

Jurnal MATEMATIKA INTEGRASI

**KRIGING PADA *THIN-PLATE SPLINE* DENGAN PENDEKATAN
MODEL CAMPURAN**

Oleh : Anik Djuraidah dan Aunuddin

ASESMEN OTENTIK

Oleh : C. Jacob

**PEMODELAN KALIBRASI PEUBAH GANDA DENGAN PENDEKATAN
REGRESI SINYAL P-SPLINE**

Oleh : Tonah, Ahmad Ansori Mattjik dan Khairil Anwar Notodiputro

**PROJECTION PURSUIT UNTUK MEREDUKSI DATA CITRA
HIPERSPEKTRAL MENGGUNAKAN ALGORITMA GENETIKA**

Oleh : Yurika Permanasari dan Teti Sofia Yanti

**KONTROL OPTIMUM PENGISIAN KAPASITOR DENGAN
MENGUNAKAN METODE KUADRAT TERKECIL**

Oleh : Nursanti Anggriani, Kankan Parmikanti dan Nurul Gusriani

**ALGORITMA UNTUK MENENTUKAN WAKTU PENGGANTIAN
OPTIMAL DENGAN DISTRIBUSI KEGAGALAN WEIBULL**

Oleh : Rio Wicaksono, Asep K. Supriatna dan Riaman



Jurnal Matematika Integratif

DEWAN EDITOR

Ketua : Dr. Ichary Soekirno
 Wakil Ketua : Dr. Asep K. Supriatna

Anggota : Prof. Dr. Ing. Wardiman Djojonegoro (UNPAD)
 Prof. Dr. Belawati H. Widjaja (UI)
 Dr. Djati Kerami (UI)
 Dr. Budi Nurani R. (UNPAD)
 Surjadi Slamet, M.Sc. (UI)
 Setiawan Hadi, M.Sc.Cs. (UNPAD)

REDAKTUR PELAKSANA

Ketua : Sukono, M.Si.
 Wakil Ketua : Asep Sholahudin, M.T.

Anggota : Riaman, M.Si. Akmal, MT.
 Agus Supriyatna, M.Si. Badrulfalah, MS.
 Ema Carnia, M.Si. Yayat Priyatna, MSIE.
 Firdaninza, M.Si. Nursanti, M.Si.

TATA USAHA

Tita Rosita, Dra. (Administrasi), Lili Suarli, A.Md. (Administrasi), dan Reza (Disainer)

ALAMAT REDAKSI

Jurusan Matematika FMIPA Universitas Padjadjaran
 ❖ Jl. Raya Jatinangor Km 21, Jatinangor, Telp/Fax : 022 – 7794696
 ❖ Jl. Ir. H. Juanda No. 4, Bandung, Telp : 022 – 4218676, Fax : 022 – 4265163
 ❖ <http://www.unpad.ac.id/journal/jmi> dan e-mail : jmi@unpad.ac.id

Jurnal Matematika Integratif terbit dua kali dalam satu tahun (bulan April dan Oktober)

Jurnal Matematika Integratif

Jurnal Matematika Integratif (JMI) adalah jurnal nasional matematika yang dimaksudkan sebagai tempat komunikasi para matematikawan serta ilmuwan lain di praktisi yang banyak menggunakan matematika dalam kegiatan penelitiannya. menerima naskah dalam bidang kajian matematika secara luas, yang meliputi diantaranya, matematika murni (analisis, aljabar, geometri), matematika terapan, sejarah matematika, filsafat matematika, pendidikan matematika dan kajian multidisiplin berbasis matematika yang berasal dari permasalahan diluar matematika.

KRIGING DAN *THIN-PLATE* SPLINE DENGAN PENDEKATAN MODEL LINEAR CAMPURAN

Oleh :
Anik Djuraidah¹⁾ dan Aunuddin²⁾

ABSTRAK

Kriging adalah prosedur untuk prediksi spasial pada lokasi yang tidak diamati. Teknik ini dapat dipandang sebagai pendugaan kurva permukaan respon pada data yang berkorelasi spasial. Disamping kriging, spline-2 (*thin-plate spline*) juga sering digunakan untuk prediksi spasial. Kriging dan spline-2 dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi basis radial. Pada kriging fungsi basis radialnya ditentukan oleh struktur keragaman spasial. Sehingga pendugaan kriging dan spline-2 dapat didekati dengan model linear campuran. Kedua metode ini diterapkan pada data Ozon. Hasil analisis data menunjukkan bahwa model terbaik untuk prediksi spasial adalah kriging dengan jumlah simpul lima.

Kata kunci : kriging, korelasi spasial, spline-2, fungsi basis radial, parameter pemulus, model linear campuran, REML

ABSTRACT

Kriging is a procedure for spatial prediction at an unobserved location. This technique can be viewed as an estimation of respon surface on spatial correlated data. Beside kriging, thin-plate spline is often used for spatial prediction. Kriging and thin-plate spline can be expressed as a linear combination of radial basis function. The radial basis function of kriging is determined by spatial covariance structure. Hence kriging and thin-plate spline can be estimated by linear mixed model approach. The both methods are applied to air pollution Ozon in Surabaya City. The results show that the best model for spatial prediction of Ozon are using kriging with five knots.

Key words : kriging, correlogram, thin-plate spline, radial basis, smoothing parameter, linear mixed model, REML

1. PENDAHULUAN

Data spasial memuat dua informasi yaitu tentang lokasi pengamatan dan nilai respon dari peubah yang diukur. Misalkan nilai respon pada n lokasi pengamatan dinyatakan $\{Y(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathcal{R}^2\}$. Kriging adalah suatu teknik untuk menduga nilai respon pada lokasi yang tidak diamati melalui interpolasi spasial. Istilah kriging memiliki sinonim interpolasi linear optimal pada data yang berkorelasi spasial (Cressie, 1993). Metode konvensional geostatistik mengasumsikan bahwa $Y(\mathbf{t})$ mengikuti proses stokastik Gaussian dan bersifat stasioner.

¹⁾ Mahasiswa S3 program studi Statistika IPB (e-mail : aniksb@plasa.com)

²⁾ Dosen Departemen Statistika FMIPA IPB

Kriging dapat dipandang sebagai penduga kurva permukaan respon pada data yang berkorelasi spasial. Selain kriging, spline-2 (*thin-plate spline*) juga sering digunakan untuk pendugaan permukaan pada peubah penjelas dimensi-ganda (Green dan Silverman, 1994; Hutchinson, 1998). Metode spline-2 lebih sederhana daripada kriging karena tidak memerlukan persyaratan apapun mengenai $Y(\mathbf{t})$.

Kriging dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dari fungsi basis radial yang ditentukan oleh struktur keragaman spasial (Kamman dan Wand, 2003). Pada kriging struktur keragaman spasial merupakan komponen stokastik model, sehingga kriging dapat diduga dengan pendekatan model linear campuran dengan komponen acak model adalah struktur keragaman spasial. Demikian juga spline-2 merupakan kombinasi linear dari fungsi basis radial. Pada Spline-2 potongan-potongan basis radial merupakan komponen yang akan dimuluskan, maka potongan-potongan basis ini merupakan komponen acak pada model linear campuran (Ruppert dan Carroll, 1997; Wand, 2003). Dengan demikian kriging dan spline-2 dapat diduga dengan metode kemungkinan maksimum berkendala (REML) pada model linear campuran.

Pada tulisan ini akan dikaji tentang prediksi spasial dengan kriging dan spline-2 dengan pendekatan model linear campuran. Data yang digunakan adalah pencemar udara Ozon yang diukur oleh jaringan pemantau kualitas udara di kota Surabaya pada bulan Mei sampai Agustus 2002. Metode yang dikemukakan pada penelitian ini dikembangkan dari metode regresi spline terpenalti dengan pendekatan model linear campuran pada Djuraidah dan Aunuddin (2005) untuk data yang berkorelasi spasial.

2. PENDUGAAN KRIGING DAN SPLINE-2

2.1 Kriging dan Spline-d

Misalkan proses spasial $\{Y(\mathbf{t}), \mathbf{t} \in \mathcal{R}^2\}$ diuraikan ke dalam komponen sistematis atau efek rata-rata, komponen yang berkorelasi spasial, dan komponen galat acak yaitu

$$Y(\mathbf{t}) = X(\mathbf{t})\boldsymbol{\beta} + S(\mathbf{t}) + \varepsilon \quad (1)$$

dimana \mathbf{t} adalah vektor dari n lokasi spasial, $X(\mathbf{t})$ adalah matriks koordinat lokasi, $\boldsymbol{\beta}$ adalah vektor parameter untuk tren spasial, $S(\mathbf{t}) = \mathbf{S} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}_{11}(\phi))$ adalah efek acak spasial dimana $\mathbf{H}_{11}(\phi)_{ij} = \rho(\phi; d_{ij})$ adalah fungsi korelasi spasial (*correlogram*) dengan parameter σ^2 menyatakan *sill*, ϕ menyatakan *range*, dan d_{ij} menyatakan jarak antar lokasi, dan $\varepsilon \sim N_n(\mathbf{0}, \tau^2 \mathbf{I})$ adalah galat acak dengan parameter τ menyatakan *nugget*, sedangkan ε dan \mathbf{S} bersifat bebas stokastik. Untuk mengimplementasikan persamaan (1) diperlukan model untuk struktur matriks ragam-peragam antar pengamatan $[\text{cov}\{S(\mathbf{t}), S(\mathbf{t}')\}]$, $\mathbf{t}, \mathbf{t}' \in \mathcal{R}^2$. Stein (1999) merekomendasikan

$$[\text{cov}\{S(\mathbf{t}), S(\mathbf{t}')\}] = C_{\theta}(\|\mathbf{t} - \mathbf{t}'\|) \quad (2)$$

dengan $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v}'\mathbf{v}}$ dan C_{θ} fungsi ragam-peragam anggota kelas Matérn dengan parameter $\theta = (\sigma^2, \phi, \tau)$. Asumsi (2) disebut isotropik yaitu peragam antara lokasi yang berjarak $\|\mathbf{h}\|$ unit adalah sama tanpa menghiraukan arah dan letak lokasi. Beberapa fungsi matriks korelasi spasial terdapat pada buku referensi Cressie (1993), Stein (1999), dan Banerjee *et al* (2004). Di geostatistik model (1) dikenal sebagai kriging universal.

Berdasarkan uraian di atas, maka $Y(\mathbf{t})$ menyebar menurut sebaran $Y(\mathbf{t}) = \mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\Sigma}_{11})$ dengan $\boldsymbol{\Sigma}_{11} = \sigma^2 \mathbf{H}_{11}(\phi) + \tau^2 \mathbf{I}$. Penduga ML (kemungkinan maksimum) dan GLS (kuadrat terkecil terampat) bagi vektor parameter $\boldsymbol{\beta}$ adalah $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\mathbf{Y}$. Misalkan prediksi model (1) pada m lokasi yang tidak teramati $\mathbf{t}_0 \in \mathcal{R}^2$ dinyatakan sebagai

$$Y(\mathbf{t}_0) = \mathbf{Y}_0 = \mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta} + \mathbf{S}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}_0 \tag{3}$$

dimana \mathbf{Y}_0 adalah realisasi proses spasial yang tidak teramati, \mathbf{X}_0 adalah matriks koordinat m lokasi yang tidak teramati, $\mathbf{S}_0 \sim N_m(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{H}_{00}(\phi))$ adalah efek acak spasial pada lokasi yang tidak teramati, $\text{cov}(\mathbf{S}, \mathbf{S}_0) = \sigma^2 \mathbf{H}_{10}(\phi)$ adalah matriks peragam antara lokasi yang teramati dengan lokasi tidak teramati, dan $\boldsymbol{\varepsilon}_0 \sim N_m(\mathbf{0}, \tau^2 \mathbf{I})$ adalah galat acak, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ dan \mathbf{S}_0 bersifat bebas stokastik, $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ bersifat bebas stokastik (Wand, 2003; Banerjee, 2004).

Prediksi pada lokasi yang tidak teramati diperoleh melalui minimisasi jumlah kuadrat galat prediksi yaitu $E[(Y(\mathbf{t}_0) - f(\mathbf{y}))^2 | \mathbf{y}]$ dan akan diperoleh $f(\mathbf{y}) = E[Y(\mathbf{t}_0) | \mathbf{y}]$. Berdasarkan teori pada peubah acak normal ganda diketahui jika fungsi sebaran bersama \mathbf{Y} dan \mathbf{Y}_0 adalah

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}_0 \end{pmatrix} \sim N_{n+m} \left(\begin{pmatrix} \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{10} \\ \boldsymbol{\Sigma}'_{10} & \boldsymbol{\Sigma}_{00} \end{pmatrix} \right)$$

maka sebaran bersyarat bagi $\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y}$ adalah normal dengan nilaitengah dan ragam adalah :

$$E(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \mathbf{X}_0\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\Sigma}'_{10}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

$$\text{Var}(\mathbf{Y}_0 | \mathbf{Y} = \mathbf{y}) = \boldsymbol{\Sigma}_{00} - \boldsymbol{\Sigma}'_{10}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{10}$$

Misalkan $\mathbf{Y} = \mathbf{y}$ adalah proses spasial teramati dan $\mathbf{Y}_0 = Y(\mathbf{t}_0)$ adalah proses spasial tidak teramati, sedangkan $\boldsymbol{\Sigma}_{00} = \sigma^2 \mathbf{H}_{00}(\phi) + \tau^2 \mathbf{I}$, dan $\boldsymbol{\Sigma}_{10} = \sigma^2 \mathbf{H}_{10}(\phi)$, maka BLUP (prediksi takbias linear terbaik) pada lokasi yang tidak teramati $\mathbf{t}_0 \in \mathcal{R}^2$ adalah

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{X}_0\hat{\boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\Sigma}'_{10}\boldsymbol{\Sigma}_{11}^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}) \tag{4}$$

Spline untuk dimensi ganda dikenal dengan nama *thin-plate spline*, selanjutnya pada tulisan ini disebut sebagai spline-d, dengan d menyatakan dimensi dari $\mathbf{t}_i \in \mathcal{R}^d$. Fungsi basis spline-d adalah

$$C(r) = \begin{cases} \|r\|^{2m-d} & d \text{ ganjil} \\ \|r\|^{2m-d} \log \|r\| & d \text{ genap} \end{cases} \tag{5}$$

dengan m bilangan bulat dan memenuhi $2m-d > 0$. Misalkan $\boldsymbol{\kappa}_1 < \dots < \boldsymbol{\kappa}_K$ adalah simpul di \mathcal{R}^d , $\|r\| = \|\mathbf{t} - \boldsymbol{\kappa}_k\|$ adalah jarak \mathbf{t} terhadap simpul $\boldsymbol{\kappa}_k$ (Nycha, 2000). Fungsi basis pada persamaan (5) tergantung hanya pada jarak $\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\kappa}_k\|$, sehingga fungsi ini simetrik radial terhadap simpul $\boldsymbol{\kappa}_k$. Oleh karena itu fungsi basis spline-d disebut sebagai fungsi basis radial (French *et al*, 2001; Wand, 2003).

Pada dimensi dua fungsi basis spline-2 adalah $C(r)=r^2 \log r$. Fungsi spline-2 pada lokasi $\mathbf{t}=(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ didefinisikan sebagai

$$g(\mathbf{t})=\beta_0 + \beta_1' \mathbf{t} + \sum_{k=1}^K u_k C(\|\mathbf{t}-\kappa_k\|) \quad (6)$$

dengan $\beta = (\beta_0, \beta_{11}, \beta_{12}, u_1, \dots, u_K)'$ adalah vektor parameter dan $\kappa_1 < \dots < \kappa_K$ adalah simpul di \mathcal{R}^2 .

Kriging universal pada persamaan (1) dan fungsi spline-2 pada persamaan (6) dapat dinyatakan sebagai

$$Y(\mathbf{t}) = P(\mathbf{t}) + h(\mathbf{t}) \quad (7)$$

Pada kriging $P(\mathbf{t})$ menyatakan komponen tren spasial dan $h(\mathbf{t})$ merupakan komponen stokastik Gaussian. Pada spline-2 $P(\mathbf{t})$ menyatakan komponen parametrik yaitu polinomial berderajat-1 dan $h(\mathbf{t})$ adalah fungsi mulus. Sehingga tujuan kriging mirip dengan spline-2. Kriging sama dengan spline-2 jika matriks ragam-peragam proses stokastik S sama dengan $C(r)$ (Hancock *et al*, 1994; Nycha, 2000).

2.2 Formulasi Kriging dan Spline-d dalam Model Linear campuran

Kriging adalah kombinasi linear dari fungsi basis yang ditentukan oleh fungsi matriks ragam-peragam C_0 pada persamaan (2). Sedangkan spline-2 adalah kombinasi linear dari basis radial $C(r)$ pada persamaan (5). Dengan demikian kriging dan spline-2 dapat dinyatakan sebagai

$$y(\mathbf{t}_i) = \beta_0 + \beta_1' \mathbf{t}_i + \sum_{k=1}^K u_k C_0(\|\mathbf{t}_i - \kappa_k\|) \quad (8)$$

dengan $C_0(r) = \begin{cases} \text{fungsi korelasi pada kriging} \\ r^2 \log r \text{ pada spline-2} \end{cases}$

Persamaan (8) merupakan regresi spline, sehingga dapat diduga dengan minimisasi jumlah kuadrat terpenalti. Karena regresi spline terpenalti mempunyai hubungan dengan model linear campuran, maka pendugaan model (8) dapat menggunakan metode REML pada model linear campuran. Formulasi kriging dalam model linear campuran linear adalah

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}_M \mathbf{u} + \varepsilon \quad (9)$$

dimana $\beta = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)'$, dan $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_K)'$ adalah vektor parameter, $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{1i} & x_{2i} \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}_{1 \leq i \leq n}$ adalah matriks koordinat lokasi, $\mathbf{Z}_M = [C_0(\|\mathbf{t}_i - \kappa_k\|)]_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq K}$ adalah fungsi basis radial dengan $C_0(r)$ adalah fungsi korelasi spasial, misalnya $C_0(r) = \exp(-r/\phi)$ adalah fungsi korelasi eksponensial. Sedangkan $\text{cov}(\varepsilon) = \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I}$ dan $\text{cov}(\mathbf{u}) = \sigma^2 \Omega^{-1}$, dimana $\Omega = [C_0(\|\kappa_k - \kappa_k'\|)]_{1 \leq k, k' \leq K}$. Dengan transformasi $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_M \Omega^{-\frac{1}{2}}$, model (9) dapat dinyatakan sebagai

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \varepsilon, \text{ dengan } \text{cov} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

BLUP untuk (9) adalah $y = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{Z}\hat{\mathbf{u}}$ yang merupakan penduga permukaan yang dapat diperoleh melalui kombinasi linear fungsi basis radial

$$z_k(\mathbf{t}) = [C_0(\|\mathbf{t} - \boldsymbol{\kappa}_k\|/\phi)] \Omega^{-\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Formulasi spline-2 dalam model linear campuran dapat dilakukan dengan cara yang sama pada kriging yaitu dengan mengganti fungsi $C_0(r)$ dengan $C(r) = r^2 \log r$. Model linear campuran untuk Spline-2 adalah

$$y = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{Z}\mathbf{u} + \varepsilon, \text{ dengan } \text{cov} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \varepsilon \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_s^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_\varepsilon^2 \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

dengan $\boldsymbol{\beta}$, \mathbf{u} adalah vektor parameter, matriks \mathbf{X} adalah matriks koordinat lokasi seperti pada model (9), sedangkan matriks basis radialnya adalah

$$\mathbf{Z} = [C(\|\mathbf{t}_i - \boldsymbol{\kappa}_k\|)] [C(\|\boldsymbol{\kappa}_k - \boldsymbol{\kappa}_{k'}\|)]^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq k, k' \leq K} \quad (11)$$

Penduga parameter pemulus pada regresi kriging dan spline-2 merupakan rasio antara dua

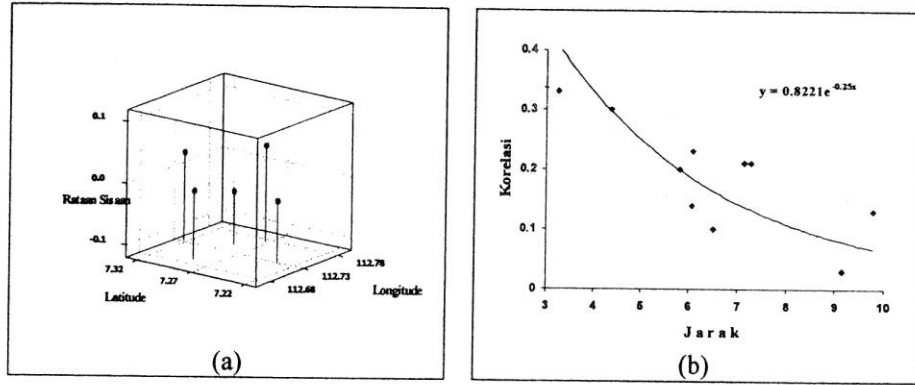
$$\text{komponen ragam, yaitu } \lambda_s = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_s^2} \quad (12)$$

3. PENERAPAN PADA DATA PENCEMARAN UDARA OZON

Ozon permukaan adalah pencemar sekunder yang terbentuk akibat reaksi gas nitrogen dengan hidrokarbon akibat pemanasan sinar matahari. Data konsentrasi ozon ($\mu\text{g}/\text{m}^3$) yang digunakan pada penelitian ini diukur oleh 5 stasiun pemantau kualitas udara kota Surabaya pada waktu bulan Januari 2002 sampai Desember 2002. Karena data Ozon mengandung komponen deret waktu, maka komponen ini lebih dulu dikeluarkan dari model sehingga data yang dianalisa adalah sisaan dari model deret waktu.

Pola spasial pada data sisaan ini dimodelkan dengan kriging dan spline-2. Kriging memerlukan informasi tentang fungsi korelasi spasial dan penduga parameternya. Sehingga tahap awal pada kriging adalah menduga fungsi korelasi spasial, kemudian membangkitkan fungsi basis radial pada persamaan (10). Pada Spline-2, lebih dulu membangkitkan fungsi basis radial pada persamaan (11). Selanjutnya kriging dan spline-2 diformulasikan dalam bentuk model linear campuran dan diduga dengan metode REML. Kebaikan model ditentukan berdasarkan kriteria AIC, MSE, dan nilai parameter pemulusnya.

Plot nilai rata-rata sisaan dengan lokasi stasiun disajikan pada Gambar (1a). Model terbaik untuk menyatakan hubungan antara korelasi spasial dengan jarak antar lokasi adalah fungsi eksponensial yaitu korelasi = $\exp(-0.25 \cdot \text{jarak})$. Plot nilai korelasi dan fungsinya disajikan pada Gambar (1b).

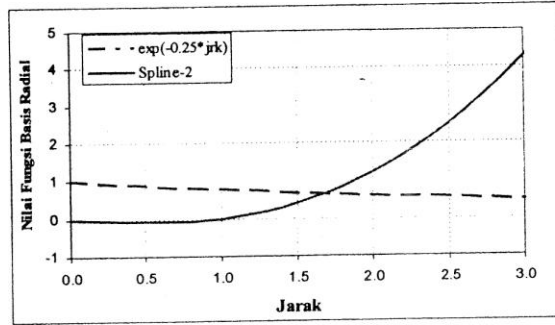


Gambar 1. (a) Plot Rataan Sisaan Ozon (b) Plot Korelasi Spasial dan Fungsinya

Hasil pendugaan kriging dan spline-2 dengan metode linear campuran disajikan pada Tabel 1. Semua model mempunyai MSE yang sama dan nilai AIC yang hampir sama kecuali pada kriging dengan jumlah simpul 3 mempunyai nilai AIC paling besar, akan tetapi nilai parameter pemulus dari kriging dan spline-2 berbeda. Nilai parameter pemulus pada spline-2 cenderung menurun dengan bertambahnya jumlah simpul, sedangkan pada kriging terjadi hal yang sebaliknya. Perbedaan arah kecenderungan nilai parameter pemulus antara spline-2 dan kriging disebabkan oleh perbedaan arah fungsi basisnya. Pada Gambar 2 tampak fungsi basis radial pada kriging mempunyai arah kecenderungan negatif, sedangkan pada spline-2 mempunyai arah kecenderungan positif. Pada kriging nilai fungsi basis turun secara perlahan-lahan seiring dengan bertambahnya jarak. Pada spline-2, nilai fungsi basis radial hampir sama pada jarak antara 0 sampai 1.2, kemudian naik tajam pada jarak lebih dari 1.2.

Tabel 1. Nilai AIC, MSE, dan Parameter Pemulus dari Model Spline-2 dan Kriging

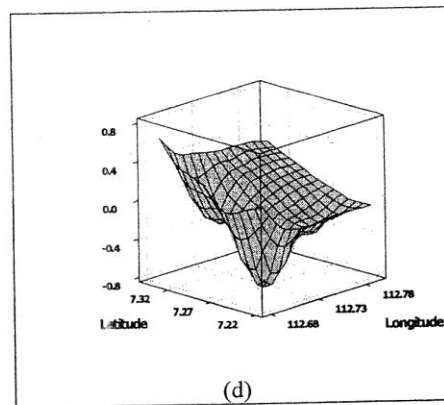
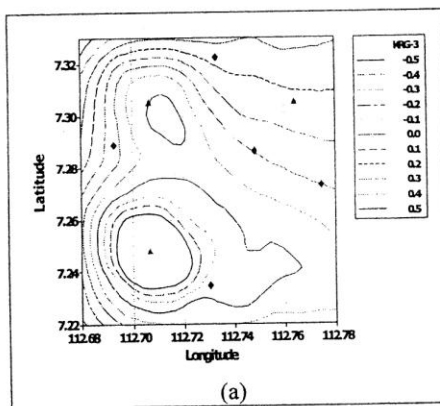
Model	Jumlah Simpul	AIC	MSE	Parameter Pemulus
Kriging	K=3	7839.8	0.1072	0.293
	K=4	7837.3	0.1072	1.547
	K=5	7836.4	0.1072	7.411
Spline-2	K=3	7837.2	0.1072	12.355
	K=4	7836.9	0.1072	20.113
	K=5	7836.2	0.1072	33.592

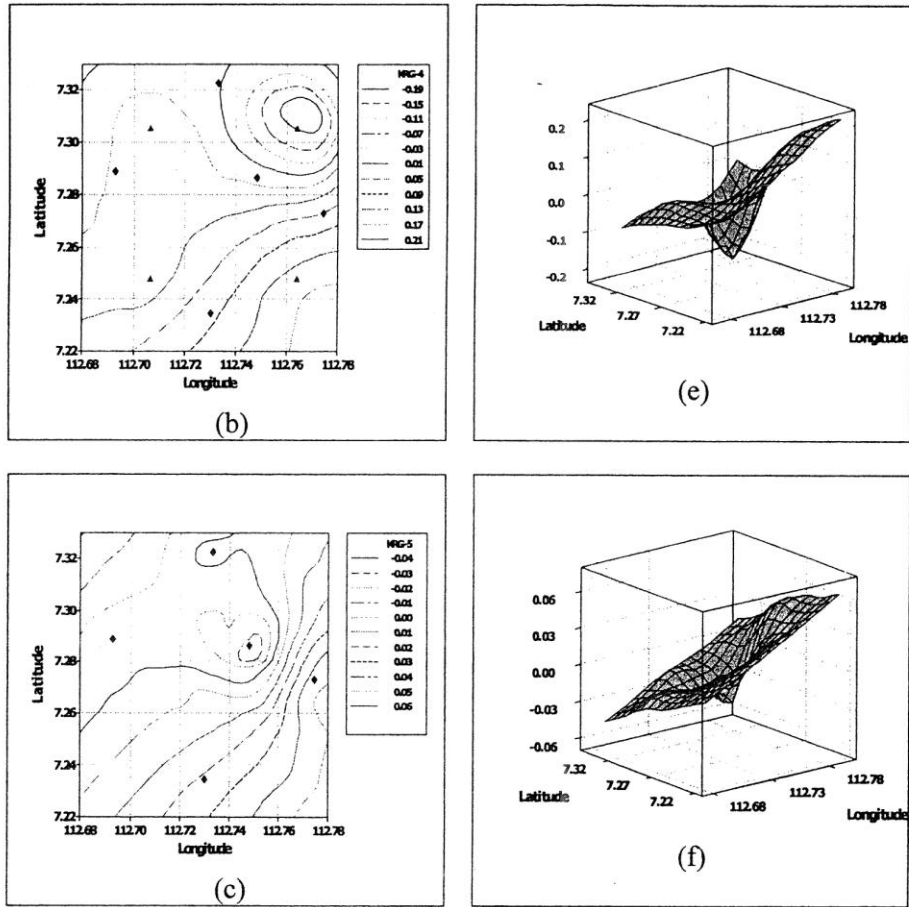


Gambar 2. Fungsi Basis Radial untuk Kriging dan Spline-2 dari Ozon

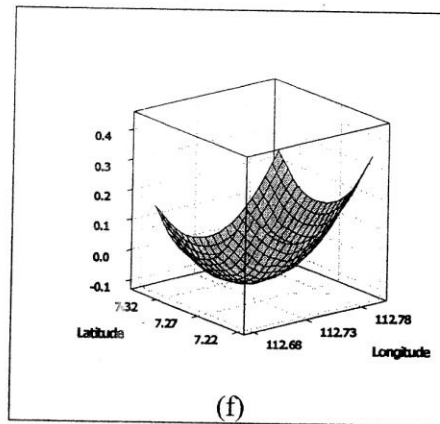
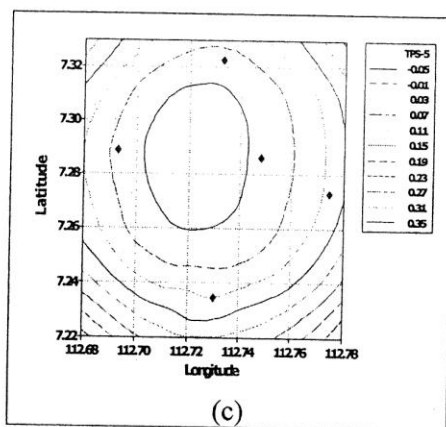
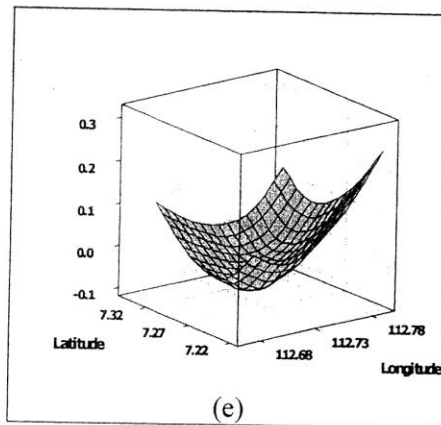
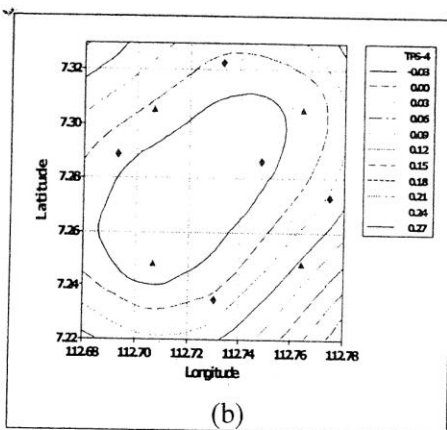
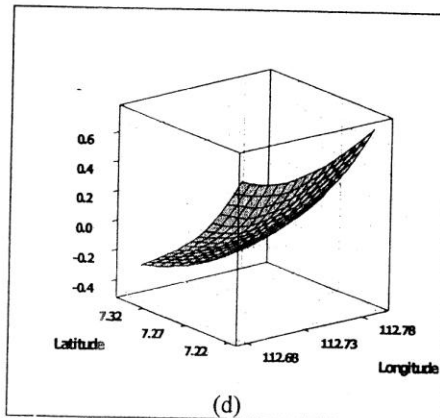
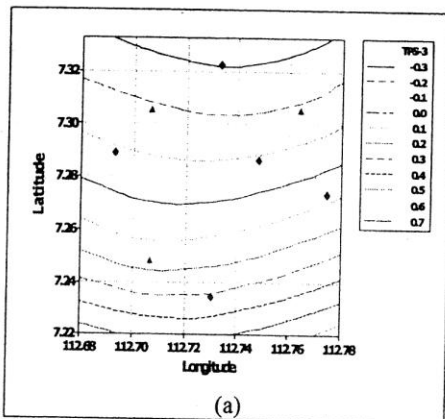
Kontur dan kurva permukaan Ozon hasil prediksi dengan kriging disajikan pada Gambar 3, sedangkan dengan spline-2 disajikan pada Gambar 4. Dari kedua Gambar ini terlihat bahwa kontur dan kurva permukaan spline-2 tampak lebih mulus dibandingkan dengan kontur dan kurva permukaan kriging. Kontur dan kurva permukaan pada kriging(K= 4) dan kriging(K=5) sangat mirip, demikian juga pada spline-2(K=4) dan spline-2(K=5). Pola kontur prediksi spasial dari kriging dan spline-2 sangat dipengaruhi oleh jumlah simpul.

Pola ragam spasial berhubungan dengan nilai parameter pemulus pada Tabel 1. Parameter pemulus merupakan rasio antara dua komponen ragam seperti pada persamaan (12). Spline-2 mempunyai nilai parameter pemulus spasial yang besar, hal ini menunjukkan bahwa ragam spasial spline-2 kecil, sehingga kurva permukaan spline-2 akan mulus. Sedangkan pada kriging terjadi hal yang sebaliknya. Model kriging(K=5) dan Spline-2(K=5) mempunyai nilai AIC terkecil dan nilainya hampir sama. Pola ragam spasial dari kriging(K=5) dan spline-2(K=5) masing-masing disajikan pada Gambar 5a dan Gambar 5b. Pada kedua gambar tampak kriging (K=5) dapat menggambarkan pola keragaman spasial dari pada spline-2(K=5). Sehingga model aditif spasial terbaik untuk Ozon adalah kriging(K=5).

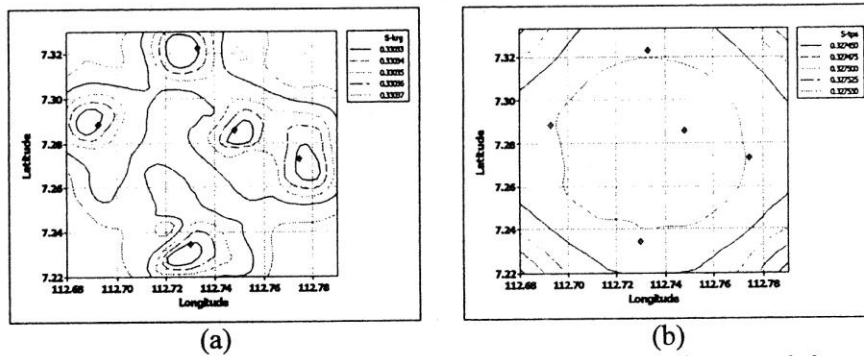




Gambar 3. Kontur Kriging Ozon (a) Jumlah Simpul 3 (c) Jumlah Simpul 4 (e) Jumlah Simpul 5; Kurva Permukaan Kriging Ozon (b) Jumlah Simpul 3 (d) Jumlah Simpul 4 (f) Jumlah Simpul 5



Gambar 4. Kontur Spline-2 Ozon (a) Jumlah Simpul 3 (c) Jumlah Simpul 4 (e) Jumlah Simpul 5; Kurva Permukaan Spline-2 Ozon (b) Jumlah Simpul 3 (d) Jumlah Simpul 4 (f) Jumlah Simpul 5



Gambar 5. (a) Pola simpangan baku spasial dari kriging dan (b) Pola simpangan baku spasial dari Spline-2 untuk Ozon

4. KESIMPULAN

Pendugaan model kriging dan spline-2 dengan model linear campuran memberikan kemudahan dalam pengambilan kesimpulan. Prediksi spasial dengan kriging pada data Ozon menghasilkan kurva permukaan yang kasar sedangkan dengan spline-2 menghasilkan kurva permukaan yang halus. Kemulusan kurva permukaan prediksi spasial juga dipengaruhi oleh jumlah simpul yang digunakan pada fungsi basis radialnya.