $I_T = 10$, $h = 1$, $K = 20$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 3$, $\hat{I} = 10$, $D(t) = 1 + \sin t$. Persamaan (11) merupakan persamaan diferensial dengan koefisien dan suku variabel, dan diselesaikan dengan metode beda hingga. Tingkat inventori dan produksi optimum diberikan pada Gambar 1 dan Gambar 2.



Gambar 1 Tingkat inventori optimum dan tingkat inventori tujuan untuk simulasi model kontinu.



Gambar 2 Tingkat produksi optimum dan tingkat produksi tujuan untuk simulasi model kontinu.

3.5 Model Inventori-Produksi Diskret

Misalkan waktu perencanaan dibagi menjadi N selang yang sama panjang. Perubahan tingkat persediaan dinyatakan dalam persamaan beda

$$\frac{I(k+1) - I(k)}{T_s} = P(k) - D(k) - \alpha\beta k^{\beta-1} I(k) \quad (12)$$

dengan T_s adalah panjang subinterval. Dengan menyusun ulang persamaan (12) diperoleh

$$I(k+1) = [1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}]I(k) + T_s[P(k) - D(k)] \quad (13)$$

Jika \hat{I} dan \hat{P} memenuhi (13) maka didapatkan

$$\hat{I} = [1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}]\hat{I} + T_s[\hat{P}(k) - D(k)] \quad (14)$$

Didefinisikan operator Δ sebagai berikut: $\Delta I(k) = I(k) - \hat{I}$, dan $\Delta P = P(t) - \hat{P}$. Jika persamaan (13) dikurangi dengan persamaan (14) didapatkan

$$\Delta I(k+1) = a(k)\Delta I(k) + T_s\Delta P(k) \quad (15)$$

dengan $a(k) = 1 - T_s\alpha\beta k^{\beta-1}$.

Masalah kontrol optimum diskret ialah meminimumkan fungsional objektif

$$\min J = \frac{1}{2} \sum_0^N [h\Delta^2 I(k) + K\Delta^2 P(k)]. \quad (13)$$

dengan kendala $P(k) \geq 0$, $I(0) = I_0$, $I(T) = I_T$, dan persamaan (15).

3.6 Solusi Numerik

Didefinisikan pengali Lagrange $\lambda(k)$ dengan fungsi lagrange:

$$L = \frac{1}{2} \sum_0^{N-1} \{h\Delta^2 I(k) + K\Delta^2 P(k)\} + \lambda(k+1)[- \Delta I(k+1 + a(k)\Delta I(k) + T_s \Delta P(k)] \quad (17)$$

sehingga diperoleh syarat perlu:

$$\nabla_{\Delta P(k)} L = 0, \quad \nabla_{\Delta I(k)} L = 0, \quad \nabla_{\lambda(k+1)} L = 0,$$

yang masing-masing setara dengan:

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K} \lambda(k+1) \quad (18)$$

$$\lambda(k) = h\Delta I(k) + a(k)\lambda(k+1) \quad (19)$$

dan persamaan (3.15). Untuk mendapatkan solusi optimum, digunakan metode *sweep* [6]. Untuk $k = 0, \dots, N$, dinotasikan $s(k)$ sehingga

$$\lambda(k) = s(k)\Delta I(k). \quad (20)$$

Dengan menyubstitusi persamaan (20) ke dalam persamaan (18) didapatkan

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K} s(k+1)\Delta I(k+1). \quad (21)$$

Kemudian, dengan menyubstitusikan (15) ke dalam (21) didapatkan

$$\Delta P(k) = -\frac{T_s}{K} s(k+1)[a(k)\Delta I(k) - T_s \Delta P(k)] \quad (22)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (22) didapatkan

$$\Delta P(k) = \frac{T_s a(k) s(k+1)}{K + T_s^2 s(k+1)} \Delta I(k). \quad (23)$$

Substitusi (20) ke dalam (19) menghasilkan

$$s(k)\Delta I(k) = h\Delta I(k) + a(k)s(k+1)\Delta I(k+1) \quad (24)$$

Dengan menyubstitusikan (15) ke dalam (24) didapatkan juga

$$s(k)\Delta I(k) = [h + a(k)^2 s(k+1)]\Delta I(k) + T_s a(k)s(k+1)\Delta P(k) \quad (25)$$

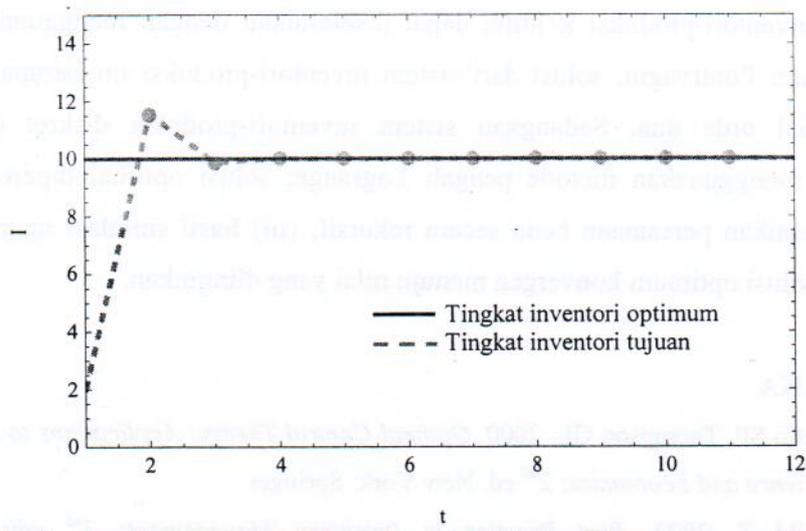
dan menyubstitusikan (23) ke dalam (25) diperoleh persamaan Ricatti

$$s(k) = h + \frac{Ks(k+1)}{K + T_s^2 s(k+1)} a(k)^2 \quad (26)$$

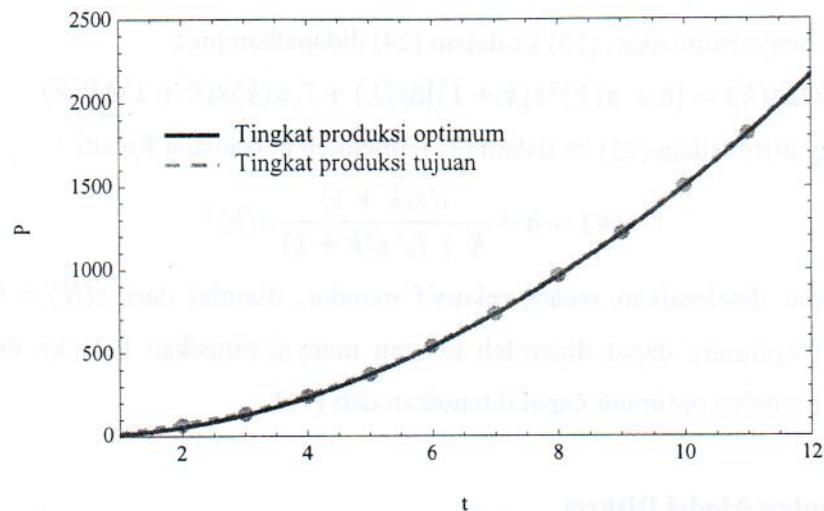
yang dapat diselesaikan secara rekursif mundur, dimulai dari $s(N) = h$. Tingkat inventori optimum dapat diperoleh dengan menyubstitusikan (23) ke dalam (15). Tingkat produksi optimum dapat ditentukan dari (16).

3.4 Simulasi Model Diskret

Gambar 3 dan Gambar 4 diperoleh dengan memilih Misalkan $T = 12$, $N = 12$, $I_0 = 2$, $I(T) = 10$, $h = 1$, $K = 20$, $D(k) = 1 + \sin k$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 3$, $\hat{I} = 10$. $N = 12$ menunjukkan bahwa perusahaan memonitor proses produksi setiap bulan, sehingga panjang subinterval $T_s = 1$.



Gambar 3 Tingkat inventori optimum dan tingkat inventori tujuan untuk simulasi model diskret.



Gambar 4 Tingkat produksi optimum dan tingkat produksi tujuan untuk simulasi model diskret.

4 SIMPULAN

Berdasarkan kajian model dan hasil si-mulasi, maka dapat disimpulkan bahwa: (i) sistem inventori-produksi dapat diformulasikan sebagai masalah kontrol optimum, (ii) sistem inventori-produksi kontinu dapat diselesaikan dengan menggunakan prinsip maksimum Pontryagin; solusi dari sistem inventori-produksi ini berupa persamaan diferensial orde dua. Sedangkan sistem inventori-produksi diskret diselesaikan dengan menggunakan metode pengali Lagrange; solusi optimal diperoleh dengan menyelesaikan persamaan beda secara rekursif, (iii) hasil simulasi memperlihatkan bahwa solusi optimum konvergen menuju nilai yang diinginkan.

PUSTAKA

- [1] Sethi SP, Thompson GL. 2000. *Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics*: 2nd ed. New York: Springer
- [2] Wild T. 2002. *Best Practice in Inventory Management*: 2nd edition. Britain: Butterworth-Heinemann.
- [3] Tu PNV. 1993. *Introductory Optimization Dynamics: Optimum Control with Economics and Management Applications*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag.

- [4] Conrad JM, Clark CW. 1987. *Natural Resource Economics*. New York: Cambridge University Press.
- [5] Al-Khedhairi A, Tadj L. 2007. Optimal control of a production inventory system with Weibull distributed deterioration. *Applied Mathematical Sciences* 35: 1703-1714.
- [6] Bryson AE, Ho YC. 1975. *Applied Optimal Control*. Washington DC: Halsted Press.

IMPLEMENTASI *FLEET SIZE AND MIX VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS* PADA PENDISTRIBUSIAN KORAN

Maya Widyastiti^{*)}, Farida Hanum, Toni Bakhtiar

Departemen Matematika FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680
^{*)} maya.widyastiti@gmail.com

ABSTRAK

Pendistribusian hasil produksi merupakan salah satu bagian penting dari kegiatan sebuah perusahaan. Beberapa permasalahan yang sering dihadapi oleh perusahaan dalam melaksanakan pendistribusian hasil produksi antara lain menentukan rute kendaraan yang dapat mengoptimalkan jarak tempuh atau biaya perjalanan, waktu tempuh, banyaknya kendaraan yang dioperasikan, dan sumber daya lain yang tersedia. Masalah penentuan rute dalam pendistribusian koran menjadi sangat penting mengingat koran memuat berbagai berita baru sehingga kedatangan koran tepat pada waktunya menjadi sangat diperlukan. Dalam penelitian ini, masalah penentuan rute optimal pada pendistribusian koran diformulasikan menjadi VRP dengan kapasitas kendaraan yang tidak sama (heterogen) dan terdapat *time windows* (selang waktu) pada setiap pelanggan sehingga setiap pelanggan harus dilayani pada selang waktunya masing-masing (*Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows*). Di sini dibahas tiga kasus pendistribusian koran, yaitu kasus dengan semua kendaraan digunakan, kasus dengan tidak semua kendaraan digunakan yang dibedakan lagi dari fungsi objektifnya yaitu meminimumkan biaya, dan meminimumkan banyaknya kendaraan. Permasalahan pendistribusian koran pada penelitian ini diselesaikan dengan metode *branch and bound* dan dibantu dengan perangkat lunak LINGO 11.0. Di setiap kasus diperoleh hasil berupa rute optimal yang meminimumkan jarak atau biaya atau banyaknya kendaraan.

Katakunci: optimasi, *vehicle routing problem*, *time windows*, pendistribusian koran

1 PENDAHULUAN

Koran merupakan salah satu produk yang berisi informasi tentang berbagai kejadian yang terjadi di berbagai tempat. Bisnis koran ini mengharuskan produk dapat sampai ke pelanggan dengan tepat waktu. Oleh karena itu, masalah pendistribusian koran menjadi sangat penting mengingat koran memuat berbagai berita baru sehingga kedatangan koran tepat pada waktunya menjadi sangat diperlukan.

Permasalahan pendistribusian koran dari suatu perusahaan ke para pelanggan secara matematis dapat diformulasikan sebagai suatu *Vehicle Routing Problem* (VRP). Dengan VRP

dapat diperoleh suatu rute dengan jarak atau total biaya pendistribusian yang seminimum mungkin. Rute tersebut merupakan rute kendaraan yang mengunjungi setiap pelanggan tepat satu kali dengan mempertimbangkan kendala yang ada. VRP memiliki beberapa variasi, antara lain VRP dengan batasan kapasitas kendaraan yang disebut *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP) dan VRP dengan adanya batasan selang waktu tertentu untuk melayani setiap pelanggan yang biasa disebut *Vehicle Routing Problem with Time Windows* (VRPTW). Dalam penelitian ini, masalah penentuan rute optimal pada pendistribusian koran diformulasikan menjadi VRP dengan kapasitas kendaraan yang tidak sama (heterogen) dan terdapat *time windows* pada setiap pelanggan sehingga setiap pelanggan harus dilayani pada selang waktu masing-masing, yang biasa dinyatakan sebagai *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem with Time Windows* (FSMVRPTW).

2 VEHICLE ROUTING PROBLEM

Vehicle Routing Problem (VRP) pertama kali diperkenalkan oleh Dantzig dan Ramser pada tahun 1959 yang berorientasi pada masalah optimasi kombinatorial yaitu optimasi yang melibatkan banyak variabel. VRP adalah masalah penentuan rute kendaraan dalam mendistribusikan barang dari tempat produksi yang dinamakan depot ke pelanggan dengan tujuan meminimumkan total jarak tempuh kendaraan. Batasan-batasan yang harus dipenuhi ialah setiap kendaraan yang akan mendistribusikan barang ke pelanggan harus memulai rute perjalanan dari tempat produksi (depot), setiap pelanggan hanya boleh dilayani satu kali oleh satu kendaraan, setiap pelanggan mempunyai permintaan yang harus dipenuhi dan diasumsikan permintaan tersebut sudah diketahui sebelumnya. Setiap kendaraan memiliki batasan kapasitas tertentu artinya setiap kendaraan akan melayani pelanggan sesuai dengan kapasitasnya. Selanjutnya, tidak terdapat subrute untuk setiap kendaraan [1].

Secara matematis, VRP dapat dinyatakan sebagai suatu digraf $G = (V, A)$, dengan $V = \{0, 1, \dots, n\}$ adalah himpunan simpul yang menunjukkan lokasi pelanggan dan $A = \{(i, j) | i, j \in V, i \neq j\}$ yaitu himpunan sisi berarah yang menyatakan jalan penghubung antarlokasi pelanggan [1]. *Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem* (FSMVRP) ialah variasi dari *Vehicle Routing Problem* (VRP) yang menentukan kombinasi dan rute yang ditempuh oleh kendaraan yang berbeda agar dapat melayani suatu himpunan pelanggan dengan permintaan yang sudah diketahui [2]. Pada *Fleet Size and Mix Vehicle Routing*

Problem with Time Windows (FSMVRPTW), pelanggan perlu dilayani dalam *time windows* masing-masing untuk meminimumkan biaya dengan kapasitas kendaraan yang tidak sama (heterogen)[3].

3 DESKRIPSI DAN FORMULASI MASALAH

Permasalahan yang sering dihadapi oleh perusahaan dalam mendistribusikan hasil produksi ialah menentukan rute kendaraan yang mengoptimalkan jarak tempuh atau biaya perjalanan, waktu tempuh, banyaknya kendaraan yang digunakan, dan sumber daya lain yang tersedia. Kendala yang harus dipertimbangkan dalam melakukan pendistribusian antara lain kapasitas kendaraan, jumlah permintaan setiap pelanggan, dan jarak antarpelanggan. Penentuan rute kendaraan yang optimal bertujuan agar semua permintaan pelanggan dapat terlayani dengan baik dan tepat pada waktunya, serta pada akhirnya keuntungan yang diperoleh perusahaan pun akan optimal.

Ada beberapa pendistribusian produk yang memiliki hubungan dengan waktu pelayanan, seperti pendistribusian sayuran, koran, susu, dan sebagainya. Dalam penelitian ini, penentuan rute optimalnya diterapkan pada masalah pendistribusian koran. Karena koran berisi informasi tentang berbagai kejadian yang terjadi di berbagai negara, maka kedatangan koran tepat waktu kepada pelanggan menjadi salah satu hal yang penting dalam melakukan pendistribusian. Agar pelanggan dapat dilayani dengan tepat waktu, maka koran yang telah dicetak oleh perusahaan percetakan harus langsung didistribusikan kepada semua pelanggan menggunakan kendaraan dengan kapasitas tertentu. Setiap kendaraan memiliki kecepatan tertentu dan terdapat biaya penggunaan kendaraan. Selain itu, setiap pelanggan memiliki *time windows* yang beragam.

Asumsi-asumsi yang digunakan dalam masalah penentuan rute optimal dalam penelitian ini ialah:

1. banyaknya permintaan pelanggan sudah diketahui,
2. semua permintaan pelanggan dapat dipenuhi oleh perusahaan (produsen),
3. jenis produk yang didistribusikan adalah homogen,
4. jarak antarpelanggan adalah simetrik, artinya jarak dari pelanggan i ke pelanggan j sama dengan jarak dari pelanggan j ke pelanggan i ,
5. biaya perjalanan sebanding dengan jarak antarpelanggan,

6. kecepatan dari setiap jenis kendaraan berbeda satu sama lain dan konstan, artinya tidak ada yang mempercepat dan memperlambat kecepatan kendaraan tersebut,
7. setiap kendaraan yang digunakan akan berangkat dari perusahaan pukul 02.00 atau pada saat $t = 0$.

Masalah penentuan rute optimal dapat diformulasikan sebagai suatu ILP (*Integer Linear Programming*) dengan himpunan, indeks, parameter dan variabel keputusannya didefinisikan sebagai berikut.

$K = \{1, 2, \dots, r\}$ = himpunan kendaraan,

$H = \{2, 3, \dots, n\}$ = himpunan pelanggan,

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ = himpunan depot dan pelanggan, dengan 1 menyatakan depot,

i, j, p = indeks untuk menyatakan pelanggan dan depot,

k = indeks untuk menyatakan kendaraan,

c_{ij} = biaya perjalanan dari pelanggan i ke pelanggan j

q_i = banyaknya permintaan dari pelanggan i

a_k = kapasitas dari kendaraan k

f_k = biaya penggunaan kendaraan k

t_{ijk} = lama perjalanan dari pelanggan i ke pelanggan j menggunakan kendaraan k

d_{ij} = jarak antara pelanggan i dan pelanggan j

v_k = kecepatan kendaraan k

$[e_i, l_i]$ = *time windows* pelanggan i , dengan e_i adalah waktu tercepat pelanggan i dilayani dan l_i adalah waktu terlama pelanggan i dilayani

s_i = lama pelayanan pelanggan i

b_{ik} = waktu pelanggan i mulai dilayani oleh kendaraan k

M = konstanta positif yang nilainya relatif besar.

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{jika pelanggan } j \text{ dilayani setelah} \\ & \text{pelanggan } i \text{ oleh kendaraan } k \\ 0, & \text{jika selainnya.} \end{cases}$$

Fungsi Objektif

Fungsi objektif y dari penentuan rute optimal dalam pendistribusian koran ialah meminimumkan total biaya yang harus dikeluarkan oleh suatu perusahaan (depot) dalam

melakukan pendistribusian hasil produksi ke sejumlah pelanggan. Biaya yang harus dikeluarkan oleh perusahaan terdiri atas biaya tetap penggunaan kendaraan y_1 dan biaya perjalanan dalam pendistribusian hasil produksi y_2 . Fungsi objektif dari penentuan rute optimal dapat diberikan sebagai berikut:

$$\text{Minimumkan } y := y_1 + y_2,$$

$$\text{dengan } y_1 := \sum_{k \in K} f_k \sum_{j \in H} x_{1jk}, \text{ dan } y_2 := \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} \sum_{k \in K} c_{ij} x_{ijk}.$$

Kendala yang harus dipenuhi untuk melakukan pendistribusian hasil produksi ialah:

1. Setiap kendaraan harus berangkat dari depot dan seluruh kendaraan harus digunakan untuk melayani pelanggan,

$$\sum_{j \in H} x_{1jk} = 1, \forall k \in K.$$

2. Setiap pelanggan dilayani tepat satu kali oleh satu kendaraan,

$$\sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ijk} = 1, \forall j \in H, \sum_{k \in K} \sum_{j \in N} x_{ijk} = 1, \forall i \in H.$$

3. Rute harus kontinu, artinya setiap kendaraan yang mengunjungi suatu pelanggan pasti akan meninggalkan pelanggan tersebut,

$$\sum_{i \in N} x_{ipk} - \sum_{j \in N} x_{pjk} = 0, \forall p \in H, \forall k \in K.$$

4. Total permintaan dari semua pelanggan untuk setiap kendaraan tidak melebihi kapasitas kendaraan yang digunakan: $\sum_{i \in H} \sum_{j \in N} q_i x_{ijk} \leq a_k, \forall k \in K.$

5. Lama perjalanan dari pelanggan i ke pelanggan j menggunakan kendaraan k dapat ditentukan dengan membagi jarak pelanggan i ke pelanggan j dengan kecepatan dari kendaraan, $t_{ijk} = \frac{d_{ij}}{v_k}, \forall i, j \in N, i \neq j, \forall k \in K.$

6. Waktu pelanggan j mulai dilayani oleh kendaraan k (b_{jk}) dapat ditentukan dari penjumlahan antara waktu untuk melayani pelanggan i (b_{ik}), lama melayani pelanggan i (s_i) ditambah waktu perjalanan dari pelanggan i ke j (t_{ijk}), dan menjamin bahwa tidak terdapat *subtour* pada formulasi yang dibuat. Rute pendistribusian yang memuat suatu *subtour* merupakan solusi yang takfeasibel.

$$b_{ik} + s_i + t_{ijk} - M(1 - x_{ijk}) \leq b_{jk}, \forall i \in N, \forall j \in H, i \neq j, \forall k \in K.$$

7. Waktu pelanggan i mulai dilayani oleh kendaraan k berada di antara *time windows* dari pelanggan i , $e_i \leq b_{ik}, b_{ik} + s_i \leq l_i, \forall i \in H, \forall k \in K$.
8. Variabel b_{ik} merupakan variabel taknegatif: $b_{ik} \geq 0, \forall i \in H, \forall k \in K$.
9. Variabel keputusan x_{ijk} merupakan variabel keputusan yang bernilai 0 atau 1, $x_{ijk} \in \{0,1\}, \forall i, j \in N, i \neq j, \forall k \in K$.

4 STUDI KASUS

Serambi Indonesia merupakan salah satu surat kabar yang terbit setiap hari di Banda Aceh. Surat kabar ini mulai diterbitkan pertama kali pada tahun 1989 oleh PT Harian Serambi Indonesia yang terletak di Jalan Laks Malahayati Km 6.5, Banda Aceh, Nanggroe Aceh Darussalam. Perusahaan ini memproduksi koran yang kemudian didistribusikan kepada sejumlah agen yang ada.

PT Harian Serambi Indonesia yang bertindak sebagai depot, dinyatakan dengan Agen 1, akanmendistribusikan koran ke 14 agennya, yang dinyatakan dengan Agen 2–15. Data yang digunakan dalam penelitian ini, yaitu data jarak antaragen dan data permintaan setiap agen, adalah data distribusi koran PT Harian Serambi Indonesia Nanggroe Aceh Darussalam pada depot percetakan Banda Aceh yang diperoleh dari [4]. Data lainnya, yaitu lama pelayanan, *time windows*, kapasitas kendaraan, banyaknya kendaraan, biaya penggunaan kendaraan, dan kecepatan kendaraan untuk setiap jenis kendaraan, merupakan data hipotetik.

Tabel 1 Jarak antaragen (dalam kilometer)

Agen	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0	5	7	12	35	7	19	3	8	30	48	75	95	105	119
2	5	0	3	8	31	2	14	8	13	35	53	80	100	110	124
3	7	3	0	5	28	5	17	10	15	37	55	82	102	112	126
4	12	8	5	0	27	10	22	15	20	42	60	87	107	117	131
5	35	31	28	27	0	33	45	38	43	65	83	110	130	140	154
6	7	2	5	10	33	0	12	10	15	37	55	82	102	112	126
7	19	14	17	22	45	12	0	22	27	49	67	94	114	124	138
8	3	8	10	15	38	10	22	0	5	27	45	72	92	102	116
9	8	13	15	20	43	15	27	5	0	22	40	67	87	97	111
10	30	35	37	42	65	37	49	27	22	0	18	45	65	75	89
11	48	53	55	60	83	55	67	45	40	18	0	27	47	57	71
12	75	80	82	87	110	82	94	72	67	45	27	0	20	30	44
13	95	100	102	107	130	102	114	92	87	65	47	20	0	10	24
14	105	110	112	117	140	112	124	102	97	75	57	30	10	0	14
15	119	124	126	131	154	126	138	116	111	89	71	44	24	14	0

Tabel 2 Banyaknya permintaan, waktu pelayanan, dan *time windows* dari setiap agen

No.	Nama Agen	Banyaknya Permintaan (Eksemplar/hari)	Lama Pelayanan (menit)	<i>Time Windows</i> (menit)
1	PT Harian Serambi Indonesia (Depot)	0	0	[0,0]
2	Trimora Agency Banda Aceh	3950	40	[15,150]
3	Dadang Supriadi Lampriet	1480	15	[30,150]
4	Darussalam Post	1621	17	[45,175]
5	Azra Agency Krueng Raya	1892	19	[75,180]
6	Joni Sukandar Seutui	1175	12	[60,150]
7	Nila Agency Lhoknga	635	7	[45,180]
8	Montasik Raya Post Lambaro Kafee	655	7	[30,180]
9	Abrah Agency Sibreh	612	7	[45,150]
10	Makmu Beusaree Indrapuri	595	6	[30,180]
11	Banora Agency Seulimun	493	5	[60,175]
12	Saree Agency	250	3	[30,150]
13	Syahril Agency Padang Tiji	520	6	[45,180]
14	Mulyadi Agency Sigli	1850	19	[60,180]
15	Sunaryati Agency Beureunun	1610	17	[15,150]

Tabel 3 Data kendaraan yang tersedia

No	Jenis Kendaraan	Banyaknya Kendaraan (Unit)	Kapasitas Kendaraan (eksemplar)	Biaya Tetap Kendaraan (Rupiah)	Biaya Perjalanan (Rupiah/km)	Kecepatan (km/menit)
1	Boks kecil	3	1000	100.000	1.000	0.9
2	Boks sedang	3	3000	280.000	1.000	1
3	Boks besar	2	4000	375.000	1.000	1.2

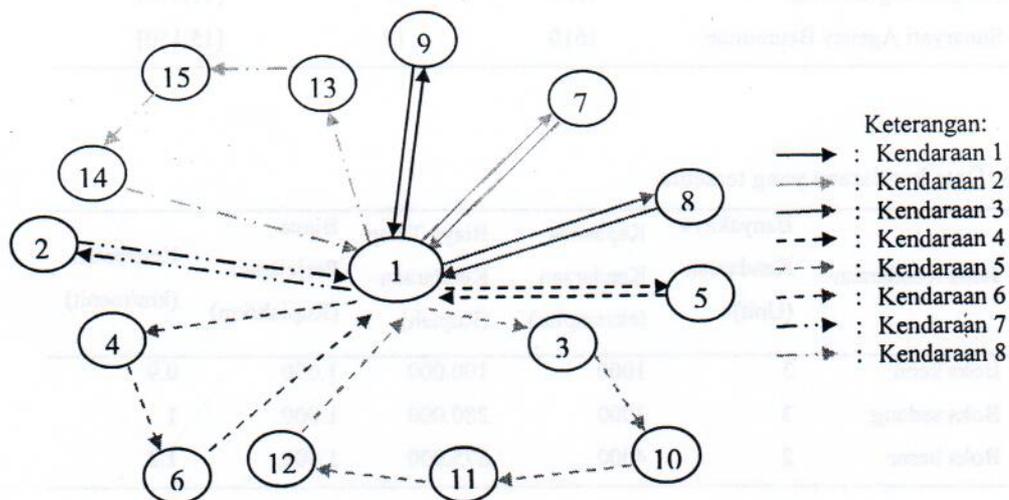
Pada penelitian ini, koran dikirim kepada sejumlah agen yang jumlah permintaannya telah diketahui. Data jarak antaragen dapat dilihat di Tabel 1. Pendistribusian koran dilakukan setiap hari pada selang waktu tertentu, yaitu pukul 02.00 sampai dengan pukul 05.00, dengan

pukul 02.00 dinyatakan sebagai waktu 0 dan pukul 05.00 sebagai 180. Setiap kendaraan hanya dapat melayani agen sesuai dengan *time windows* dari agen tersebut. Data banyaknya permintaan, lama pelayanan, dan *time windows* dari setiap agen diberikan pada Tabel 2, dan data lainnya diberikan di Tabel 3.

Pada penelitian ini dilakukan 3 simulasi. Pada Simulasi 1, PT Harian Serambi Indonesia harus meminimumkan biaya yang dikeluarkan oleh perusahaan dengan menggunakan semua kendaraan yang tersedia. Pada Simulasi 2a, akan diminimumkan banyaknya kendaraan yang akan digunakan, sedangkan pada Simulasi 2b, perusahaan ingin meminimumkan biaya namun tidak semua kendaraan harus digunakan.

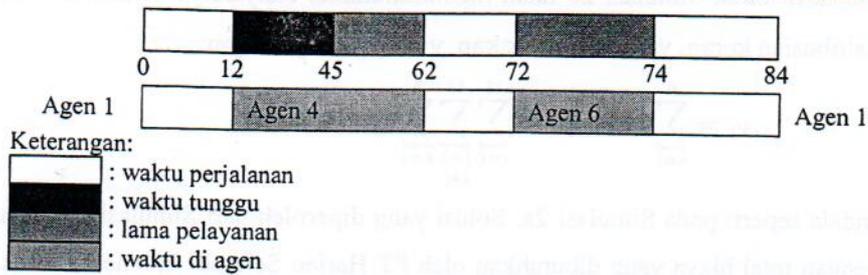
Dengan formulasi FSMVRPTW dan dengan bantuan perangkat lunak LINGO 11.0 diperoleh solusi optimal sebagai berikut:

Solusi yang diperoleh dari Simulasi 1 ialah solusi optimal dengan nilai fungsi objektif atau total biaya yang dibutuhkan untuk melakukan pendistribusian koran sebesar Rp2.461.000 yang didapatkan pada iterasi ke-3800857. Waktu yang dibutuhkan untuk mendapatkan solusi tersebut sekitar 54 menit 26 detik dengan menggunakan komputer Intel® Atom™ CPU N455@1.66Ghz 1 GB DDR3. Rute pendistribusian koran yang diperoleh dari hasil proses komputasi dapat dilihat pada Gambar 1.



Gambar 1 Rute pendistribusian koran PT Harian Serambi Indonesia Simulasi 1.

Contoh waktu perjalanan salah satu kendaraan, yaitu Kendaraan 6, diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2 Bagan waktu pendistribusian koran pada Simulasi 1 menggunakan Kendaraan 6.

Fungsi objektif untuk Simulasi 2a ialah meminimumkan banyaknya kendaraan yang harus digunakan: Minimumkan $y := \sum_{k=1}^8 z_k$ dengan kendala seperti pada Simulasi 1, dengan perubahan: Kendala 1 pada Simulasi 1 diubah menjadi:

a. Tidak ada agen yang dilayani oleh kendaraan yang tidak dijalankan,

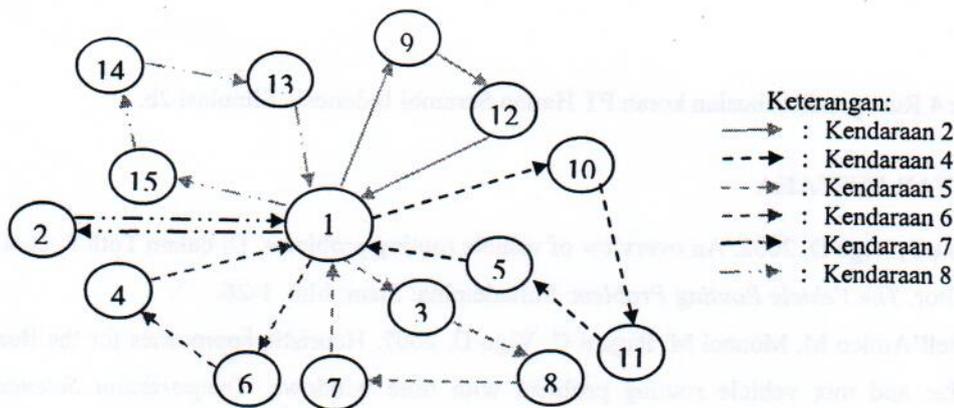
$$x_{ijk} \leq z_k, \forall i, j \in 1, 2, \dots, 15; i \neq j; \forall k \in 1, 2, \dots, 8.$$

b. Tidak semua kendaraan keluar dari depot, $\sum_{j=2}^{15} x_{1jk} \leq 1, \forall k = 1, 2, \dots, 8.$

Kendala 2 – 9 sama seperti pada Simulasi 1, dan ditambahkan Kendala 10, yaitu

10. Variabel keputusan z_k merupakan variabel keputusan yang bernilai 0 atau 1.

Solusi optimal dari Simulasi 2a rute yang menggunakan 6 kendaraan. Waktu yang dibutuhkan untuk mendapatkan solusi tersebut sekitar 26 menit 47 detik. Rute pendistribusian koran dapat dilihat pada Gambar 3.

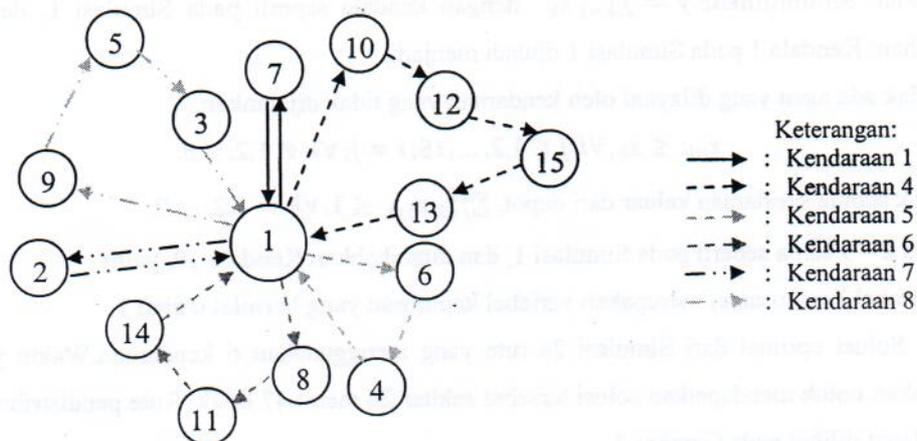


Gambar 3 Rute pendistribusian koran PT Harian Indonesia Simulasi 2a.

Fungsi objektif untuk Simulasi 2b ialah meminimumkan banyaknya kendaraan dan total biaya pendistribusian koran, yaitu Minimumkan $y := y_1 + y_2$, dengan:

$$y_1 := \sum_{k=1}^8 f_k z_k, \quad y_2 := \sum_{i=1}^{15} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{15} \sum_{k=1}^8 c_{ij} x_{ijk}.$$

dan terhadap kendala seperti pada Simulasi 2a. Solusi yang diperoleh dari Simulasi 2b ialah solusi optimal dengan total biaya yang dibutuhkan oleh PT Harian Serambi Indonesia untuk melakukan pendistribusian koran sebesar Rp.2.301.000 yang didapatkan pada iterasi ke-245694192. Waktu yang dibutuhkan untuk mendapatkan solusi tersebut sekitar 89 jam 35 menit 44 detik.



Gambar 4 Rute pendistribusian koran PT Harian Serambi Indonesia Simulasi 2b.

5 DAFTAR PUSTAKA

- [4] Toth P, Vigo D. 2002. An overview of vehicle routing problems. Di dalam Toth P, et al., editor. *The Vehicle Routing Problem*. Philadelphia: Siam; hlm. 1-26.
- [5] Dell'Amico M, Monaci M, Pagani C, Vigo D. 2007. Heuristic approaches for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *Transportation Science*; 41(4):516-526.

- [6] Belfiore PP, Favero LPL. 2007. Scatter search for the fleet size and mix vehicle routing problem with time windows. *CEJOR*; 15:351-368.
- [7] Iskandar.2010. Model optimasi *vehicle routing problem* dan implementasinya[tesis].Bogor: Program Pascasarjana, Institut Pertanian Bogor.

PENERAPAN FUZZY GOAL PROGRAMMING DALAM PENENTUAN INVESTASI BANK

Nurul Khotimah^{*)}, Farida Hanum, Toni Bakhtiar

Departemen Matematika FMIPA, Institut Pertanian Bogor
Jl. Meranti, Kampus IPB Darmaga, Bogor 16680
^{*)}nurulkhotimah99@googlemail.com

ABSTRAK

Investasi merupakan salah satu upaya untuk memperoleh keuntungan. Pengalokasian dana untuk investasi ke dalam banyak produk investasi yang tidak cermat dapat menimbulkan kerugian. Ada banyak produk investasi, baik yang berisiko maupun yang tidak berisiko. Pada umumnya, investasi berisiko menawarkan keuntungan yang lebih besar dibandingkan dengan investasi yang tidak berisiko. Dalam penelitian ini, penentuan investasi dana Bank AXN diselesaikan dengan bantuan metode *preemptive goal programming*, kemudian ditentukan solusi optimalnya dengan metode *fuzzy goal programming*. Dalam contoh implementasi diperoleh jenis-jenis investasi yang harus dipilih berikut nilai toleransinya yang memaksimalkan keuntungan.

Katakunci: investasi dana bank, *fuzzy goal programming*, *preemptive goal programming*

1 PENDAHULUAN

Bank memiliki peranan penting untuk keberlangsungan perekonomian di suatu Negara. Bank tidak hanya sebagai lembaga penghimpun dan penyedia dana saja, akan tetapi juga sebagai perantara keuangan masyarakat. Pada dasarnya, aktivitas utama manajemen bank ialah mengelola dana, baik mengatur dana yang masuk dari masyarakat dalam bentuk giro, deposito, dan tabungan maupun menyalurkannya dalam berbagai bentuk produk investasi. Keberhasilan dalam mengelola dana tersebut merupakan salah satu kunci sukses bagi manajemen bank dalam mengelola sebuah bank.

Manajemen dana berkaitan dengan masalah mengoptimalkan dana yang dihimpun dan mengalokasikan dana tersebut untuk mencapai tingkat profitabilitas yang tinggi dengan tetap menjaga agar posisi likuiditas tetap aman sehingga kepercayaan masyarakat terhadap bank tetap terjaga. Oleh karena itu, manajemen bank tidak terlepas dari permasalahan bagaimana memaksimalkan profit, meminimumkan aset berisiko, dan meminimumkan kecukupan modal.

2 GOAL PROGRAMMING

Goal programming adalah salah satu teknik untuk menyelesaikan masalah optimasi dengan tujuan lebih dari satu (multiobjektif). Model ini merupakan perluasan dari model pemrograman linear. Model *goal programming* memiliki sepasang variabel deviasi d_j^- dan d_j^+ yang taknegatif. Variabel d_j^- menampung deviasi yang berada di bawah sasaran ke- j sedangkan variabel d_j^+ merupakan nilai deviasi yang berada di atas sasaran ke- j . Variabel-variabel deviasi ini harus diminimumkan. Suatu tujuan ke- j dianggap berhasil bila variabel deviasi pada fungsi objektif tujuan ke- j bernilai 0 [1].

2.1 Preemptive Goal Programming

Preemptive goal programming adalah masalah *goal programming* dengan urutan prioritas meminimuman variabel deviasi. Untuk mengaplikasikan model ini, harus ditentukan peringkat tujuan mulai dari yang paling penting hingga tujuan yang tidak terlalu penting. Dalam [2], *preemptive goal programming* diselesaikan dengan aturan sebagai berikut:

- 1 prioritas tujuan ditentukan berdasarkan pada tingkat kepentingan tujuan; tujuan yang menjadi prioritas pertama akan diselesaikan terlebih dahulu, dan seterusnya
- 2 setelah tujuan pertama terpenuhi, maka fungsi tujuan pada prioritas pertama menjadi kendala tambahan pada prioritas kedua, begitu seterusnya sampai prioritas ke- n ,
- 3 jika tujuan pada prioritas pertama adalah meminimumkan, maka fungsi tujuan pada prioritas pertama akan menjadi kendala tambahan pada prioritas kedua dengan tanda pertaksamaan \leq , sedangkan jika tujuan pada prioritas pertama adalah memaksimumkan, maka fungsi tujuan pada prioritas pertama akan menjadi kendala tambahan pada prioritas kedua dengan tanda pertaksamaan \geq begitu seterusnya sampai prioritas ke- n ,
- 4 jika tidak diperoleh solusi fisibel pada prioritas ke- n , maka solusi optimal yang digunakan adalah solusi yang diperoleh pada prioritas ke- $(n-1)$.

2.2 Fuzzy Linear Goal Programming

Teori logika *fuzzy* merupakan perluasan dari teori himpunan tegas (*crisp*) yang menggunakan derajat keanggotaan $\{0, 1\}$ menjadi selang $[0, 1]$. Jika X adalah koleksi dari objek-objek yang dinotasikan dengan x , maka suatu himpunan *fuzzy* \tilde{A} dalam X adalah suatu himpunan pasangan berurutan $\tilde{A} = \{(x, \mu_{\tilde{A}}(x)) | x \in X\}$ dengan $\mu_{\tilde{A}}(x) : X \rightarrow [0, 1]$ adalah fungsi

keanggotaan dari suatu himpunan fuzzy \tilde{A} yang memetakan X ke ruang keanggotaan yang terletak pada selang $[0,1]$. Nilai fungsi $\mu_{\tilde{A}}(x)$ menyatakan derajat keanggotaan atau nilai keanggotaan dari x di himpunan \tilde{A} [3]. Fungsi keanggotaan dalam himpunan fuzzy adalah suatu pemetaan dari suatu objek ke dalam derajat keanggotaannya yang memiliki interval antara 0 sampai 1.

Masalah *fuzzy goal programming* (FGP) adalah model *goal programming* dengan fungsi objektif dan fungsi kendala memiliki parameter dan pertaksamaan atau persamaan fuzzy. Parameter FGP memiliki derajat keanggotaan tertentu dalam selang $[0, 1]$ dan dinyatakan dalam pertaksamaan fuzzy, yaitu \succeq (hampir lebih besar atau sama dengan), atau \preceq (hampir lebih kecil atau sama dengan) atau persamaan fuzzy, yaitu \cong (hampir sama dengan). Model *fuzzy goal programming* dapat diformulasikan sebagai berikut:

Tentukan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$ sehingga memenuhi fungsi tujuan

$$Z_k(X) \begin{bmatrix} \succeq \\ \preceq \end{bmatrix} g_k, k = 1, 2, \dots, K,$$

terhadap kendala

$$AX \begin{bmatrix} \succeq \\ \cong \\ \preceq \end{bmatrix} b, b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in R^m$$

dengan X : vektor variabel keputusan, g_k : ketidaktepatan level aspirasi (nilai ruas kanan) ke- k dari tujuan $Z_k(X)$, $k = 1, 2, \dots, K$, A : matriks koefisien berordo $m \times n$, b : vektor nilai ruas kanan kendala, $Z_k(X) \begin{bmatrix} \succeq \\ \preceq \end{bmatrix} g_k$: tujuan fuzzy ke- k . Tanda \preceq merupakan bentuk fuzzy dari tujuan dan kendala tipe \leq , tanda \succeq merupakan bentuk fuzzy dari tujuan dan kendala tipe \geq dan tanda \cong merupakan bentuk fuzzy dari kendala tipe $=$ (Gupta dan Bhattacharya 2010b).

Fungsi tujuan maupun kendala yang fuzzy dapat dicirikan dengan fungsi keanggotaan masing-masing. Selanjutnya ditetapkan derajat tertinggi sebagai level aspirasi dari tujuan fuzzy. Fungsi tujuan fuzzy menggunakan level aspirasi yang bersifat tidak tepat. Model fuzzy ini perlu diubah ke dalam persamaan tegas (*crisp*) dengan menyubstitusikan fungsi tersebut pada fungsi keanggotaan fuzzy linear.

Jika p_k mendefinisikan toleransi untuk tujuan fuzzy ke- k yaitu konstanta taknegatif yang dipilih secara subjektif dari ketidaktepatan nilai g_k yang masih dapat diterima, maka

fungsi keanggotaan dari fungsi tujuan fuzzy $Z_k(X)$, dinyatakan dengan $\mu(Z_k(X))$, dapat digunakan untuk mendefinisikan tujuan fuzzy $Z_k(X)$ sebagai berikut:

- Fungsi keanggotaan tujuan fuzzy $Z_k(X) \geq g_k, k = 1, 2, \dots, K$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(Z_k(X)) = \begin{cases} 0, & \text{jika } Z_k(X) < g_k - p_k \\ \frac{Z_k(X) - (g_k - p_k)}{p_k}, & \text{jika } g_k - p_k \leq Z_k(X) < g_k \\ 1, & \text{jika } g_k \leq Z_k(X) \leq g_k + p_k \end{cases}$$

- Fungsi keanggotaan tujuan fuzzy $Z_k(X) \leq g_k, k = 1, 2, \dots, K$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(Z_k(X)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } g_k - p_k \leq Z_k(X) \leq g_k \\ \frac{(g_k + p_k) - Z_k(X)}{p_k}, & \text{jika } g_k < Z_k(X) \leq g_k + p_k \\ 0, & \text{jika } Z_k(X) > g_k + p_k \end{cases}$$

Jika $q_i (i = 1, 2, \dots, m)$ mendefinisikan toleransi untuk kendala fuzzy ke- i , yaitu konstanta taknegatif yang dipilih secara subjektif dari ketidaktepatan nilai b_i yang masih dapat diterima, maka fungsi keanggotaan dari kendala fuzzy $a_i(x)$ (a_i adalah baris ke- i dari matriks AX), dinyatakan dengan $\mu(a_i(x))$ dapat digunakan untuk mendefinisikan kendala fuzzy $a_i(x)$.

- Untuk kendala fuzzy $a_i(X) \geq b_i, i = 1, 2, \dots, m$ (b_i adalah baris ke- i dari vektor b), fungsi keanggotaannya didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(a_i(X)) = \begin{cases} 0, & \text{jika } a_i(X) < b_i - q_i \\ \frac{a_i(X) - (b_i - q_i)}{q_i}, & \text{jika } b_i - q_i \leq a_i(X) < b_i \\ 1, & \text{jika } b_i \leq a_i(X) \leq b_i + q_i \end{cases}$$

- fungsi keanggotaankendala fuzzy $a_i(X) \leq b_i, i = 1, 2, \dots, m$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(a_i(X)) = \begin{cases} 1, & \text{jika } b_i - q_i \leq a_i(X) \leq b_i \\ \frac{(b_i + q_i) - a_i(X)}{q_i}, & \text{jika } b_i < a_i(X) \leq b_i + q_i \\ 0, & \text{jika } a_i(X) > b_i + q_i \end{cases}$$

dengan $b_i - q_i$ dan $b_i + q_i$ masing-masing menunjukkan batas bawah toleransi dan batas atas toleransi untuk kendala fuzzy pertaksamaan $a_i(X)$.

- fungsi keanggotaan kendala fuzzy $a_i(X) \cong b_i, i = 1, 2, \dots, m$, didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu(a_i(X)) = \begin{cases} 0, & \text{jika } a_i(X) < b_i - q_{i1} \\ & \text{atau } a_i(X) > b_i + q_{i2} \\ \frac{a_i(X) - (b_i - q_{i1})}{q_{i1}}, & \text{jika } b_i - q_{i1} \leq a_i(X) < b_i \\ 1, & \text{jika } a_i(X) = b_i \\ \frac{(b_i + q_{i2}) - a_i(X)}{q_{i2}}, & \text{jika } b_i < a_i(X) \leq b_i + q_{i2} \end{cases}$$

Pada metode *fuzzy goal programming*, derajat keanggotaan $\mu(Z_k(X))$ dari suatu tujuan ke- k berada pada selang $[0, 1]$, sehingga dengan menambahkan variabel deviasi d_k^- dan d_k^+ , fungsi keanggotaan dari tujuan fuzzy dapat direpresentasikan sebagai $\mu(Z_k(X)) + d_k^- - d_k^+ = 1$, untuk fungsi keanggotaan dari tujuan tipe \geq dan \leq dengan $d_k^-, d_k^+ \geq 0, d_k^+ \cdot d_k^- = 0, k = 1, 2, \dots, K$. Variabel d_k^- dan d_k^+ berturut-turut merupakan variabel deviasi yang berada di bawah dan di atas dari derajat keanggotaan tujuan fuzzy ke- k .

Suatu tujuan ke- k dikatakan berhasil dicapai bila nilai variabel deviasi d_k^- dan d_k^+ kurang dari satu. Jika nilai variabel deviasi $d_k^- > 1$, maka akan mengakibatkan derajat keanggotaan $\mu(Z_k(X)) < 0$. Sedangkan jika $d_k^+ > 1$, maka akan mengakibatkan nilai fungsi objektif $Z_k(X)$ melebihi batas toleransi yang diberikan oleh pembuat keputusan. Semakin nilai variabel deviasi d_k^- dan d_k^+ dekat dengan 0, semakin besar tingkat keberhasilan tujuan ke- k .

Suatu kendala fuzzy ke- i memiliki derajat keanggotaan pada selang $[0, 1]$, sehingga dengan menambahkan variabel deviasi d_i^- dan d_i^+ , fungsi keanggotaan dari kendala tipe \geq dan \leq dapat direpresentasikan sebagai berikut:

$$\mu(a_i(X)) + d_i^- - d_i^+ = 1, d_i^-, d_i^+ \geq 0, d_i^+ \cdot d_i^- = 0, i = 1, 2, \dots, m.$$

d_i^- dan d_i^+ merupakan variabel deviasi yang berada di bawah dan di atas dari derajat keanggotaan kendala fuzzy ke- i . Suatu kendala ke- i dikatakan berhasil dicapai bila nilai variabel deviasi d_i^- dan d_i^+ kurang dari satu. Jika nilai variabel deviasi $d_i^- > 1$, maka akan mengakibatkan derajat keanggotaan $\mu(a_i(X)) < 0$. Sedangkan jika $d_i^+ > 1$, maka akan mengakibatkan nilai fungsi objektif $a_i(X)$ melebihi batas toleransi yang diberikan oleh pembuat keputusan. Semakin nilai variabel deviasi d_i^- dan d_i^+ dekat dengan 0, semakin besar

tingkat keberhasilan kendala ke- i . Fungsi keanggotaan untuk kendala *fuzzy* persamaan merupakan gabungan dari fungsi keanggotaan untuk kendala *fuzzy* pertaksamaan (\geq dan \leq).

Selanjutnya akan digunakan metode *min sum fuzzy goal programming*, yaitu suatu metode *fuzzy goal programming* yang menggunakan fungsi keanggotaan dari fungsi objektif dan fungsi kendala yang dianggap sebagai kendala *fuzzy* dengan menetapkan derajat tertinggi dari level aspirasi. Metode ini akan meminimumkan variabel deviasi yang berada di bawah tujuan dan kendala *fuzzy* (lihat [2]). Menurut Gupta dan Bhattacharya metode *min sum fuzzy goal programming* dengan kendala *fuzzy* dapat diformulasikan sebagai berikut:

Tentukan $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ yang meminimumkan $z = \sum_{k=1}^K d_k^- + \sum_{i=1}^m d_i^-$ dengan kendala

- (1) $\frac{Z_k(X) - (g_k - p_k)}{p_k} + d_k^- - d_k^+ = 1$, (untuk tujuan tipe \geq)
- (2) $\frac{(g_k + p_k) - Z_k(X)}{p_k} + d_k^- - d_k^+ = 1$, (untuk tujuan tipe \leq)
- (3) $\frac{a_i(X) - (b_i - q_i)}{q_i} + d_i^- - d_i^+ = 1$, (untuk kendala tipe \geq)
- (4) $\frac{(b_i + q_i) - a_i(X)}{q_i} + d_i^- - d_i^+ = 1$, (untuk kendala tipe \leq)
- (5) $\frac{(b_i + q_{i1}) - a_i(X)}{q_{i1}} + d_i^- - d_i^+ = 1$ dan $\frac{a_i(X) - (b_i - q_{i2})}{q_{i2}} + d_i^- - d_i^+ = 1$ (untuk kendala tipe \cong)
- (6) $g_k - p_k \leq Z_k(X) \leq g_k + p_k$ (kendala batas toleransi untuk tujuan tipe \geq dan \leq)
- (7) $b_i - q_i \leq a_i(X) \leq b_i + q_i$ (kendala batas toleransi untuk kendala tipe \geq dan \leq)
- (8) $b_i - q_{i1} \leq a_i(X) \leq b_i + q_{i2}$ (kendala batas toleransi untuk kendala tipe \cong)
- (9) $X, d_k^-, d_k^+, p_k \geq 0; d_k^-, d_k^+ \leq 1; d_k^+ \cdot d_k^- = 0; k = 1, 2, \dots, K$
 $d_i^-, d_i^+, q_i, q_{i1}, q_{i2} \geq 0; d_i^-, d_i^+ \leq 1, d_i^+ \cdot d_i^- = 0; i = 1, 2, \dots, m.$

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Produk investasi yang ditawarkan bank ada yang berisiko dan ada yang tidak. Semakin tinggi risiko suatu produk investasi, semakin besar tingkat pendapatan yang diperoleh. Oleh karena itu, bank harus bisa mengalokasikan produk investasi sehingga memaksimalkan profit dan meminimumkan risiko secara bersamaan. Misalkan bahwa setiap bank harus memiliki karakteristik sebagai berikut:

- 1 Paling sedikit 47% dari giro dan 36% dari deposito berjangka dan tabungan tetap dalam keadaan likuid (*liquid part*).

Perlu deskripsi lebih rinci!

- 2 Paling sedikit 14% dari giro dan 4% dari deposito berjangka dan tabungan dialokasikan dalam kategori kas.
- 3 Paling sedikit 5% dari total sumber dana diinvestasikan ke setiap kategori investasi.
- 4 Paling sedikit 40% dari total sumber dana diinvestasikan ke pinjaman komersial.

Selanjutnyadigunakan 3 fungsi objektif, yaitu memaksimumkan profit, meminimumkan kecukupan modal, dan meminimumkan rasio aset berisiko (jumlah investasi yang berisiko/modal). Fungsi objektif profit diperoleh dari penjumlahan tingkat pendapatan setiap kategori investasi. Fungsi objektif kecukupan modal diperoleh dari rasio modal wajib untuk memenuhi kebutuhan investasi dengan modal sebenarnya (dana sendiri). Fungsi objektif risiko diperoleh dari rasio jumlah investasi yang berisiko terhadap dana sendiri. Rasio aset berisiko yang rendah mengindikasikan bahwa suatu lembaga keuangan dalam keadaan aman. Kecukupan modal yang rendah mengindikasikan risiko yang minimum, karena kecukupan modal yang rendah memberikan makna bahwa selisih antara dana yang dibutuhkan untuk investasi dan dana sebenarnya (modal sendiri) juga rendah sehingga mengakibatkan risiko yang minimum.

3.1 Contoh Kasus Bank AXN

Tabel 1 Kategori investasi Bank AXN

<i>j</i>	Kategori Investasi	Tingkat Pendapatan (%)	Bagian Likuid (%)	Kecukupan Modal (%)	Aset Berisiko? (Ya/Tidak)
1	Kas	0	100	0	Tidak
2	Investasi jangka pendek	4	99.5	1	Tidak
3	Surat berharga pemerintah jangka waktu 1 sampai 5 tahun	3.5	96	5	Tidak
4	Surat berharga pemerintah jangka waktu 5 sampai 10	7	90	6	Tidak
5	Pinjaman angsuran	11.5	0	17	Ya
6	Kredit tunai	12	0	19	Ya
7	Pinjaman komersial	10.5	0	11	Ya

Misalkan sumber dana Bank AXN berasal dari dana sendiri dan dana dari pihak ketiga. Sumber dana sendiri sebesar 250 juta rupiah, sumber dana dari pihak ketiga terdiri atas giro sebesar 125000 juta rupiah, dan deposito berjangka dan tabungan sebesar 225000 juta rupiah.

Dana tersebut akan diinvestasikan ke dalam berbagai kategori investasi dengan tingkat pendapatan, bagian likuid, kecukupan modal, dan risiko aset, seperti pada Tabel 1.

Misalkan x_j = banyaknya uang (dalam jutaan rupiah) yang akan diinvestasikan ke dalam kategori investasi ke- j , $j = 1, 2, \dots, 7$. Formulasi pemrograman linear multiobjektif ialah:

- (1) Minimumkan (aset berisiko): $Z_1(X) := \left(\frac{1}{250}\right)(x_5 + x_6 + x_7)$
- (2) Maksimumkan (profit) $Z_2(X) := 0.04x_2 + 0.035x_3 + 0.07x_4 + 0.115x_5 + 0.12x_6 + 0.105x_7$
- (3) Minimumkan (kecukupan modal) $Z_3(X) := \left(\frac{1}{250}\right)(0.01x_2 + 0.05x_3 + 0.06x_4 + 0.17x_5 + 0.19x_6 + 0.11x_7)$

dengan kendala

- (1) Semua dana (dana sendiri dan dana pihak ketiga) diinvestasikan ke setiap kategori investasi: $x_1 + \dots + x_7 = 350250$
- (2) Kendala likuiditas: $x_1 + 0.995x_2 + 0.96x_3 + 0.9x_4 \geq 0.47 \times 125000 + 0.36 \times 225000$
- (3) Kendala diversifikasi
 $x_1 \geq 0.14 \times 125000 + 0.04 \times 225000$, dan $x_j \geq 0.05 \times 350250$, $j = 2, \dots, 7$
- (4) Kendala untuk aset komersial: $x_7 \geq 0.4(250 + 125000 + 225000)$

Masalah investasi Bank AXN diselesaikan dengan *preemptive goal programming* menggunakan *software* LINGO 11.0. Misalkan prioritas pertama ialah meminimumkan aset berisiko, prioritas kedua ialah memaksimumkan profit, dan prioritas ketiga ialah meminimumkan kecukupan modal. Maka formulasi masalah prioritas pertama ialah:

Minimumkan (aset berisiko) $Z_1(X) := \left(\frac{1}{250}\right)(x_5 + x_6 + x_7)$ dengan kendala

- (1) $x_1 + \dots + x_7 = 350250$
- (2) $x_1 + 0.995x_2 + 0.96x_3 + 0.9x_4 \geq 139750$
- (3) $x_1 \geq 26500$, $x_j \geq 17512.5$, $j = 2, \dots, 7$
- (4) $x_7 \geq 140100$

Solusi optimal (dalam juta rupiah) masalah ini ialah: $x_1 = 26500$, $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 17512.5$, $x_4 = 113600$, $x_7 = 140100$ dengan $Z_1 = 700.5$, $Z_2 = 28091.38$ juta rupiah dan $Z_3 = 118.329$. Kemudian nilai fungsi objektif risiko $Z_1 \leq 700.5$ ditambahkan pada kendala di prioritas kedua, dan diperoleh solusi optimal $x_1 = 26500$, $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 17512.5$, $x_4 = 113600$, $x_7 = 140100$ dengan $Z_1 = 700.5$, $Z_2 = 28091.38$ juta rupiah dan $Z_3 = 118.329$. Dengan cara serupa, fungsi objektif profit $Z_2 \geq 28091.38$ juta rupiah ditambahkan pada kendala di

prioritas ketiga. Masalah ini tidak mempunyai solusi fisibel. Jadi solusi optimal diperoleh dari prioritas kedua.

Selanjutnya akan digunakan metode *goal programming* dengan menetapkan secara subjektif tiga level aspirasi dari fungsi objektif aset berisiko, profit, dan kecukupan modal, yaitu $g_1 = 700$, $g_2 = 28100$ juta rupiah, dan $g_3 = 118$. Penetapan level aspirasi tersebut didasarkan pada solusi nilai fungsi objektif yang diperoleh dari metode *preemptive goal programming*. Model *fuzzy goal programming* untuk masalah alokasi investasi Bank AXN sebagai berikut:

Tentukan $X = (x_1, x_2, \dots, x_7)$ sehingga memenuhi fungsi objektif

$$(1) Z_1(X) \lesssim 700, Z_2(X) \gtrsim 28100, Z_3(X) \lesssim 118 \text{ terhadap kendala}$$

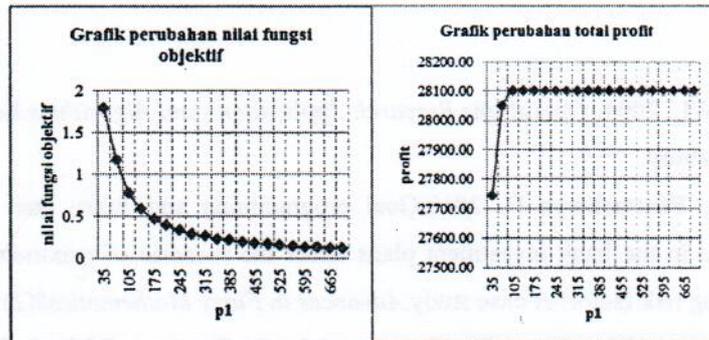
$$(1) x_1 + \dots + x_7 \cong 350250$$

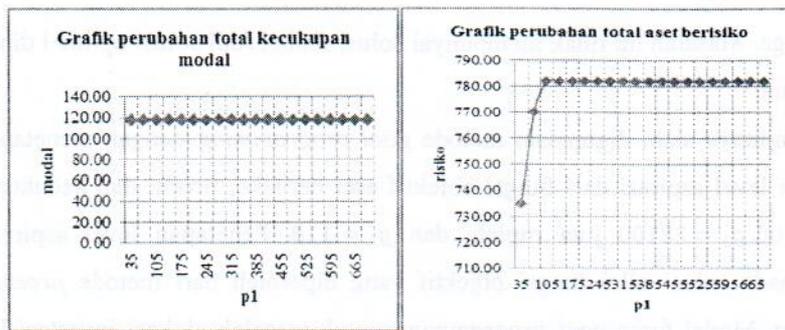
$$(2) x_1 + 0.995x_2 + 0.96x_3 + 0.9x_4 \gtrsim 139750$$

$$(3) x_1 \gtrsim 26500, x_j \gtrsim 17512.5, j = 2, \dots, 7$$

$$(4) x_7 \gtrsim 140100$$

Selanjutnya, didefinisikan fungsi keanggotaan untuk setiap tujuan dan kendala *fuzzy*, kemudian ditentukan nilai-nilai toleransi p dan q . Nilai toleransi ditentukan dengan *trial and error*, dengan menganggap satu parameter yang berubah nilainya, sedang parameter lainnya tetap. Sebagai contoh, misalkan nilai toleransi p_1 selalu berubah dan nilai toleransi p_2, p_3, q_{11}, q_{12} , dan q_2 konstan, yaitu $p_1 = 700r; r \in [0.05, 1]; p_2 = 0.05 \times 28100; p_3 = 0.05 \times 118; q_{11} = q_{12} = 0.05 \times 350250; q_2 = 0.05 \times 139750$, maka diperoleh grafik fungsi objektif, aset berisiko, profit, dan kecukupan modal sebagai berikut:





Dipilih nilai toleransi $p_1 = 105$ sehingga total aset berisiko ada dalam selang $[595, 805]$. Demikian dan seterusnya dilakukan dengan parameter-parameter yang lain, yaitu $p_2 = 1405, p_3 = 53.1, q_{11} = 35025, q_{12} = 17512.5, \text{ dan } q_2 = 20962.5$ sehingga diperoleh solusi optimal (dalam juta rupiah) $x_1 = 26500, x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 17512.5, x_4 = 111084, x_7 = 141859.5$ dengan nilai fungsi objektif sebesar 0.102794 dan total aset berisiko $Z_1 = 707.54$, total profit $Z_2 = 28100$ juta rupiah, dan total kecukupan modal $Z_3 = 118.5$. Jadi, Bank AXN akan memperoleh profit sebesar 28100 juta rupiah dengan total risiko sebesar 707.54 dan total kecukupan modal sebesar 118.5 jika menginvestasikan dana sebesar 26500 juta rupiah untuk kategori kas, sebesar 17512.5 juta rupiah untuk masing-masing kategori investasi jangka pendek, surat berharga pemerintah jangka waktu 1 sampai 5 tahun, pinjaman angsuran, dan kredit tunai, sebesar 111084 juta rupiah untuk kategori investasi surat berharga pemerintah jangka waktu 5 sampai 10 tahun, dan sebesar 141859.5 juta rupiah untuk kategori investasi pinjaman komersial.

4 PUSTAKA

- [1] Winston WL. 2004. *Operations Research Applications and Algorithms*. Ed ke-4. New York: Duxbury.
- [2] Gupta M, Bhattacharya D. 2010. Goal programming and fuzzy goal programming techniques in the bank investment plans under the scenario of maximizing profit and minimizing risk factor: A case study. *Advances in Fuzzy Mathematics* 5(2):111-119.
- [3] Zimmermann. 1991. *Fuzzy Set Theory and Its Applications*. Ed ke-2. Massachusetts: Kluwer Academic Publishers.